

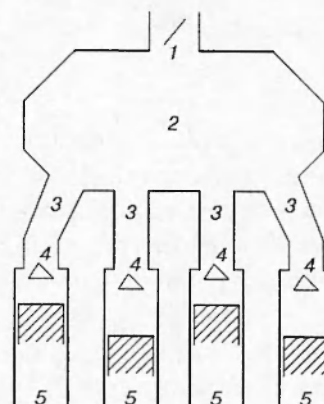
## ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ВПУСКНОЙ СИСТЕМЫ ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

Б. П. Колобов, П. П. Колобов, В. Н. Шепеленко

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Построена физико-математическая модель течения во впускной системе двигателя внутреннего сгорания при работе в «холодном» режиме, т. е. для случая заданного движения коленчатого вала. Газ предполагается совершенным и однокомпонентным. Приведены результаты серийных расчетов на интервале по времени до пяти рабочих циклов.

1. Предлагается газодинамическая модель и алгоритм расчета впускной системы четырехтактного поршневого двигателя внутреннего сгорания (ДВС). Впускная система (см. рисунок) представляет собой совокупность четырех каналов 3, выходящих из объемного узла 2, и закрывающих клапанов 4, которые регулируют перетекание газа в цилиндры 5. С источником питания объемный узел сообщается посредством дроссельной заслонки 1.



Движение газа в системе рассчитывается на основе уравнений одномерного течения в канале при наличии трения и теплообмена на стенках и законов сохранения массы и энергии в объемном узле. Давление и температура газа в цилиндрах и на входе в систему предполагаются известными. Данная задача при тех или иных упрощениях рассматривалась в работах [1–5]. Постановка и методы решения некоторых сходных задач изучались в работах [6–9].

2. Система уравнений, описывающая одномерное нестационарное течение совершенного газа в канале с трением и теплообменом на стенке, приводится к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = f; \tag{2.1}$$

$$P = \rho RT, \tag{2.2}$$

где

$$W = |U, P, T|^T; \quad f = |f_1, f_2, f_3|^T; \quad A = \begin{vmatrix} U & RT/P & 0 \\ \gamma P & U & 0 \\ (\gamma - 1)T & 0 & U \end{vmatrix};$$

$$f_1 = -\frac{\lambda}{8} |U| U \frac{\Pi}{F}; \quad f_2 = (\gamma - 1) \left( q_0 + \frac{\lambda}{8} \rho |U|^3 \right) \frac{\Pi}{F} - \gamma \rho U \frac{\partial \ln F}{\partial x};$$

$$f_3 = (\gamma - 1) \frac{T}{P} \left( q_0 + \frac{\lambda}{8} \rho |U|^3 \right) \frac{\Pi}{F} - (\gamma - 1) T U \frac{\partial \ln F}{\partial x};$$

$x$  — координата вдоль оси канала;  $F$ ,  $\Pi$  — площадь и периметр поперечного сечения канала;  $U$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $\rho$  — скорость, давление, температура и плотность газа;  $q_0$  — поток тепла

через боковую поверхность канала;  $\lambda$  — коэффициент поверхностного трения;  $\gamma = C_p/C_V$ ,  $C_p = \gamma R/(\gamma - 1)$ ,  $C_V = R/(\gamma - 1)$ ;  $C_p$ ,  $C_V$  — теплоемкость газа при постоянных давлении и объеме;  $R$  — газовая постоянная.

Для расчета коэффициента поверхностного трения выбрана следующая явная аппроксимационная зависимость Кольбука — Уайта [10]:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda^*(\text{Re}, \Delta/D) + 1/\text{Re} & \text{при } \text{Re} \geq 100, \\ \lambda^*(100, \Delta/D) + 1/\text{Re} & \text{при } \text{Re} < 100, \end{cases}$$

$$\lambda^* = \left[ 2 \lg \left( \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda^{**}}} + \frac{\Delta}{3,7D} \right) \right]^{-2}, \quad \lambda^{**} = \left[ 1,8 \lg \left( \frac{7}{\text{Re}} + \frac{\Delta}{10D} \right) \right]^{-2}.$$

Здесь  $\Delta$  — высота шероховатости стенки канала;  $D = 4F/\Pi$  — гидравлический диаметр канала;  $\text{Re} = D|U|\rho/\mu$  — число Рейнольдса;  $\mu$  — вязкость газа. В качестве рабочего газа использовался обычный воздух при температуре 20 °С. Для него  $\mu(T) = 1,484 623 \cdot 10^{-6} \frac{T^{3/2}}{T + 117}$  кг/(м · с),  $R = 287,18$  м<sup>2</sup>/(с<sup>2</sup> · град),  $\gamma = 1,369$  [10–12].

