

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ПЛИТ

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

(Новосибирск)

Изучение динамического поведения пластических конструкций при воздействии кратковременных нагрузок высокой интенсивности имеет важное значение для оценки степени их повреждаемости с целью определения взрывобезопасных расстояний, а также для определения формы изделий при формообразовании тонколистовых заготовок методами импульсной штамповки. При таких воздействиях уровень пластических деформаций существенно превышает уровень упругих деформаций, что позволяет считать удобной и приемлемой модель идеального жесткопластического тела. К настоящему времени исследования по динамике жесткопластических конструкций охватывают широкий спектр вопросов и нашли подробное изложение в [1—8]. Применительно к изгибу пластин большая часть исследований касается задач осесимметричной деформации круглых и кольцевых пластин и построения модификаций [9—16] приближенного решения А. А. Гвоздева для прямоугольной плиты по схеме «конверт», полученного в [17] и основанного на предположении о стационарности пластических шарнирных линий. Суть указанных модификаций состоит либо в использовании экстремальных принципов и приближенных интегральных оценок для максимального остаточного прогиба и времени движения при заранее заданных типах модальных полей скоростей [11, 14—16], либо в учете геометрической нелинейности [9, 14] в рамках схемы [17], либо в учете возможности развития пластической зоны в сочетании со стационарностью пластических шарниров [11—13]. Что касается полигональных пластин общего вида, то решения соответствующих задач в литературе отсутствуют, хотя важность получения таких решений отмечалась еще в 1959 г. [9] и для статического поведения найдено достаточно много приближенных решений [18].

В данной работе на основе подхода А. А. Гвоздева построено общее решение динамического изгиба односвязных полигональных плит при шарнирном опирании или заземлении отдельных сторон контура и при воздействии равномерно распределенной по поверхности импульсной нагрузки. В общем случае предполагается, что плита покоится на упругом, вязком или вязкоупругом основании.

1. Рассмотрим пластинку из идеального жесткопластического материала с произвольным полигональным контуром, нагруженную равномерно распределенной динамической нагрузкой интенсивности $P(t)$, покоящуюся на вязкоупругом основании с коэффициентами упругого k_1^0 и вязкого сопротивления k_2^0 . Отдельные стороны контура могут быть шарнирно оперты или заземленными. При нагрузках, незначительно отличающихся от статических предельных нагрузок, схема движения пластинки будет совпадать со схемой статического разрушения [17] в виде совокупности жестких звеньев, разделенных линейными пластическими шарнирами. При достаточно высоком уровне нагрузок, как и в случае изгиба балок [2, 4, 6], круглых кольцевых пластин [5—8], динамика полигональной пластинки может сопровождаться возникновением, развитием и исчезновением зоны интенсивного пластического деформирования. В связи с этим общую схему деформирования полигональной пластинки можно представить так, как изображено на рис. 1, где I_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — области жестких плоских звеньев, I_{II} — пластическая зона. Уравнение движения для области I_{II} имеет вид

$$(1.1) \quad \ddot{w} = p - k_1 w - k_2 \dot{w},$$

$$p = Pt_0^2 / \rho H,$$

$$w = W/H, \quad \tau = t/t_0,$$

$$k_1 = k_1^0 t_0^2 / \rho, \quad k_2 = k_2^0 t_0 / \rho,$$

где ρ — поверхностная плотность материала пластинки; $2H$ — ее

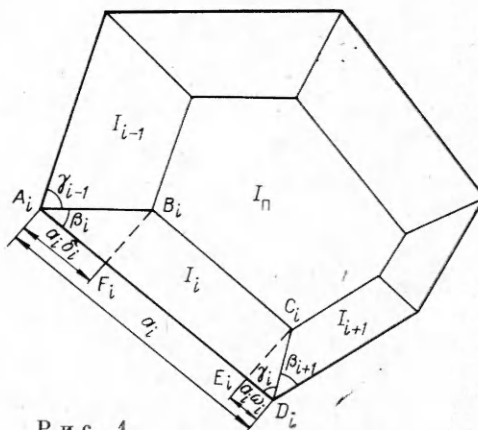


Рис. 1

толщина; t_0 — характерное время; точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени τ ; W — прогиб.

Рассмотрим вращение жесткого звена I_i ($A_i B_i C_i D_i$) вокруг опорной стороны $A_i D_i$ (рис. 1). Из условия совпадения вертикальных скоростей точек на отрезке $B_i C_i$ со стороны областей I_i и I_{i+1} следует, что $C_i B_i \parallel A_i D_i$, откуда

$$(1.2) \quad \omega_i \operatorname{tg} \gamma_i = \delta_i \operatorname{tg} \beta_i;$$

$$(1.3) \quad \beta_i + \gamma_{i-1} = \varphi_i.$$

Здесь φ_i — внутренний угол при вершине A_i ; $A_i D_i = a_i$; $B_i C_i = a_i b_i$; $A_i F_i = a_i \delta_i$; $E_i D_i = a_i \omega_i$. Кроме того, из равенства отрезка $C_i D_i$ для звеньев I_i , I_{i+1} имеем

$$(1.4) \quad a_i \omega_i / \cos(\varphi_{i+1} - \beta_{i+1}) = a_{i+1} \delta_{i+1} / \cos \beta_{i+1}.$$

