

основе более простых моделей, не учитывающих неоднородности распределения температуры и концентрации в пульсирующем пузырьке, что соответствует проведенным выше упрощениям общей формулы (4.2). Однако возможны ситуации, когда неучет этих факторов и использование упрощенных моделей могут привести к значительным ошибкам.

Автор благодарит Р. И. Нигматулину за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1984.— Т. 2.
2. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
3. Нагиев Ф. Б., Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях парогазовых пузырьков // Акуст. журн.— 1979.— Т. 25, № 2.
4. Fanelli M., Prosperetti A., Reali M. Radial oscillations of gas-vapor bubbles in liquids. Part 1: Mathematical formulation // *Acustica*.— 1981.— V. 47.— P. 253.
5. Fanelli M., Prosperetti A., Reali M. Radial oscillations of gas-vapor bubbles in liquids. Part 2: Numerical examples // *Acustica*.— 1981.— V. 49.— P. 98.
6. Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков // Акуст. журн.— 1975.— Т. 21, № 5.
7. Хабеев Н. С., Шаганов В. Ш. Колебания парогазового пузырька в акустическом поле // Изв. АН СССР. МЖТ.— 1986.— № 3.
8. Devin C. Yr. Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water // *J. Acoust. Soc. Amer.*— 1959.— V. 31, N 12.
9. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости // Изв. АН СССР. МЖТ.— 1980.— № 6.
10. Nigmatulin R. I., Khabeev N. S., Nagiev F. B. Dynamics, heat and mass transfer of vapor-gas bubbles in a liquid // *Intern. J. Heat Mass Transfer*.— 1981.— V. 24, N 6.
11. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей.— М.: Наука, 1972.
12. Morioka M. Measurement of natural frequency and damping constant of single steam bubble oscillating in water // *J. Nucl. Sci. Techn.*— 1983.— V. 20, N 10.
13. Hsu Y. Y., Watts R. G. Behavior of a vapor bubble in a pulsating pressure field // *Proc. 4th Intern. Conf. Heat Transfer, Paris — Versailles, 1970.*— V. 5.— Ser. B 2.4.

Поступила 2/IX 1986 г.

УДК 532.516

ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. М. Петин

(Новосибирск)

До настоящего времени не найдены методы решения уравнений Навье — Стокса в их общем виде, что необходимо не только для исследований таких частных случаев, как течения со средними значениями чисел Рейнольдса, но и для получения общих закономерностей в теории вязких течений.

Не существует принципиальных ограничений на возможность итерационного распространения решений, полученных для ползущих течений на область более высоких чисел Рейнольдса. Однако до сих пор эта возможность не реализована, хотя такая попытка делалась для всех видов ползущих течений, для которых получены решения. Причина такой неудачи вызвана не столько сложностью и трудоемкостью вычислений последующих приближений, сколько тем, что большинство решений, полученных для ползущих течений, не являются равнопригодными во всей области обтекания.

Действительно, сравнительная оценка на основе решения Стокса полностью отброшенных инерционных членов уравнений Навье — Стокса показывает, что инерционные члены в $Re\ r$ раз больше вязких, а значит, линеаризация Стокса правомочна и решение Стокса верно только для области, когда $Re\ r < 1$, т. е. для течений вблизи поверхности сферы [1]. Для течения вдали от поверхности ($r \rightarrow \infty$) произведение $Re\ r$ может стать сколь угодно большим, несмотря на любую малость Re , в этой области инерционные члены больше вязких и, следовательно, линеаризованные путем полного отбрасывания членов уравнения Навье — Стокса неприменимы для описания течений вдали от сферы. Факт удовлетворения граничных условий на бесконечности в решении Стокса вызван благоприятными особенностями, присущими задаче об обтекании сферы. Это подтверждается тем, что для цилиндра получить решение Стокса, удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности, уже не представляется воз-

возможным, как оказалось невозможным получить второе и последующие приближения для задачи об обтекании сферы — парадокс Уайтхеда [2].