Система (2.1) гиперболическая, поэтому для нее необходимо ставить начальные и краевые условия. Число краевых условий зависит от знака собственных значений матрицы  $A$

$$\lambda_1 = U - C, \quad \lambda_2 = U + C, \quad \lambda_3 = U.$$

Здесь  $C = \sqrt{\gamma RT}$  — скорость звука. В данной работе рассматриваются только дозвуковые течения, т. е. случай  $|U| < C$ . Поэтому обязательно нужно ставить одно граничное условие на левом конце канала, где  $\lambda_2 > 0$ , и одно граничное условие на правом конце канала, где  $\lambda_1 < 0$ . В рассматриваемой задаче более целесообразно ставить граничные условия для давления. Краевые условия для температуры определяются знаком собственного значения  $\lambda_3 = U$ : если  $U(0, t_n) > 0$ , то  $T(0, t_n)$  полагается равной температуре газа в объемном узле; если  $U(L, t_n) < 0$ , где  $L$  — длина канала, то  $T(L, t_n)$  полагается равной температуре газа в цилиндре. В противном случае температура на концах канала определяется из дополнительных условий. В зависимости от поведения решения общее число краевых условий для каждого канала может колебаться от двух до четырех. Эти условия имеют вид нелинейных уравнений.

3. Течение в каналах рассчитывается по явной разностной схеме Лакса — Вендрофа [13–16], имеющей 2-й порядок точности во внутренних узлах сетки:

$$\frac{W_{i+1/2}^{n+1/2} - W_{i+1/2}^n}{\tau^n/2} + A(W_{i+1/2}^n) \frac{\partial W_{i+1/2}^n}{\partial x} = f(W_{i+1/2}^n); \quad (3.1)$$

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\tau^n} + A(W_i^{n+1/2}) \frac{\partial W_i^{n+1/2}}{\partial x} = f(W_i^{n+1/2}). \quad (3.2)$$

Сетка по  $x$  берется равномерной с числом узлов  $N$ , сетка по времени  $t$  насчитывается по формуле  $t^{n+1} = t^n + \tau^n$ , значение  $\tau^n$  определяется из условия устойчивости  $\tau^n x/h \leq \sigma < 1$ ,  $\sigma = \text{const}$ , где  $x = \max(|W_i^{n+1}| + C_i^{n+1})$ . В отличие от традиционной разностной схемы, величины  $W_{i+1/2}^n$ ,  $\partial W_{i+1/2}^n/\partial x$  в (3.1) и  $W_i^{n+1/2}$ ,  $\partial W_i^{n+1/2}/\partial x$  в (3.2) вычисляются посредством кубических сплайнов из класса  $C^1$  [17], построенных соответственно на сетках  $\{x_i\}_1^N$  и  $\{x_{i+1/2} = 0,5(x_i + x_{i+1})\}_1^{N-1}$ .

Аппроксимация краевых условий выполнена по псевдогриновскому варианту метода конечных элементов [18], суть которого состоит в следующем. Рассмотрим на левой границе области интегрирования конечный элемент  $D1_1^n = \{x_1 \leq x \leq x_2, t^n \leq t \leq t^{n+1}\}$ .