Уравнение вращения трапеции I_i вокруг опорной линии $A_i D_i$ запишем в форме

$$(1.5) \quad T_i \ddot{\alpha}_i = M_i t_0^2,$$

где T_i — момент инерции трапеции I_i ; M_i — суммарный момент внешних сил, приложенных к поверхности и контуру звена I_i ; α_i — угол отклонения звена I_i от горизонта. Учитывая, что отрезки $A_i B_i$, $B_i C_i$, $C_i D_i$ являются линейными пластическими шарнирами с предельным изгибающим моментом M_0 , а на линии $A_i D_i$ изгибающий момент равен нулю при шарнирном ее закреплении и равен $-M_0$ при ее защемлении, уравнение (1.5) представим как

$$(1.6) \quad \delta_i^3 \operatorname{tg}^3 \beta_i [4 - 3(\delta_i + \omega_i)] (\ddot{\alpha}_i + k_2 \dot{\alpha}_i + k_1 \alpha_i) = \\ = 2c_i [3 - 2(\delta_i + \omega_i)] \delta_i^2 \operatorname{tg}^2 \beta_i p(\tau) - d_i, \quad c_i = H/a_i, \quad d_i = 12M_0 t_0^2 (2 - \eta_i) / \rho a_i^3.$$

Здесь $\eta_i = 0$ и 1 при защемлении отрезка $A_i D_i$ и при его шарнирном опирании. Условие совпадения вертикальных скоростей на отрезке $B_i C_i$ определяет равенство

$$(1.7) \quad \delta_i \operatorname{tg} \beta_i \dot{\alpha}_i = c_i \dot{w}.$$

Совокупность уравнений (1.1) — (1.4), (1.6), (1.7) дает полную систему уравнений для нахождения искомых функций w , α_i , δ_i , ω_i , β_i , γ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Ее анализ и решение для произвольного многоугольника затруднительны и громоздки. Поэтому рассмотрим для простоты правильные многоугольники с одинаково закрепленными сторонами контура при отсутствии упругого и вязкого сопротивления. В этом случае $\varphi_i = \pi(n - 2)/n = 2\varphi$, $\beta_i = \gamma_i = \varphi$, $a_i = 2a$, $\delta_i = \omega_i = \delta/2$, $\alpha_i = \alpha$, $\eta_i = \eta$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда уравнения, описывающие динамическое поведение правильной полигональной плиты, примут вид

$$(1.8) \quad \delta^3 (4 - 3\delta) \ddot{\alpha} = 2p_1 \delta^2 (3 - 2\delta) - m_0, \quad (\delta \dot{\alpha})' = p_1,$$

где $p_1 = pH/r$; $m_0 = 12M_0 t_0^2 (2 - \eta) / \rho r^3$; $r = a \operatorname{tg} \varphi$; r — радиус вписанной в полигональный контур окружности. Начальные условия для α следующие: $\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$.

Для определения предельной статической нагрузки в первом из уравнений (1.8) надо принять $\ddot{\alpha} = 0$. Тогда кинематически возможную предельную нагрузку определим из условия

$$(1.9) \quad p_1^0 = \min_{0 < \delta < 1} p_1 = \min_{0 < \delta < 1} m_0 / 2\delta^2 (3 - 2\delta) = m_0 / 2.$$

При этом пластическая зона вырождается в центр вписанной окружности, а предельная нагрузка в случае шарнирного опирания совпадает с предельной нагрузкой круглой пластинки радиуса r [8, 18]. Движение пластины с вырожденной пластической областью I_{II} будет описываться первым уравнением системы (1.8) при $\delta = 1$.

Пусть на отрезке времени $0 \leq \tau < \tau_1$ (первая фаза) $p_1(\tau) \leq p_1^0$ («низкие» нагрузки), тогда в течение этого периода времени пластинка сохраняет недеформированное состояние и остается в покое.

Проинтегрируем второе уравнение из системы (1.8) с учетом условий $\dot{\alpha}(\tau_k) = \dot{\alpha}_k$, $\delta(\tau_k) = \delta_k$: $\delta \dot{\alpha} = I_k(\tau) + \delta_k \dot{\alpha}_k$, $I_k(\tau) = \int_{\tau_k}^{\tau} p_1(s) ds$, $k = 1, 2, \dots$ (τ_k — некоторый фиксированный момент времени в интервале существования области I_{II} в невырожденном виде). Пользуясь этим равенством и исключая $\ddot{\alpha}$ из системы (1.8), получим $[\delta^2(2 - \delta)(I_k + \delta_k \dot{\alpha}_k)]' = m_0 - = 2p_1^0$, откуда

$$(1.10) \quad \delta^2(2 - \delta) = [2p_1^0(\tau - \tau_k) + \delta_k^3(2 - \delta_k)\dot{\alpha}_k](I_k + \delta_k \dot{\alpha}_k)^{-1}.$$

Из этого выражения вытекает, что при $k = 1$

$$(1.11) \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_1} \delta^2(2 - \delta) = \delta_1^2(2 - \delta_1) = 2p_1^0/p_1(\tau_1),$$

откуда видно, что $\delta_1 < 1$ при $p_1(\tau_1) > 2p_1^0$ и $\delta_1 \geq 1$ при $p_1(\tau_1) \leq 2p_1^0$. Следовательно, если нагрузка такова, что $p_1(\tau_1) > 2p_1^0$ («высокая» нагрузка), то движение пластины начнется при наличии зоны I_{II} и будет описываться системой уравнений (1.8) при начальных условиях $\delta = \delta_1$, $\alpha = \dot{\alpha} = 0$ (δ_1 определяется из (1.11)).