Озеен улучшил линеаризацию Стокса путем частичного сохранения инерционных членов. Им получено решение, не имеющее явных ограничений по Re , однако верное только вдали от сферы, не удовлетворяющее без дополнительного условия $Re \rightarrow 0$ граничным условиям на поверхности, вследствие того что для линеаризации уравнений Навье — Стокса использовалось распределение скоростей в потенциальном течении.

Праудмен и Пирсон [3] пытались получить равнопригодное решение, сращивая решения Стокса и Озеена в промежуточной области. У этого метода появилось много последователей, но найти решение, верное выше $Re \sim 5$, не удалось. Причина здесь очевидна: аналитические выражения, полученные в приближениях Стокса и Озеена, верны каждое в своей области и не являются правильными в области сращивания, а математического метода, определяющего правомерность проникновения каждого из решений в область сращивания и устраняющего возникающую при этом погрешность, не было.

В данной работе делается попытка разработать метод получения равнопригодных решений из полных уравнений Навье — Стокса для малых значений Re на примере задачи об обтекании сферы вязкой жидкостью.

Полные уравнения Навье — Стокса записываются для функции тока в переменных $r, \mu = \cos \theta$ (продольная координата μ отсчитывается от кормовой точки) в виде

$$(1) \quad DD\psi = Re \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{2}{r^2} \frac{\mu}{1-\mu^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) D\psi$$

$$\left(D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}, \quad Re = \frac{U_\infty r}{\nu} \right);$$

граничные условия

$$(2) \quad \psi(1, -1 \leq \mu \leq 1) = \frac{\partial \psi(1, -1 \leq \mu \leq 1)}{\partial r};$$

$$(3) \quad D\psi \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow \frac{1}{2} r^2 (1 - \mu^2) \quad \text{при } r \rightarrow \infty;$$

условие осесимметричности

$$(4) \quad \psi = D\psi = 0 \quad \text{при } \mu = \pm 1.$$

Линеаризацию уравнения (1) осуществляем по схеме

$$(5) \quad DD\psi = Re \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_i}{\partial \mu} + \frac{2}{r^2} \frac{\mu}{1-\mu^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right) D\psi.$$

В качестве линеаризующей функции ψ_i используем известное решение Стокса для сферы

$$(6) \quad \psi_i = \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) (1 - \mu^2).$$

Подставляя (6) в (5), получаем уравнение

$$(7) \quad DD\psi = Re \left[\left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \right) \mu \frac{\partial (D\psi)}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^4} \right) \times \right.$$

$$\left. \times (1 - \mu^2) \frac{\partial (D\psi)}{\partial \mu} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) \mu D\psi \right];$$

хорошо отвечающее физическим представлениям о картине обтекания сферы. Так, при $r \rightarrow \infty$ (7) преобразуется в известное линеаризованное уравнение Озеена, верное для любых Re вдали от сферы:

$$(8) \quad DD\psi = Re \left[\frac{\partial (D\psi)}{\partial r} \mu + \frac{1}{r} \frac{\partial (D\psi)}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \right],$$

а при малых значениях Re вблизи от поверхности сферы (7) преобразуется в приближение Стокса

$$(9) \quad DD\psi = 0.$$

Хотя уравнение (7) и линейно, сложность его конвективной части не позволяет отыскать точное решение. Для получения приближенного найдем вначале решение однородной части (7), т. е. решение уравнения (9), которое ищем в виде

$$(10) \quad D\psi = R(r)\theta(\mu).$$

Имеем

$$(11) \quad \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{(1-\mu^2)}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \mu^2} = 0.$$

Решение (11) записывается следующим образом:

$$(12) \quad D\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{1}{r^n} + B_n r^{n+1} \right) \left[C_n \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} + M_n \frac{dQ_n(\mu)}{d\mu} \right] (\mu^2 - 1)$$