Преобразованием координат  $\bar{x} = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$ ,  $\bar{t} = (t - t^n)/\tau^n$  переведем его в единичный квадрат  $\bar{D}1_1^n = \{0 \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq \bar{t} \leq 1\}$  (черточки над локальными переменными  $\bar{x}$ ,  $\bar{t}$  в дальнейшем опускаем). В области  $D1_1^n$  решение системы (2.1) согласно [18] может быть представлено в виде

$$U(x, t) = U_2^{n+1}t^2 + U_1^n(1 - x) + U_2^n(x - t^2) + a_1x(1 - x) + a_2(t - t^2) + a_3(xt - t^2). \quad (3.3)$$

$$P(x, t) = P_1^{n+1}t^2 + P_1^n(1 - x - t^2) + P_2^n x + b_1x(1 - x) + b_2(t - t^2) + b_3xt. \quad (3.4)$$

Температура  $T(x, t)$  записывается как  $P(x, t)$  с заменой коэффициентов  $b_j$  на  $c_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , если  $U_1^{n+1} > 0$ , и как  $U(x, t)$  с заменой коэффициентов  $a_j$  на  $c_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , если  $U_1^{n+1} \leq 0$ . Знак  $U_1^{n+1}$  определяется во время решения задачи.

Для нахождения произвольных постоянных  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  потребуем, чтобы решение (3.3), (3.4),  $T(x, t)$  удовлетворяло системе уравнений (2.1) в следующих узлах коллокаций граничного элемента:

$$(0,5; 0,211\ 324\ 85), (0,908\ 248\ 3; 0,788\ 675\ 15), (0,091\ 751\ 7; 0,788\ 675\ 15). \quad (3.5)$$

Получим систему девяти линейных алгебраических уравнений. Правую часть этой системы разложим по величинам  $\bar{F}_1^{n+1}$  и  $T_1^{n+1}$ , решение системы будем искать в виде разложений по этим же величинам:

$$\left. \begin{aligned} a_j &= P_1^{n+1}a_j^1 + T_1^{n+1}a_j^2 + a_j^3, \\ b_j &= P_1^{n+1}b_j^1 + T_1^{n+1}b_j^2 + b_j^3, \\ c_j &= P_1^{n+1}c_j^1 + T_1^{n+1}c_j^2 + c_j^3, \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

В результате решения трех автономных систем для групп коэффициентов  $\{a_j^1, b_j^1, c_j^1\}$ ,  $\{a_j^2, b_j^2, c_j^2\}$ ,  $\{a_j^3, b_j^3, c_j^3\}$ ,  $j = 1, 2, 3$  получим следующие выражения для граничных значений скорости и температуры на левой границе области интегрирования:

— для случая  $\bar{U}_1^{n+1} > 0$

$$U_1^{n+1} = -a_3^1 P_1^{n+1} - a_3^2 T_1^{n+1} + (U_2^{n+1} + U_1^n - U_2^n - a_3^3),$$

величина  $T_1^{n+1}$  известна, она равна температуре газа в объемном узле;

— для случая  $U_1^{n+1} \leq 0$

$$U_1^{n+1} = -a_3^1 P_1^{n+1} + U_2^{n+1} + U_1^n - U_2^n - a_3^3, \quad T_1^{n+1} = -c_3^1 P_1^{n+1} + T_2^{n+1} + T_1^n - T_2^n - c_3^3.$$

Аналогично определяются граничные условия на правой границе области интегрирования. Локальным преобразованием координат конечный элемент  $DN^n = \{x_{N-1} \leq x \leq x_N, t^n \leq t \leq t^{n+1}\}$  переводится в единичный квадрат  $\bar{D}N^n = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ , и решение системы уравнений (2.1) записывается в виде

$$U(x, t) = U_{N-1}^{n+1}t^2 + U_{N-1}^n(1 - x - t^2) + U_N^n x + a_1x(1 - x) + a_2(t - t^2) + a_3xt; \quad (3.7)$$

$$P(x, t) = P_{N-1}^{n+1}t^2 + P_{N-1}^n(1 - x) + P_N^n(x - t^2) + b_1x(1 - x) + b_2(t - t^2) + b_3(xt - t^2). \quad (3.8)$$

Температура  $T(x, t)$  записывается как  $U(x, t)$  с заменой коэффициентов  $a_j$  на  $c_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , если  $U_{N-1}^{n+1} \geq 0$ , и как  $P(x, t)$  с заменой коэффициентов  $b_j$  на  $c_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , если  $U_{N-1}^{n+1} < 0$ . Знак  $U_{N-1}^{n+1}$ , как и для левой границы, определяется во время решения задачи.