При нагрузке $p_1^0 < p_1(\tau_1) \leq 2p_1^0$, поскольку по смыслу величины δ она не может превышать значения, равные единице, надо считать, что движение пластины начнется при отсутствии пластической зоны и будет описываться первым уравнением из (1.8) при $\delta = 1$.

Рассмотрим подробно движение пластины под действием нагрузки, изображенной на рис. 2. В этом случае во второй фазе ($\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$) при учете начальных условий $\alpha(\tau_1) = \dot{\alpha}(\tau_1) = 0$, $\delta = 1$

$$(1.12) \quad \dot{\alpha}(\tau) = 2I_1(\tau) - 2p_1^0(\tau - \tau_1),$$

$$\alpha(\tau) = 2J_1(\tau) - p_1^0(\tau - \tau_1)^2, \quad J_k(\tau) = \int_{\tau_k}^{\tau} I_k(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Конец этой фазы ($\tau = \tau_2$), соответствующий началу образования пластической зоны, определим следующим образом. Из (1.10) при $k = 2$, $\delta_2 = 1$

$$(1.13) \quad \delta \delta(4 - 3\delta) = \{2p_1^0(I_2 + \dot{\alpha}_2) - [2p_1^0(\tau - \tau_2) + \dot{\alpha}_2] p_1(\tau)\} (I_2 + \dot{\alpha}_2)^{-2}.$$

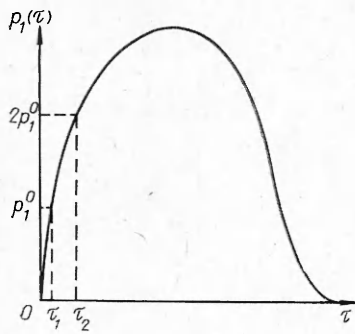
Из (1.13) следует, что при $p_1(\tau_2) = 2p_1^0$ $\delta(\tau_2) = 0$ и $\delta(\tau) < 0$, а при $p_1(\tau) > 2p_1^0$ $\delta(\tau) < 1$. Поскольку $\delta \leq 1$, то δ начнет убывать, что отвечает росту зоны I_{II} в момент времени τ_2 , удовлетворяющий условию $p_1(\tau_2) = 2p_1^0$.

Третья фаза движения ($\tau_2 < \tau \leq \tau_3$) происходит с развитой пластической зоной и описывается системой (1.8) при начальных условиях $\delta(\tau_2) = 1$, $\dot{\alpha}(\tau_2) = \dot{\alpha}_2$, $\alpha(\tau_2) = \alpha_2$. В результате интегрирования имеем ($\alpha_k = \alpha(\tau_k)$)

$$(1.14) \quad \dot{\alpha}(\tau) = (\dot{\alpha}_2 + I_2) \delta^{-1}, \quad \alpha(\tau) = \alpha_2 + \int_{\tau_2}^{\tau} (\dot{\alpha}_2 + I_2) \delta^{-1} ds,$$

$$\delta^2(2 - \delta) = [2p_1^0(\tau - \tau_2) + \dot{\alpha}_2](I_2 + \dot{\alpha}_2)^{-1}.$$

Из (1.13) видно, что при $\tau > \tau_2$ и выполнении условия $F(\tau) < 0$, где $F(\tau) = 2p_1^0[I_2(\tau) + \dot{\alpha}_2] - [2p_1^0(\tau - \tau_2) + \dot{\alpha}_2] p_1(\tau)$, пластическая зона возрастает, при $F(\tau) > 0$ убывает и в момент τ_m такой, что $F(\tau_m) = 0$, достигает своего максимального размера.



Р и с. 2

центре пластинки $W_f = r \int_{\tau_1}^{\tau_3} \delta \dot{\alpha} d\tau$.

В случае «средних» нагрузок $p_1^0 < p_1(\tau) \leq 2p_1^0$ время τ_2 соответствует моменту остановки пластины и в течение $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ движение описывается формулами (1.12). Время τ_2 остановки определяется из $\dot{\alpha}(\tau_2) = 0$ и удовлетворяет уравнению $\tau_2 = \tau_1 + I_1(\tau_2)/p_1^0$.

