УДК 519.642

Вычисление функции плотности распределения вероятности фаз на основе решения обратной задачи

М.Л. Маслаков[1,2], В.В. Егоров[1,2]

[1]АО "Российский институт мощного радиостроения", 11-я линия В.О., 66, Санкт-Петербург, 199178

[2]Санкт-Петербургский Государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Большая Морская, 67, лит. А, Санкт-Петербург, 190000

E-mails: maslakovml@gmail.com (Маслаков М.Л.), egorovrimr@mail.ru (Егоров В.В.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 16, 2023.

Маслаков М.Л., Егоров В.В. Вычисление функции плотности распределения вероятности фаз на основе решения обратной задачи // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 3. — С. 287–300.

В работе рассматривается задача вычисления плотности распределения вероятности фазы сигнала с фазовой манипуляцией, принимаемого в условиях искажений и аддитивного шума. Данная задача сводится к решению обратной задачи, а именно интегральному уравнению типа свертки. В работе проанализированы функции, входящие в интегральное уравнение. Отдельно рассмотрен важный с практической точки зрения случай равновероятных фаз символов. Представлены результаты численного моделирования.

DOI: 10.15372/SJNM202230305

Ключевые слова: *угловые измерения, фаза, плотность распределения фаз, ряд Фурье, обратная задача, регуляризация.*

Maslakov M.L., Egorov V.V. Estimation of the phase probability density function based on the solve of the inverse problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 3. — P. 287–300.

The article considers the problem of calculating the phase probability density function of a phase-shift keying signal received under conditions of distortion and additive noise. This problem is reduced to an inverse problem, namely, to solving an integral equation of the convolution type. The functions included in the integral equation are analyzed. The case of equiprobable symbols, which is important from a practical point of view, is considered separately. Numerical simulation results are presented.

Keywords: *angle estimation, phase, phase probability distribution function, Fourier series, inverse problem, multiparameter regularization.*

Введение

Задачи статистического анализа угловых измерений встречаются во многих областях науки и техники, например, в статистической радиотехнике, астрономии, медицине, геологии [1–3]. В случае когда измерения представляют собой направления векторов, их рассматривают как точки на единичной окружности. Для анализа таких данных используют круговые или полярные распределения [2, 3], т. е. распределения вероятности случайной величины, значения которой представляют собой углы (фазы), обычно в диапазоне $[-\pi; \pi]$ или $[0; 2\pi]$.

В рамках данной работы авторами рассматривается задача вычисления функции плотности распределения вероятности фаз, возникающая при цифровой обработке сигналов. Отметим, что в данной области существует ряд задач, сводящихся к решению обратных задач и заключающихся в оценке параметров принятых сигналов, импульсной характеристики канала и др. [4–6]. К одной из таких задач можно отнести демодуляцию или детектирование сигнала. При использовании цифровой фазовой манипуляции (ФМ, или PSK — Phase Shift-Keying) [7] возникает задача статистического анализа выборки фаз символов для сигналов, принимаемых из каналов с замираниями и аддитивным шумом. Значения фаз представляют собой оценки начальных фаз комплексных огибающих, соответствующих элементарным символам принимаемого ФМ-сигнала, и рассматриваются как векторы на единичной окружности. В частности, важной задачей является получение оценки отношения сигнал/шум (ОСШ), для чего требуется оценка дисперсии случайной величины (фазы). Кроме того, при анализе вероятностных характеристик символов возникает задача построения выборочной плотности распределения вероятности фаз.

В общем случае для M позиционной ФМ-плотность вероятности фаз определяется следующим выражением:

$$W(\theta) = \sum_{m=0}^{M-1} p_m W_0\left(\theta - m\frac{2\pi}{M}\right), \quad \theta \in [-\pi; \pi]\,, \tag{1}$$

где p_m — вероятность (или частость) символа, соответствующего значению фазы $m\frac{2\pi}{M}$, $m = 0, \ldots, M-1$, $W_0(\theta)$ — центрированная плотность вероятности фаз, т. е. плотность распределения вероятности фаз при отсутствии модуляции.