Требуя от функций (3.7), (3.8) и  $T(x, t)$  удовлетворения системе уравнений (2.1) в узлах коллокаций (3.5) правого граничного элемента, как и ранее, получим систему девяти линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Представим эти коэффициенты в виде разложений (3.6) с заменой величин  $P_1^{n+1}$ ,  $T_1^{n+1}$  на

величины  $P_N^{n+1}, T_N^{n+1}$ . После решения соответствующих систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_j^l, b_j^l, c_j^l, l, j = 1, 2, 3$  граничные условия на правой границе области интегрирования примут вид:

— для случая  $U_N^{n+1} \geq 0$

$$U_N^{n+1} = a_3^1 P_N^{n+1} + U_{N-1}^{n+1} - U_{N-1}^n + U_N^n + a_3^3, \quad T_N^{n+1} = c_3^1 P_N^{n+1} + T_{N-1}^{n+1} - T_{N-1}^n + T_N^n + c_3^3;$$

— для случая  $U_N^{n+1} \leq 0$

$$U_N^{n+1} = a_3^1 P_N^{n+1} + a_3^2 T_N^{n+1} + U_{N-1}^{n+1} - U_{N-1}^n + U_N^n + a_3^3$$

(величина  $T_N^{n+1}$  известна, она равна температуре газа в цилиндре).

Для решения задачи в целом необходимо также учесть условия сохранения массы и энергии в объемном узле.

4. Введем следующие обозначения:  $(U_0, P_0, T_0, \rho_0), (U_1^k, P_1^k, T_1^k, \rho_1^k), (U_N^k, P_N^k, T_N^k, \rho_N^k)$  — скорость, давление, температура и плотность газа соответственно на входе впускной системы и на концах  $k$ -го канала ( $k = 1, 2, 3, 4$ );  $P, T, \rho$  — давление, температура и плотность газа в объемном узле;  $F_k, T_k$  — давление и температура газа в  $k$ -м цилиндре;  $F_0, F_1^k, F_N^k$  — площадь поперечного сечения на входе впускной системы и на концах  $k$ -го канала;  $\Pi_1^k, \Pi_N^k$  — периметр поперечного сечения на концах  $k$ -го канала;  $G_0 = \rho_0 U_0 F_0, G_1^k = \rho_1^k U_1^k F_1^k, G_N^k = \rho_N^k U_N^k F_N^k$  — массовый расход на входе впускной системы и на концах  $k$ -го канала;  $C_0$  — коэффициент сопротивления дроссельной заслонки;  $C_\alpha, C_\beta^k, C_\gamma^k$  — коэффициенты местного сопротивления входа дроссельная заслонка — объемный узел, перехода объемный узел — начало  $k$ -го канала и перехода через клапан  $k$ -го канала.

Уравнения сохранения массы и энергии в объемном узле имеют вид

$$\frac{V}{R} \frac{d}{dt} \left( \frac{P}{T} \right) = \rho_0 U_0 F_0 - \sum_k \rho_1^k U_1^k F_1^k; \quad (4.1)$$

$$\frac{V}{\gamma - 1} \frac{dP}{dt} = \left( C_p T_0 + \frac{U^2}{2} \right) \rho_0 U_0 F_0 - \sum_k \left( C_p T_1^k + \frac{(U_1^k)^2}{2} \right) \rho_1^k U_1^k F_1^k. \quad (4.2)$$

К ним следует добавить условия перепада давления в газе при входе в систему [19]

$$P_0 - P = a_0 |U_0| U_0 + b_0 U_0; \quad (4.3)$$

условия перепада давления на переходах объемный узел — вход в  $k$ -й канал

$$P - P_1^k = a_1^k |U_1^k| U_1^k + b_1^k U_1^k, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.4)$$

и на переходах  $k$ -й канал —  $k$ -й цилиндр

$$P_N^k - P_k = a_N^k |U_N^k| U_N^k + b_N^k U_N^k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.5)$$