Для динамической нагрузки высокой интенсивности, мгновенно возникающей и затем убывающей, в описанной выше структуре решения первую и вторую фазу движения следует отбросить, принять $\tau_1 = \tau_2 = 0$, $\dot{\alpha}(\tau_2) = 0$, $\alpha(\tau_2) = 0$ и определить начальное значение $\delta_0 = \delta(0)$ из равенства $\delta_0^2(2 - \delta_0) = 2p_1^0/p_1(0)$, $p_1(0) \geq 2p_1^0$, получающегося из (1.10) при $\tau_k = 0$ предельным переходом $\tau \rightarrow 0$. Для прямоугольного импульса $\delta(\tau) = \delta_0$ в течение всего времени действия импульса и τ_m отвечает моменту снятия нагрузки.

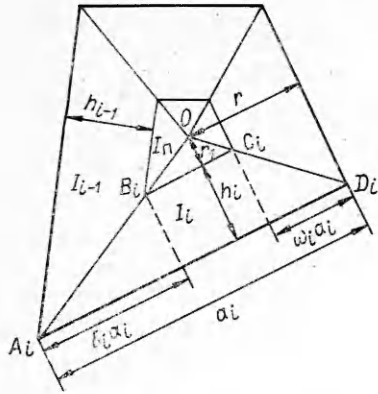
2. Описанное выше решение нетрудно модифицировать для нахождения соответствующих решений для пластин, имеющих свободное или заделанное жесткой шайбой коаксиальное полигональное отверстие.

Для пластин со свободным отверстием, характеризуемым параметром δ , их можно получить, если считать на линиях B_iC_i изгибающие моменты равными нулю. Тогда при фиксированном δ уравнение движения будет описываться первым уравнением (1.8) при замене m_0 на $m'_0 = 12M_0t_0^2(1 - \eta + \delta)/\rho r^3$.

Для пластин с жесткой шайбой, определяемой параметром δ , на линиях B_iC_i будут возникать линейные пластические шарниры и перерезывающие силы, влияющие на взаимное движение жестких участков типа I_i и I_{II} (см. рис. 1). В случае правильного полигонального контура перерезывающие силы вследствие симметрии можно считать равномерно распределенными по контуру внутреннего отверстия. Учитывая это, получим следующие уравнения движения участков I_{II} и I_i соответственно: $\ddot{w} + k_2\dot{w} + k_1w = [p + 2q/(1 - q)]\rho_2$, $\delta^3(4 - 3\delta)(\dot{\alpha} + k_2\dot{\alpha} + k_1\alpha)\text{tg } \varphi = 2pc\delta^2(3 - 2\delta) + 12q \times c\delta(1 - \delta) - m_0\text{tg } \varphi$ ($c = H/a$, $q = Qt_0^2/\rho H a \text{tg } \varphi$, $\rho_2 = \rho/\rho_1$, Q — перерезывающая сила, ρ , ρ_1 — удельные плотности материалов пластины и шайбы). Учитывая равенство вертикальных составляющих скоростей на границе пластины и шайбы $c\dot{w} = \dot{\alpha}\text{tg } \varphi$ и исключая q , имеем уравнение для прогиба w рассматриваемой пластины

$$(2.1) \quad (\ddot{w} + k_2\dot{w} + k_1w) [\rho_2\delta^2(4 - 3\delta) - 6\delta(1 - \delta)^2] = 2p\rho_2\delta(9\delta - 5\delta^2 - 3) - m_0\rho_2\text{tg } \varphi/c.$$

Так как $\delta = \text{const}$, то (2.1) легко интегрируется при начальных условиях $w(0) = \dot{w}(0) = 0$. Учитывая эти условия, предельную нагрузку p^0 , при



Р и с. 3

превышении которой будет происходить движение пластинки, находим из (2.1), полагая $\dot{w}(0) = 0$: $p^0 = m_0 \operatorname{tg} \varphi / [2\delta (9\delta - 5\delta^2 - 3) c]$.

3. Важный класс составляют пластины, которые одинаково закреплены по всему контуру и имеют выпуклый полигональный контур, описанный вокруг окружности радиуса r . Для таких пластин линейные шарниры в предельном состоянии пересекаются в центре окружности [18]. Поскольку $B_i C_i \parallel A_i D_i$ (рис. 3, где $B_i C_i$ — отрезок прямой, разделяющий жесткую область I_i и зону I_{ii}), то в контур области I_{ii} можно вписать окружность радиуса r_1 . Так как $h_i = r - r_1 = h_{i-1} = h = \operatorname{const}$, $\eta_i = \eta$, то из подобия $\triangle A_i O D_i$ и $\triangle B_i O C_i$ будем иметь $r (\omega_i + \delta_i) = h$. Следовательно, $\delta_i + \omega_i = \delta = h/r$ и уравнения (1.6), (1.7) примут вид $\delta^3 (4 - 3\delta)(\ddot{\alpha} + k_2 \dot{\alpha} + k_1 \alpha) = p_1 \delta^2 (3 - 2\delta) - m_0$, $r \delta \dot{\alpha} = H w$. При $k_1 = k_2 = 0$, учитывая (1.1), эту систему сведем к системе (1.8), значит, динамическое поведение таких пластин будет подобно динамическому поведению соответствующих пластин с правильным полигональным контуром.