($P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$ — полиномы Лежандра первого и второго рода). Из граничного условия (3) вытекает, что $B_n = 0$, а из (4) $M_n = 0$, так как $\frac{dQ_n(\mu)}{d\mu} (\mu^2 - 1) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +1$. В итоге (12) преобразуется в уравнение

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{r^n} \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} (\mu^2 - 1),$$

решение которого не представляет трудностей, и выражение для функции тока записывается как

$$(14) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2(2n-1)} A_n r^{2-n} + B_n \frac{1}{r^n} + C_n r^{n+1} \right] (1-\mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}.$$

Формула (14) есть решение уравнений Навье — Стокса (1) в приближении Стокса и при граничных условиях (2) и (3) дает известное решение Стокса для сферы (6). Вид выражения (14) подсказывает путь получения приближенного решения уравнения (7) в целом.

Предположим, что удалось так преобразовать (7), что в правой части его исчезли производные от завихренности по продольной координате. Тогда можно было бы компоновать преобразованную инерционную часть (7) на каждом итерационном шаге к виду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) (1-\mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}$, аналогичному формуле (14), и получить таким образом решение (7) из решения нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для осуществления указанного преобразования записываем

$$(15) \quad D\psi = \varphi(r, \mu) \exp [T(r, \mu)].$$

Тогда (7) преобразуется:

$$(16) \quad D\varphi = \left[\operatorname{Re} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) \mu - 2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left[\operatorname{Re} \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^4} \right) (1-\mu^2) - 2 \frac{(1-\mu^2)}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \mu} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \left[\operatorname{Re} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) \mu \frac{\partial T}{\partial r} + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^4} \right) (1-\mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} + \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) \mu - \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 - \frac{(1-\mu^2)}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \mu^2} - \frac{(1-\mu^2)}{r^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \mu} \right)^2 \right] \varphi.$$

Из требования исчезновения частных производных по продольной координате от завихренности следует необходимость равенства нулю скобки во втором слагаемом конвективной части уравнения (16). Это по-

зволяет определить функцию $T(r, \mu)$:

$$(17) \quad 2 \frac{1-\mu^2}{r^2} \frac{dT}{d\mu} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^4} \right) (1-\mu^2);$$

$$(18) \quad T(r, \mu) = \frac{\operatorname{Re}}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) (\mu + C).$$

Учитывая, что μ изменяется в интервале от $+1$ до -1 , и исходя из граничного условия (3) для завихренности, нетрудно найти, что $C = -1$, тогда

$$(19) \quad T(r, \mu) = \frac{\operatorname{Re}}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) (\mu - 1).$$

Подставляя (19) в (16) и пренебрегая в условии малости Re членами с множителями Re^n при $n > 1$, получаем уравнение для определения завихренности

$$(20) \quad D\varphi = \left[\operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \right) - \frac{3}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{r} \mu \right] \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \\ + \left[\frac{3}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^4} \right) \mu - \frac{3}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{r^4} \right] \varphi,$$

которое решается приближенно итерационным методом.

Первое приближение имеем при $\operatorname{Re} \rightarrow 0$:

$$(21) \quad \varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(M_n r^{n+1} + K_n \frac{1}{r^n} \right) (1-\mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}.$$

Поскольку существует решение (6), верное для $\operatorname{Re} \rightarrow 0$ вблизи сферы, граничное условие на поверхности для завихренности в выражении (21) определяется из него, а граничное условие на бесконечности — из (3) и (15) (также при $\operatorname{Re} \rightarrow 0$). В итоге граничные условия записываются в виде

$$(22) \quad \varphi_1 = (3/2)(1-\mu^2) \text{ при } r = 1;$$

$$(23) \quad \varphi_1 \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

и на основе решения (21)

$$(24) \quad \varphi_1 = \frac{3}{2} \frac{1}{r} (1-\mu^2).$$

Из (24) и (20) следует уравнение для определения завихренности во втором приближении:

$$(25) \quad D\varphi_2 = -\frac{3}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{5}{4} \frac{1}{r^5} \right) (1-\mu^2) + \frac{9}{4} \operatorname{Re} \left(\frac{2}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \right) \mu (1-\mu^2).$$