Часто полагают, что плотность вероятности $W_0(\theta)$ определяется нормальным угловым законом распределения [2, 8] либо распределением Мизеса [2, 3]. Значения вероятностей p_m обычно полагают равными, т. е.

$$p_m = \frac{1}{M}, \quad m = 0, \ldots, M-1. \tag{2}$$

Однако, например, при пакетной передаче данных допущение (2) не всегда верно. Так, в случаях когда длина пакета неизменна, а длительности некоторых из возможных сообщений меньше длины пакета, либо количество таких сообщений переменно в пределах длины каждого пакета, оставшуюся часть передаваемого пакета заполняют нулями. В результате число нулевых символов может быть больше, а соответствующие вероятности p_m, $m = 0, \ldots, M-1$, не равны между собой. Отметим при этом, что в любом случае

$$\sum_{m=0}^{M-1} p_m \equiv 1. \tag{3}$$

Целью данной работы является оценка плотности вероятности $W_0(\theta)$ по выборке фаз символов принятого информационного (неизвестного) ФМ-сигнала. Данная задача сведена к решению обратной задачи.

Статья организована следующим образом. В пункте 1 приведена постановка задачи, которая сведена к интегральному уравнению типа свертки. В п. 2 рассмотрен вопрос оценки функции плотности вероятности $W(\theta)$ по имеющейся выборке. В п. 3 рассмотрена подынтегральная функция, входящая в решаемое интегральное уравнение типа свертки, а само уравнение сведено к матричной форме. В п. 4 рассмотрена проблема деления на ноль, возникающая при решении рассматриваемой обратной задачи в случае равных значений вероятностей символов p_m. Результаты численного эксперимента представлены в п. 5. Выводы по работе сформулированы в п. 6.

1. Постановка задачи

Сигнал с ФМ представляет собой [7]

$$s\left(t\right) = A \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_n\right) p\left(t - nT_{\mathrm{sym}}\right),$$

где N — количество передаваемых символов, A — амплитуда передаваемого сигнала, ω_0 — несущая частота, φ_n — значения фаз передаваемых символов, T_{sym} — длительность символа, $p\left(t\right)$ — импульсная функция вида

$$p\left(t\right) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0; T_{\mathrm{sym}}\right); \\ 0, & t \notin \left[0; T_{\mathrm{sym}}\right). \end{cases}$$

Однако на входе приемника получают сигнал в виде

$$\hat{s}\left(t\right) = s\left(t\right) + \xi\left(t\right),$$

где ξ представляет собой аддитивный шум (в рамках модели, как правило, белый гауссовский шум).

Кроме того, при передаче через радиоканалы сигналы подвергаются различного рода искажениям — замираниям, межсимвольной интерференции (см., например, [9]). В результате оценки фазы коэффициентов комплексной огибающей принимаемого сигнала $\hat{s}\left(t\right)$ в общем случае можно представить в форме

$$\psi_n = \varphi_n + \zeta_n + \psi_s + n\omega_d T_{\mathrm{sym}}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

где φ_n — истинные значения фаз передаваемого символа, ζ_n — ошибка измерения, связанная с аддитивным шумом, ψ_s — постоянное смещение фазы, ω_d — доплеровское смещение частоты, T_{sym} — длительность символа.

В данной работе ограничимся рассмотрением случая, когда постоянное и доплеровское смещения фазы отсутствуют. Тогда вместо (4) имеем неклассифицированную выборку значений фаз вида

$$\psi_n = \varphi_n + \zeta_n, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Как было указано выше, плотность вероятности фаз в этом случае определяется выражением (1). Представим это выражение в иной форме, для чего зададим функцию

$$h(\theta) = \sum_{m=0}^{M-1} p_m \delta\left(\theta - m\frac{2\pi}{M}\right), \tag{6}$$

где $\delta(\theta)$ — дельта-функция.

Тогда (1) можно переписать в виде

$$W(\theta) = h(\theta) * W_0(\theta),$$

где знаком “$*$” — обозначена операция циклической свертки.

Плотность вероятности $W(\theta)$ оценим по выборке (5). При этом, с учетом ограниченности данной выборки, вместо истинной функции $W(\theta)$ имеем эмпирическую плотность

$$\hat{W}(\theta) \approx W(\theta),$$

содержащую определенную погрешность.

Таким образом, для нахождения $W_0(\theta)$ необходимо решить уравнение

$$h(\theta) * W_0(\theta) = \hat{W}(\theta). \tag{7}$$

В результате задача определения плотности вероятности $W_0(\theta)$ свелась к решению интегрального уравнения типа свертки с неточно заданной правой частью, являющегося классической обратной некорректной задачей. При этом свертка является циклической (или круговой) и рассматривается на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Отметим, что функция $h(\theta)$ также неизвестна точно, т. к. значения вероятностей p_m априори неизвестны.