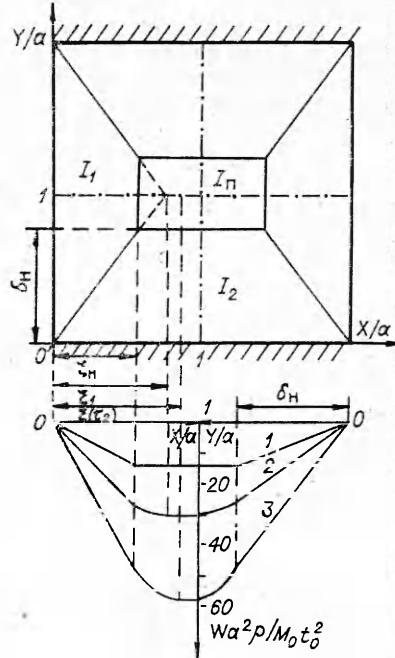
Предложенное выше решение можно использовать для решения задачи оптимизации формы перекрытия с точки зрения минимума его повреждаемости при условии постоянства перекрываемой площади, толщины пластины, способа закрепления по всем граням.

Для правильной n -угольной пластины предельная нагрузка $p_0^n = 6M_0 (2 - \eta) S^{-1} n \{ \operatorname{tg} [\pi (n - 2)/2n] \}^{-1}$ (S — площадь пластины). Так как p_0^n убывает при возрастании n , то $\min_{n \geq 3} p_0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_0^n = 6M_0 (2 - \eta) \pi / S$, откуда видно, что минимальную предельную нагрузку имеет круговая пластина радиуса $\sqrt{S/\pi}$, а треугольная пластина обладает максимальной предельной нагрузкой. Поскольку величина остаточного прогиба и время движения пластины обратно пропорциональны величине предельной нагрузки, круглая пластина будет иметь наибольшую повреждаемость. Для прямоугольных пластин с отношением сторон $\gamma \geq 1$ наибольшая повреждаемость у квадратных пластин ($\gamma = 1$), так как предельная нагрузка

$$p_0^\gamma = 6M_0 (2 - \eta) S^{-1} (1 + \sqrt{1 + 3\gamma^2})^2 (9\gamma)^{-1},$$

$$\text{а } \min_{\gamma \geq 1} p_0^\gamma = p_0^\gamma |_{\gamma=1} = 6M_0 (2 - \eta) S^{-1}.$$

4. В качестве примера рассмотрим задачу о динамическом изгибе квадратной пластинки, две противоположные стороны которой защемле-



Р и с. 4

ны, а две другие зашпелены ($\eta = 0$) или шарнирно оперты ($\eta = 1$), под действием нагрузки в виде прямоугольного импульса интенсивности p_1 , действующего в течение времени $0 \leq \tau \leq 1$. Общая схема деформирования такой пластины изображена на рис. 4, где δ, ξ — величины, характеризующие размеры пластической области I_{II} , I_i — жесткие зоны ($i = 1, 2$). Уравнения динамического поведения имеют вид

$$(4.1) \quad \xi^3 (4 - 3\delta) \ddot{\alpha}_1 = 2p_1 \xi^2 (3 - 2\delta) - (2 - \eta) m/2;$$

$$(4.2) \quad \delta^3 (4 - 3\xi) \ddot{\alpha}_2 = 2p_1 \delta^2 (3 - 2\xi) - m;$$

$$(4.3) \quad (\xi \dot{\alpha}_1)^\cdot = p_1;$$

$$(4.4) \quad \xi \dot{\alpha}_1 = \delta \dot{\alpha}_2$$

при $m = 24M_0/\rho a^3$. Предельная нагрузка

$$(4.5) \quad p_1^0 = m(2 - \eta)/4\xi_0^2.$$

Здесь

$$(4.6) \quad \xi_0 = (-1 + \sqrt{1 + 6/(2 - \eta)})(2 - \eta)/2.$$

При $p_1 \leq p_1^0$ («низкие» нагрузки) движения не будет, при $p_1^0 < p_1 \leq p_1^1$ («средние» нагрузки), где

$$(4.7) \quad p_1^1 = m(2 - \eta)/(2\xi_1^2);$$

$$(4.8) \quad \xi_1 = (-1 + \sqrt{1 + 16/(2 - \eta)})(2 - \eta)/4,$$

движение будет происходить с $\delta = 1$ и ξ , определяемым из уравнения $p_1 = m[4 - 3\xi - 2\xi^2/(2 - \eta)](2 - \eta)[4\xi^2(1 - \xi)]^{-1}$, при вырождении зоны I_{II} в отрезок прямой. При $p_1 > p_1^1$ («высокие» нагрузки) движение пластины начнется при наличии развитой зоны I_{II} .