Так как решение однородного уравнения есть (12), а множители $(1-\mu^2)$ и $\mu(1-\mu^2)$ — это функция $(1-\mu^2)dP_n(\mu)/d\mu$ при $n = 1$ и 2 , нетрудно найти общее решение уравнения (25) во втором приближении, что с учетом (15) дает

$$(26) \quad D\varphi = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n r^{n+1} + D_n \frac{1}{r^n} \right) (1-\mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} + \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{1}{r^3} \right) \times \right. \\ \left. \times (1-\mu^2) - \frac{9}{8} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{6} \frac{1}{r^3} \right) \mu (1-\mu^2) \right] \exp \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re}}{2} (\mu - 1).$$

Этот метод обладает достаточно быстрой сходимостью, что можно проиллюстрировать, сравнивая точное решение Озеена для завихренности с полученным по предлагаемому методу. Формула Озеена для функции тока

$$(27) \quad \psi = \frac{1}{4} \left(2r^2 + \frac{1}{r} \right) (1-\mu^2) + \frac{3}{2} \frac{1}{\operatorname{Re}} (1+\mu) \left[1 - \exp \frac{\operatorname{Re}}{2} r (\mu - 1) \right],$$

а для завихренности

$$(28) \quad D\psi = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{r} + \frac{3}{4} \operatorname{Re} \right) (1 - \mu^2) \exp \frac{\operatorname{Re}}{2} r (\mu - 1).$$

Решая уравнения Навье — Стокса для завихренности в приближении Озеена (8) предлагаемым методом, получаем аналогично (15) и (19), что решение уравнения (8) необходимо искать в виде

$$(29) \quad D\psi = \varphi(r, \mu) \exp \frac{\operatorname{Re}}{2} r (\mu - 1).$$

Подставляя (29) в (8), имеем

$$(30) \quad D\varphi = \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Решая (30) при граничных условиях (22) и (23), находим в первом приближении $\varphi_1 = \frac{3}{2} \frac{1}{r} (1 - \mu^2)$, во втором $\varphi_2 = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{r} + \frac{3}{4} \operatorname{Re} \right) (1 - \mu^2)$.

Завихренность во втором приближении выражается формулой $D\psi_2 = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{r} + \frac{3}{4} \operatorname{Re} \right) (1 - \mu^2) \exp \frac{\operatorname{Re}}{2} r (\mu - 1)$, которая полностью совпадает с точным решением Озеена (28). Третье и последующие приближения такие же, как и второе: $D\psi_2 = D\psi_3 = D\psi_n = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{r} + \frac{3}{4} \operatorname{Re} \right) (1 - \mu^2) \exp \frac{\operatorname{Re}}{2} r (\mu - 1)$, т. е. предложенный приближенный метод уже во втором приближении дает решение, сходящееся к точному и не изменяющееся в последующих итерациях.

Возвращаясь к уравнению (26), определяем, что его приближенное решение можно найти, предварительно преобразовав его посредством соотношения $\psi = F(r, \mu) \exp \left[\frac{\operatorname{Re}}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) (\mu - 1) \right]$. Имеем

$$(31) \quad DF = - \operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \right) (\mu - 1) \frac{\partial F}{\partial r} - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^4} \right) \times \\ \times (1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} + \frac{3}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{r^4} (\mu - 1) F + \operatorname{Re} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{16} \frac{1}{r^3} \right) (1 - \mu^2) - \\ - \operatorname{Re} \left(\frac{9}{8} \frac{1}{r} + \frac{3}{16} \frac{1}{r^3} \right) \mu (1 - \mu^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n r^{n+1} + D_n \frac{1}{r^n} \right) (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}.$$