Для температуры и скорости на концах каналов имеем уравнения

$$T_1^k = \beta_1^k T + (1 - \beta_1^k) T_1^{n+1,k}, \quad U_1^k = U_1^{n+1,k}, \quad \beta_1^k = \begin{cases} 1, & \text{если } U_1^k \geq 0, \\ 0, & \text{если } U_1^k \leq 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (4.6)$$

$$T_N^k = \beta_N^k \left( T_k - \frac{(U_N^k)^2}{2C_p} \right) + (1 - \beta_N^k) T_N^{n+1,k}, \quad U_N^k = U_N^{n+1,k}, \quad (4.7)$$

$$\beta_N^k = \begin{cases} 1, & \text{если } U_N^k > 0, \\ 0, & \text{если } U_N^k \leq 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Входящие в эти соотношения коэффициенты определяются следующим образом [19]:

$$a_0 = (C_0 + C_\alpha)\rho/2, \quad a_1^k = C_\beta^k \rho_1^k/2, \quad a_N^k = C_\gamma^k \rho_N^k/2,$$

$$b_0 = \sqrt{\frac{\pi}{F}} \frac{\mu(T_0)}{4}, \quad b_1^k = \frac{\Pi_1^k \mu(T_1^k)}{8F_1^k}, \quad b_N^k = \frac{\Pi_N^k \mu(T_N^k)}{\delta F_N^k}.$$

Величины  $P_0, T_0, P_k, T_k$  в соотношениях (4.1)–(4.7) известны. Неизвестными являются величины  $U_0, P, T, U_1^k, P_1^k, T_1^k, U_N^k, P_N^k, T_N^k, k = 1, 2, 3, 4$ . Используя равенства (4.3) и (4.4), исключим пять неизвестных  $U_0$  и  $U_1^k$ :

$$\sigma_0 = \sqrt{b_0 + 4a_0|P_0 - P|}, \quad U_0 = 2(P_0 - P)/(\sigma_0 + b_0),$$

$$\sigma_1^k = \sqrt{(b_1^k)^2 + 4a_1^k|P - P_1^k|}, \quad U_1^k = 2(P - P_1^k)/(\sigma_1^k + b_1^k), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Оставшиеся двадцать две неизвестные находим по методу Ньютона из уравнений (4.1), (4.2), равенств (4.6) и соотношений

$$\frac{2(P - P_1^k)}{\sigma_1^k + b_1^k} = U_1^{n+1,k}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

При этом уравнения (4.1), (4.2) заменяются разностными аналогами. Плотность, фигурирующая в них, выражается через давление и температуру согласно уравнению состояния (2.2).

В качестве теста было рассчитано нестационарное изэнтропическое течение в канале постоянного сечения при отсутствии трения и теплообмена (волна разрежения Римана). Расчеты проводились для следующих исходных данных:  $L = 1$  м,  $D = 0,05$  м,  $R = 287,18$  м<sup>2</sup>/(с<sup>2</sup> · град),  $\gamma = 1,369$ ,  $U_0 = 1$  м/с,  $T_0 = 1273$  К,  $P_0 = 3,655\,801\,4 \cdot 10^5$  Па,  $C_0 = 707,445\,5$  м/с,  $t_0 = -5,133\,89 \cdot 10^{-3}$  с,  $0 \leq t \leq 1,923\,815\,9 \cdot 10^{-3}$  с.

Результаты расчетов на равномерной сетке приведены в таблице, в которой через  $\Delta U, \Delta P, \Delta T$  обозначены разности между расчетными и точными значениями скорости, давления и температуры.

Диапазон	$ \Delta U/U _{\max}$	$ \Delta P/P _{\max}$	$ \Delta T/T _{\max}$
$0 \leq x \leq 0,25$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$
$0,25 < x \leq 0,5$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-5}$
$0,5 < x \leq 0,75$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-5}$
$0,75 < x \leq 1$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$