Рассмотрим «высокие» нагрузки: $p_1 > p_1^1$. При этом в первой фазе ($0 \leq \tau \leq 1$) из (4.1)–(4.4) при $p_1 = \text{const}$, $\xi = \xi_H$, $\delta = \delta_H$

$$\dot{\alpha}_1(\tau) = p_1 \tau / \xi_H, \quad \alpha_1(\tau) = p_1 \tau^2 / 2\xi_H, \quad \dot{\alpha}_2(\tau) = p_1 \tau / \delta_H, \quad \alpha_2(\tau) = p_1 \tau^2 / 2\delta_H,$$

$$\xi_H = 2[1 - m(2\delta_H^2 p_1)^{-1}],$$

δ_H определяется из уравнения

$$p_1 = m \left[\sqrt{16(2 - \delta_H)/(2 - \eta) + \delta_H^2} + \delta_H \right]^2 (2 - \eta) [32(2 - \delta_H)\delta_H^2]^{-1}.$$

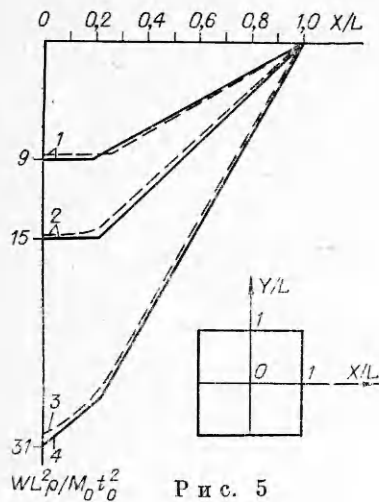
Во второй фазе ($1 < \tau \leq \tau_1$) происходит сжатие области I_{II} и из (4.1)–(4.4) при $p_1 = 0$, $\delta = \delta(\tau)$, $\xi = \xi(\tau)$

$$\dot{\alpha}_1(\tau) = p_1 / \xi(\tau), \quad \alpha_1(\tau) = \alpha_1(1) + p_1 \int_1^\tau \xi^{-1}(s) ds, \quad \dot{\alpha}_2(\tau) = p_1 / \delta(\tau),$$

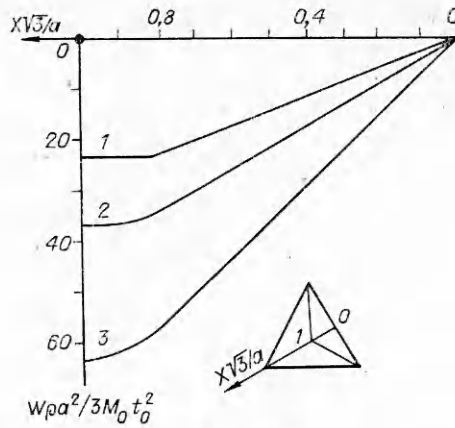
$$\alpha_2(\tau) = \alpha_2(1) + p_1 \int_1^\tau \delta^{-1}(s) ds,$$

$\delta(\tau)$, $\xi(\tau)$ находим из уравнений $p_1 = m\tau[\sqrt{16(2 - \delta)/(2 - \eta) + \delta^2} + \delta]^2 \times (2 - \eta)[32(2 - \delta)\delta^2]^{-1}$, $\xi(\tau) = 2[1 - m\tau(2\delta^2 p_1)^{-1}]$. Момент времени $\tau = \tau_1$ определяется из условия $\delta(\tau_1) = 1$ и равен $\tau_1 = p_1/p_1^1$, при этом $\xi(\tau_1) = \xi_1$ (p_1^1, ξ_1 вычисляются по (4.7), (4.8)).

Третья фаза движения ($\tau_1 < \tau \leq \tau_2$) происходит при отсутствии зоны I_{II} . Решение описывается системой (4.1), (4.2), (4.4) при $p_1 = 0$, $\delta = 1$ и начальных условиях $\xi(\tau_1) = \xi_1$, $\alpha_i(\tau_1) = \alpha_{i1}$, $\alpha_i(\tau_1) = \alpha_{i1}$ ($i = 1, 2$). Система (4.1), (4.2), (4.4) решается численно методом Рунге — Кутты. Время остановки пластины τ_2 находится из условия $\dot{\alpha}_i(\tau_2) = 0$ ($i = 1, 2$).



Р и с. 5



Р и с. 6

Расчеты показали, что с машинной точностью в момент τ_2 верны соотношения $\xi(\tau_2) = 0$, $I_1(\tau_2) = p_1^0 \tau_2$, $2\xi_2^2 - (2 - \eta)(3 - 2\xi_2) = 0$. Остаточный прогиб в центре пластинки $W_f = c \int_0^{\tau_2} \delta(\tau) \dot{\alpha}_2(\tau) d\tau$.