Первое приближение для функции тока, полученное при решении уравнения (31), когда $\operatorname{Re} \rightarrow 0$, записывается как

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(M_n r^{n+1} + N_n \frac{1}{r^n} \right) + \left(A_n r^{n+3} + B_n r^{n+1} + C_n r^{2-n} + D_n \frac{1}{r^n} \right) \right] \times \\ \times \exp \frac{\operatorname{Re}}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) (\mu - 1) (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}.$$

Из граничных условий на бесконечности (3), отмечая, что они не зависят от Re , а также из условия перехода течения в потенциальное вдали от сферы, учитывая, что $\exp \frac{\operatorname{Re}}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) (\mu - 1) = 1$ при $\mu = 1$, находим постоянные интегрирования.

В первом приближении

$$(32) \quad \psi_1 = \left(\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{r} \right) (1 - \mu^2) - \left[\frac{3}{4} r + \frac{9}{32} \left(r - \frac{1}{r} \right) \left(1 - \frac{\mu}{r} \right) \right] \times \\ \times (1 - \mu^2) \exp \frac{\operatorname{Re}}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) (\mu - 1).$$

Второе приближение находим, подставляя (32) в первую часть (31) и решая полученное уравнение при однородных граничных условиях. Суммируя второе приближение с (32) по методу [4], получаем итоговое выражение для функции тока в переменных r, θ :

$$(33) \quad \psi = \left(\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta - \left[\frac{3}{4} r + \frac{3}{16} \operatorname{Re} \left(r^2 - \frac{1}{r} \right) - \frac{3}{16} \operatorname{Re} \left(r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \right] \sin^2 \theta \exp \frac{\operatorname{Re}}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) (\cos \theta - 1).$$

Третье и последующие приближения при сохранении членов только с Re^1 не отличаются от выражения (33), т. е. и решение для функции тока обладает быстрой сходимостью. Анализ формулы (33) показывает, что она равнопригодна для всей области обтекания.

Вблизи поверхности ($r \rightarrow 1$) (33) преобразуется в формулу Стокса (6), причем не имеет ограничений по Re при выполнении условия $\operatorname{Re} r < 1$, которое, как известно, является определяющим и границы применимости решения Стокса. Вдали от поверхности расчеты по формуле (33) хорошо совпадают с результатами Озеена (27). Результаты, иллюстрирующие равнопригодность решения (33) для всей области обтекания, представлены в таблице.

Положение точки отрыва потока определяется из известного условия $\partial V_\theta / \partial r = 0$ ($r = 1$), что приводит к выражению

$$(34) \quad \cos \theta = (8 + 9 \operatorname{Re} - 2 \sqrt{9 \operatorname{Re} - 56}) / 9 \operatorname{Re},$$

графическое изображение которого (сплошная линия) и сопоставление с численными данными [5] (штриховая) и экспериментальными [6] (точки) представлены на рис. 1.

Из (34) для $\theta = 0$ записывается уравнение, определяющее появление вихря за сферой, $4 = \sqrt{9 \operatorname{Re} - 56}$, откуда видно, что впервые вихрь появляется в поле течения при $\operatorname{Re} = 8$, что хорошо согласуется с $\operatorname{Re} = 8,5$ [5].

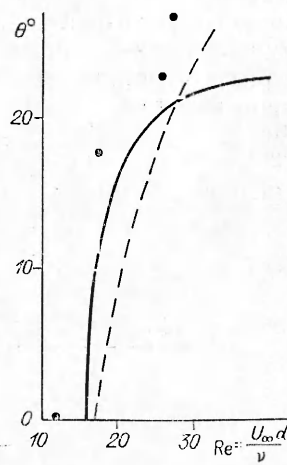
На рис. 2, а, б показаны линии тока около сферы для $\operatorname{Re} = U_\infty d / \nu = 5$ и 20 соответственно (сплошные линии — результаты [5], штриховые — расчет по формуле (33)).