5. Расчеты по изложенному алгоритму проведены для впускной системы двигателя УЗАМ 3417. Численные характеристики системы следующие: объем объемного узла  $V = 5,429\,4 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>, длины каналов  $l_1 = l_4 = 0,193$  м,  $l_2 = l_3 = 0,106$  м, диаметры каналов  $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0,034$  м, диаметр дроссельной заслонки  $D_2 = 0,040\,5$  м, число оборотов  $n_1 = 845$  об/мин и  $n_2 = 2\,667$  об/мин. Зависимость коэффициента сопротивления заслонки  $C_\alpha$  от угла ее поворота, а также зависимости коэффициентов сопротивления переходов канал — цилиндр  $C_\gamma$  и давления в цилиндрах от угла поворота коленчатого вала задавались таблично. Данные таблиц получены экспериментально на стенде ИТПМ СО РАН группой В. К. Баева, В. В. Шумского. Расчет выполнялся на интервале по времени до пяти рабочих циклов двигателя. При счете с числом Куранта 0,7 и при числе узлов по каналам соответственно 21 и 41 потребовалось около 30 тыс. шагов по времени. В качестве

начального состояния газа взято предварительно рассчитанное стационарное состояние, соответствующее полностью открытому клапану первого цилиндра при закрытых остальных клапанах. Результаты расчетов расходов газа через каждый цилиндр (клапан) и суммарного расхода газа через систему совпали с экспериментально найденными в пределах 7%. Особенно хорошее совпадение наблюдается в середине рабочего цикла.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- Течение во впускной системе ДВС существенно нестационарное и не может быть описано в квазистационарной постановке.

- В каналах впускной системы реализуются различные волновые режимы течения (волны разрежения, сжатия, акустические волны и т. д.), которые могут взаимодействовать между собой.

- Открытие впускных клапанов порождает значительный выброс остаточных газов в каналы и объемный узел впускной системы ДВС.

- Закрытие впускных клапанов порождает волны большой амплитуды в каналах и объемном узле впускной системы ДВС, выяснение причин этого явления требует дальнейших исследований.

- Несмотря на сложный волновой характер течения, предложенная численная модель впускной системы позволяет рассчитать основные ее характеристики с достаточной степенью точности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Двигатели** внутреннего сгорания: Теория поршневых и комбинированных двигателей / Под ред. А. С. Орлина, М. Г. Круглова. М.: Машиностроение, 1983.
2. **Итоги** науки и техники. Сер. Двигатели внутреннего сгорания. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 4.
3. **Onoretti A.** Simulazione dei fenomeni gasdinamisi nei sistemi ai aspirazione e scarico dei motori a combustione interna // *La Rivista dei Combustibili*. 1992. V. 46. P. 211-234.
4. **Bervente C., Ivan C., Zancu C., Marinescu G.** A model for calculating the aspiration for an internal combustion engine // *Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mech. Appl.* 1993. V. 38, N 2. P. 153-167.
5. **Horst N., Henrik B., Gerhard M., Johanes S., Jorg L.** Dynamische simulation von ventiltrieben mit hidraulischen spielausgleich // *Motortech. Z.* 1994. V. 55, N 3. S. 148-150; 155-159.
6. **Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.** Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск: Наука, 1981.
7. **Яушев И. К.** Распад произвольного разрыва в разветвленных каналах // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ, ИТПМ. 1972. Т. 1, № 3. С. 92-107.
8. **Яушев И. К.** Численный расчет и приближенное описание задачи распада разрыва в разветвленных каналах. *Аэромеханика: Сб. статей.* М.: Наука, 1976. С. 282-288.
9. **Павлов С. В.** Расчет нестационарных газодинамических течений в сложных системах каналов с местными сопротивлениями и разветвлениями на основе модульного принципа // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ, ИТПМ. 1984. Т. 12, № 5. С. 85-97.
10. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
11. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963.
12. **Чиркин В. С.** Теплофизические свойства материалов. М.: Физматгиз, 1959.



13. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
14. **Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.** Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
15. **Рихтмаер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
16. **Федоренко Р. П.** Введение в вычислительную физику. М.: Наука, 1994.
17. **Колобов Б. П., Колобов П. П.** Вариационный способ построения кубических сплайнов из  $C^1$  для описания пространственных кривых и поверхностей // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд.-ние. ВЦ, ИТПМ. 1992. Т. 6, № 4.
18. **Колобов Б. П.** Новый псевдогриновский вариант методов конечных элементов высоких порядков точности. Новосибирск, 1984 (Препр. / АН СССР. Сиб. отд.-ние. ИТПМ; № 29-84).
19. **Идельчик И. Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975.

*Поступила в редакцию 28/1 1997 г.*

---