На рис. 4 изображено распределение прогибов пластинки с двумя защемленными и двумя шарнирно опертыми краями под действием нагрузки $p_1^* = 1,5 p_1^{1*}$ ($p_1^* = p_1 \rho a^3 / M_0 t_0^2$, $p_1^{1*} = 19,69$) в моменты времени $\tau = 1$, $\tau_1 = 1,5$, $\tau_2 = 3,4$ (кривые 1—3). На рис. 5 приведено количественное сравнение результатов расчета для шарнирно опертой пластинки (штриховые линии), нагруженной равномерно распределенным прямоугольным импульсом, с решением из [5] (сплошные линии), полученным методом линейного программирования. Считалось, что $p_1^* = 3p_1^s$, где $p_1^* = p_1 \rho L^3 / M_0 t_0^2$, $2L$ — длина стороны пластинки, $p_1^s = 5,716$ — предельная нагрузка по [5]. Отметим, что для данной пластинки предельная нагрузка, определенная в [19] симплекс-методом, равна 5,784, а по формуле (1.9) — 6. На рис. 5 приведены прогибы пластинки в моменты времени $\tau = 1$ (снятия нагрузки) и $\tau = 1,3$ и остаточные прогибы в моменты времени $\tau = 3,3$ по [5] и $\tau = 2,87$ по приведенным выше формулам. Как видно, найденные значения достаточно близки, но полученное здесь решение обладает преимуществом существенной простоты. Отметим также, что для прямоугольного импульса и шарнирно опертой квадратной пластинки полученные здесь формулы остаточного прогиба совпадают с формулами из [10], найденными на основе иного, более сложного решения.

В качестве другого примера рассмотрим задачу о правильной треугольной шарнирно опертой пластинке со стороной $2a$ при воздействии прямоугольного равномерно распределенного импульса интенсивности p_1 . В этом случае уравнения, описывающие движение, имеют вид (1.8) $\delta^3(4 - 3\delta) \ddot{\alpha} = 2p_1 \delta^2(3 - 2\delta) - m_0(\delta \dot{\alpha}) = p_1$. Предельная нагрузка $p_1^0 = m_0/2$. При $p_1^0 < p_1 \leq 2p_1^0$ («средние» нагрузки) движение пластинки происходит с тремя линейными пластическими шарнирами, совпадающими с биссектрисами углов треугольника. При $p_1 > 2p_1^0$ («высокие» нагрузки) движение происходит с образованием пластической зоны в виде правильного треугольника, подобного контурному треугольнику. При этом в первой фазе движения ($0 \leq \tau \leq 1$, $p_1 = \text{const}$, $\delta = \delta_n = \text{const}$) $\dot{\alpha}(\tau) = p_1 \tau / \delta_n$, $\alpha(\tau) = p_1 \tau^2 / 2\delta_n$, $w(a\sqrt{3}/3, \tau) = p_1 \tau$, $w(a\sqrt{3}/3, \tau) = p_1 \tau^2 / 2$ ($w(x, \tau)$ — прогиб вдоль оси OX (рис. 6)). Размер пластической зоны δ_n

определяется из уравнения

$$\delta_n^2 (2 - \delta_n) = 2p_1^0/p_1.$$

Во второй фазе ($1 \leq \tau \leq \tau_1$, $p_1 = 0$, $\delta = \delta(\tau)$)

$$\dot{\alpha}(\tau) = p_1/\delta(\tau), \quad \alpha(\tau) = \alpha(1) + \int_1^\tau \delta^{-1}(s) ds, \quad w(a\sqrt{3}/3, \tau) = p_1(\tau - 1/2),$$

$$w(\delta_n a\sqrt{3}/3, \tau_1) = w(a\sqrt{3}/3, 1) + p_1 \delta_n \int_1^{\tau_1} \delta^{-1}(s) ds = w(a\sqrt{3}/3, 1) + p_1^2 \delta_n (2p_1^0)^{-1} [4(1 - \delta_n) - 3(1 - \delta_n^2)/2],$$

где $\delta(\tau)$ находим из

$$\delta^2 (2 - \delta) = 2p_1^0 \tau/p_1; \quad \delta(\tau_1) = 1; \quad \tau_1 = p_1/2p_1^0.$$

В третьей фазе ($\tau_1 < \tau \leq \tau_2$, $p_1 = 0$, $\delta = 1$, τ_2 — время окончания движения)

$$\dot{\alpha}(\tau) = 2(p_1 - p_1^0 \tau), \quad \tau_2 = p_1/p_1^0, \quad \alpha(\tau) = \alpha(\tau_1) + 2 \int_{\tau_1}^\tau (p_1 - p_1^0 s) ds,$$

$$w(a\sqrt{3}/3, \tau_2) = w(a\sqrt{3}/3, \tau_1) + 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 - p_1^0 \tau) d\tau,$$

$$w(\delta_n a\sqrt{3}/3, \tau_2) = w(\delta_n a\sqrt{3}/3, \tau_1) + 2\delta_n \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 - p_1^0 \tau) d\tau.$$