Удовлетворительное совпадение имеет место, по крайней мере, до $\operatorname{Re} = 20$, причем результаты наиболее близки в кормовой и лобовой областях, а наибольшее расхождение в экваториальной области.

На рис. 3 изображено положение стационарного вихря за сферой при $\operatorname{Re} = U_\infty d / \nu = 37,7$ и 26,8 (линии 1, 2), для сравнения нанесены экспериментальные точки с фотографий [6]. Видно, что выражение (33) удовлетворительно описывает течение в отрывной области вплоть до $\operatorname{Re} = U_\infty d / \nu \sim 30-40$.

Интересно проанализировать зависимость протяженности стационарного вихря от Re . Положение нижнего по потоку конца вихря определяется при $\theta = 0$. При этом $\exp \frac{\operatorname{Re}}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) = 0$.

Re	r	$\psi(\theta=60^\circ)$		
		Решение Стокса (6)	Решение (33)	Решение Озеена (27)
0,1	1,1	$5,454 \cdot 10^{-3}$	$5,531 \cdot 10^{-3}$	1,235
1,0	1,05	$1,384 \cdot 10^{-3}$	$1,658 \cdot 10^{-3}$	1,111
5,0	1,02	$5,606 \cdot 10^{-5}$	$1,881 \cdot 10^{-4}$	0,891
0,1	50	909,4	924,2	953,6
1,0	20	138,8	149,7	152,2
5,0	10	31,89	37,52	37,96
10,0	10	31,89	37,52	37,52



Р и с. 1



Р и с. 2

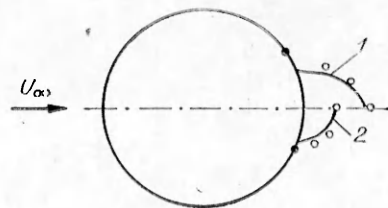
$-\frac{1}{4} \frac{1}{r^2}) (\mu - 1) = 1$ и уравнение (33) преобразуется в выражение $\psi = (r - 1)^2 (1 - \mu^3) \left[\frac{1}{4} \left(2 + \frac{1}{r} \right) \frac{3}{32} \text{Re} \frac{1}{r^2} \right]$, которое обращается в нуль не только на поверхности сферы и вдоль оси симметрии, но и в случае равенства нулю квадратной скобки, что дает

$$(35) \quad \text{Re} = \frac{8}{3} (2r^2 + r).$$

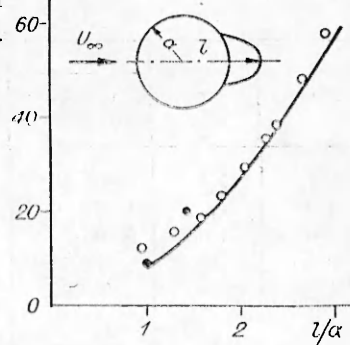
Полученное выражение позволяет определить протяженность вихря при различных значениях Re . На рис. 4 сравнивается решение (35) с экспериментальными данными [6] (светлые точки) и численными результатами [5] (темные). Хорошее совпадение сохраняется вплоть до $\text{Re} = U_\infty d / \nu \sim \sim 100-120$, что близко к предельному значению, при котором еще имеет место установившееся течение.

Из рис. 1, определяющего положение точки потока, из рис. 2 и таблицы, где сравниваются непосредственно численные значения функции тока, следует, что решение (33) применимо вплоть до $\text{Re} \sim 25-30$. Приблизительно такой же вывод напрашивается из анализа положения стационарного вихря за сферой (рис. 3). И хотя анализ протяженности вихревой зоны (рис. 4) определяет область применимости до $\text{Re} \sim 100-120$, все-таки не вызывает сомнения, что область применимости решения (33) не превышает $\text{Re} \sim 20-25$, причем нужно учесть, что для описания течений вдали от сферы полученное решение не имеет ограничений по Re , что подтверждается результатами таблицы.