На рис. 6 изображено распределение прогибов в моменты времени $\tau = 1$, $\tau_1 = 1,3$, $\tau_2 = 2,6$ (кривые 1—3) в сечении вдоль биссектрисы угла при $p_1^* = 2,6p_1^{*0}$ ($p_1^{*0} = 18$, $p_1^* = p_1 \rho a^3 \operatorname{tg}^3 \varphi / M_0 t_0^2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Райнхарт Дж., Пирсон Дж. Взрывная обработка металлов.— М.: Мир, 1966.
2. Дикович И. Л. Динамика упругопластических балок.— Л.: Судпромгиз, 1962.
3. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсных сил.— М.: Госстройиздат, 1960.
4. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках.— М.: Физматгиз, 1961.
5. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций.— М.: Наука, 1978.
6. Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жесткопластических элементов конструкций.— Новосибирск: Наука, 1984.
7. Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамическая теория пластичности // Упругость и пластичность.— М.: ВИНТИ, 1968.
8. Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упругопластических сред. Механика. Новое в зарубежной науке.— М.: Мир, 1975.
9. Jones N. A., Ugan T. O., Tekin S. A. The dynamic plastic behaviour plates // Intern. J. Solids and Struct.— 1970.— V. 6, N 12.
10. Cox A. D., Morland L. W. Dynamic plastic deformations of simply supported square plates // J. Mech. Phys. Solids.— 1959.— V. 7, N 4.
11. Вирма Э. Динамика пластических прямоугольных пластин // Учен. зап. Тартуск. ун-та.— 1972.— Вып. 305.
12. Heinrich J. Intenzivni dynamicke zatizeni pravouhlych desek // Stavebni casop.— 1965.— V. 13, N 9.
13. Цонев Л. Твърдопластична плоча под действието на мигновен импулс // Годишн. висш. техн. учебни завед. Прилож. мех.— 1971.— Т. 6, № 1.
14. Jones N. A. A theoretical study of dynamic plastic behaviour of beams and plates with finite deflections // Intern. J. Solids and Struct.— 1971.— V. 7, N 8.
15. Kaliszky S. Approximate solutions for impulsively loaded plastic structures and continua // Intern. J. Non-Linear Mech.— 1970.— V. 5, N 1.
16. Morales W. I., Nevill G. E. Lower bounds on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua // AIAA J.— 1970.— V. 8, N 11.

17. Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строит. пром-сть.— 1943.— № 1—2.
 18. Ржаницын А. Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек.— М.: Наука, 1983.
 19. Koopman D. C., Lance R. H. On linear programming and plastic limit analysis // J. Mech. Phys. Solids.— 1965.— V. 13, N 2.

Поступила 15/IV 1987 г.

УДК 539.375

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ОСТРОУГОЛЬНОГО КЛИНА ПРИ ПРЕДЕЛЬНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ СДВИГУ, СРЕДНЕМУ РАСТЯГИВАЮЩЕМУ НАПРЯЖЕНИЮ И ОТРЫВУ

И. Т. Артемьев, Д. Д. Ивлев
 (Чебоксары)

Упругопластическое состояние плоской деформации бесконечного клина, нагруженного равномерным давлением по одной грани, рассматривалось в [1, 2] и др., где состояние несжимаемого идеально пластического материала соответствует условию сопротивления максимальному касательному напряжению

$$(1) \quad \tau_{\max} = (1/2) |\sigma_1 - \sigma_2| \leq k, \quad k = \text{const} > 0.$$

В плоскости главных напряжений σ_1, σ_2 (1) интерпретируется полосой $A_1A_2B_1B_2$ (рис. 1).

В [3, 4] кроме предела сопротивления сдвигу учитывается предел сопротивления отрыву (максимальному растягивающему напряжению) [5, 6]. Такой подход позволяет ограничить сверху область расчетных нормальных напряжений ломаной A_1AMB_1 , так как (1) дополняется условием сопротивления отрыву

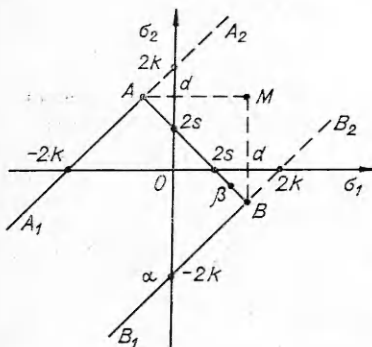
$$(2) \quad \sigma_{\max} = \sigma_i \leq d \quad (i = 1, 2), \quad d = \text{const} > 0.$$

В [7, 8] дано описание состояния пластической среды при предельном сопротивлении среднему растягивающему напряжению, которое соответствует условию

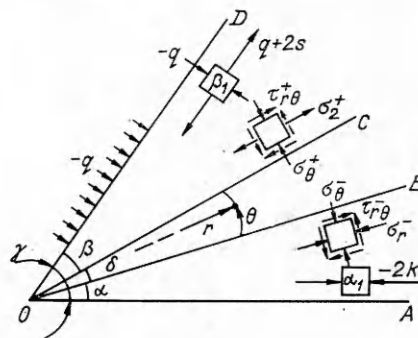
$$(3) \quad \sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \leq s, \quad s = \text{const} > 0.$$

Исходя из условий сопротивления сдвигу (1) и отрыву (2), можно минимизировать область допустимых напряжений A_1AMB_1 при фиксированных точках A и B , рассматривая (1) совместно с (3) при $s = d - k$ и соблюдая условие невогнутости [6] области A_1ABB_1 . Область, в которой максимальные компоненты напряжений не достигли предельных значений, будем считать упругой.

Настоящая работа посвящена анализу предельного состояния упругопластического клина в области напряжений (1), (3), т. е. при предель-



Р и с . 1



Р и с . 2