В заключение проведем краткий анализ решения (33) с целью определения возможности его дальнейшего улучшения и расширения диапазона его применимости. Второе слагаемое в (33) вместе с экспоненциальным множителем определяет все вязкостное возмущение, которое вносит в набегающий поток тело, обтекаемое вязкой жидкостью, так сказать, «стокселем» данного решения. Очевидно, что влияние этого вязкостного слагаемого на решение в основном определяется экспоненциальным множителем. Вязкостный член в (33) исчезает и происходит переход к безвихревому течению, когда экспоненциальный множитель стремится к нулю, а так как показатель экспоненты всегда отрицателен, это произойдет, если $\text{Re} = \frac{U_\infty \alpha}{\nu}$ произведение в показателе экспоненты $\frac{\text{Re}}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \right) (\cos \theta - 1)$ будет достаточно большим, для чего необходимо,



Р и с. 3



Р и с. 4

чтобы при $Re \rightarrow 0$ $r \rightarrow \infty$, а следовательно, при ползущем течении возмущение распространится на большое расстояние от обтекаемого тела, т. е. математически подтверждается хорошо известный факт в теории вязких течений.

При $Re \gg 1$ течение быстро переходит в потенциальное везде, кроме области вблизи поверхности, так как при $r \rightarrow 1$ один из множителей в показателе экспоненты $\left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2}\right)$ стремится к нулю. В результате, как бы велико не было значение Re , всегда найдется такая окрестность вблизи поверхности, где показатель экспоненты $\frac{Re}{2} \left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2}\right) \times (\cos \theta - 1)$ будет мал, и в этой области сосредоточится все вязкостное возмущение, что соответствует физической модели течения в теории пограничного слоя.

На основе анализа можно сделать вывод, что рассмотренный метод принципиально позволяет получить приближенные решения полных уравнений Навье — Стокса для достаточно большого диапазона течений, распространяя полученное равнопригодное решение на область более высоких Re методом последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.
2. Whitehead A. N. Second approximations to viscous fluid motion // Quart. J. Math.— 1889.— V. 23.— P. 143.
3. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder // J. Fluid Mech.— 1957.— V. 2.— P. 237.
4. Швец М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // ПММ.— 1949.— Т. 13, вып. 3.
5. Jenson V. G. Viscous flow round a sphere at low Reynolds numbers ($Re \sim 40$) // Proc. Roy. Soc. Ser. A.— 1959.— N 249.— P. 346.
6. Taneda S. Studies on wake vortices. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers // Rep./Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ.— 1956.— N 4.— P. 99.

Поступила 4/VII 1986 г.

УДК 532.65; 532.543

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ РУЧЕЙКА ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УСКОРЕНИЯ

А. Ф. Тальдрик, О. П. Черняев
(Москва)

Рассматривается зависимость решения для стационарного течения ручейка вязкой несжимаемой жидкости вдоль твердой плоской стенки от следующих независимых первичных параметров: плотности ρ ($\text{кг}/\text{м}^3$), кинематической вязкости ν ($\text{м}^2/\text{с}$) и поверхностного натяжения σ ($\text{кг}/\text{с}^2$) жидкости, краевого угла смачивания α на границе трех сред, ширины основания ручейка H (м) (или расхода в ручеек Q ($\text{м}^3/\text{с}$)), ускорения поля a ($\text{м}/\text{с}^2$), направленного вдоль стенки. Сделаны следующие предположения: не равна нулю только составляющая скорости v ($\text{м}/\text{с}$), направленная по a .

Поперечное сечение ручейка представляет собой область Γ , ограниченную отрезком длины H со стороны стенки и дугой окружности на свободной поверхности ручейка. Дуга окружности и отрезок пересекаются под углом, равным α . Внешнее давление p_0 постоянно, касательными напряжениями на свободной поверхности со стороны внешней среды пренебрегаем [1, 2].

В области Γ ищем распределение скоростей v , в частности максимальную скорость, расход Q , потоки импульса I и кинетической энергии G