2. Оценка функции $\hat{W}(\theta)$

Задача оценки плотности вероятности $\hat{W}(\theta)$ по имеющейся выборке (5) подробно рассмотрена авторами в работе [10], поэтому здесь кратко приведем лишь основные результаты, полученные в указанной работе.

Плотность распределения вероятности $W(\theta)$, являющуюся круговой плотностью и рассматриваемую на отрезке $[-\pi;\pi]$, можно записать в виде разложения в тригонометрический ряд Фурье [3, 11]:

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\big(k\theta\big) + b_k\sin\big(k\theta\big)\Big)\right],$$

где коэффициенты a_k, b_k — коэффициенты разложения ряда Фурье.

Оценку этих коэффициентов получим по выборке (5) следующим образом [12, 13]:

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\cos\,(k\psi_n), \qquad \hat{b}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sin\,(k\psi_n). \tag{8}$$

При этом, в силу ограниченности выборки, для получения корректной оценки необходимо применить регуляризацию коэффициентов (8). Для этого вводится стабилизирующий множитель (подробнее о суммировании рядов с приближенными коэффициентами см. [14–16]) в форме

$$g\left(k,\alpha\right)=\frac{1}{1+\alpha\lambda_k}, \tag{9}$$

где α — параметр регуляризации, λ_k — последовательность положительных чисел, причем $\alpha\lambda_k \approx 0$ при малых k, и $\alpha\lambda_k$ достаточно быстро возрастает при больших k, так что $\alpha\lambda_k \to \infty$.

В работе [10] также детально рассмотрены другие виды стабилизирующих множителей с введением в них дополнительных параметров $\epsilon=\{\epsilon_m\}$, $m=0,\ldots,M-1$, учитывающих порядок модуляции и значения соответствующих вероятностей p_m, $m=0,\ldots,M-1$.

Кроме того, плотность распределения $W(\theta)$ является симметричной, а значит коэффициенты (см. [17])

$$b_k \equiv 0, \quad k \in [0;\infty)\,.$$

В результате в качестве правой части уравнения (7) имеем регуляризированную оценку вида

$$\hat{W}_{\alpha,\epsilon}(\theta)=\frac{1}{2\pi}\left[1+2\sum_{k=1}^{K}\left(\hat{a}_k g\left(k,\alpha,\epsilon\right)\cos\left(k\theta\right)\right)\right], \tag{10}$$

где K — конечное число коэффициентов ряда.

Отметим, что для оценки плотности распределения вероятностей $\hat{W}(\theta)$ по выборке малого объема могут быть применены и другие непараметрические методы [12, 13]. Однако применение рассмотренного в работе [10] метода аппроксимации с использованием ортогональных функций для рассматриваемой задачи привлекательно тем, что на этапе оценки $\hat{W}_{\alpha,\epsilon}(\theta)$ удается получить оценки вероятностей $p_{m,\epsilon}$, $m=0,\ldots,M-1$, которые рассмотрим далее в п. 3.

3. О коэффициентах функции $h(\theta)$

Функция $h(\theta)$ представлена в виде выражения (6) в п. 2. При этом, как отмечено во введении, значения вероятностей или коэффициентов p_m априори неизвестны, поэтому обычно их принимают равными (2). Данное допущение справедливо при $N\to\infty$. Однако часто на практике значения вероятностей p_m, $m=0,\ldots,M-1$, не равны. Например, в случае $M=2$ при любом нечетном N допущение (2) не верно.

Как показано в [10], ввиду того, что значения вероятностей p_m неизвестны, представим данные коэффициенты в форме

$$p_{m,\epsilon}=\frac{1}{M}+\epsilon_m, \quad m=0,\ldots,M-1.$$

При этом условие (3) преобразуется следующим образом:

$$\sum_{m=0}^{M-1} p_{m,\epsilon} \equiv 1.$$

Фактически параметры $\epsilon=\{\epsilon_m\}$, $m=0,\ldots,M-1$, играют роль параметров регуляризации ядра интегрального уравнения (7). Функцию $h(\theta)$ из (7) далее обозначим в виде $h(\theta,\epsilon)$. Таким образом в рассматриваемой задаче имеет место случай многопараметрической регуляризации [18].

Далее для простоты будем рассматривать случай $M = 2$, что позволяет обойтись лишь одним параметром ϵ. Вероятностные коэффициенты в этом случае имеют вид

$$p_{0,\epsilon} = \frac{1}{2} + \epsilon, \quad p_{1,\epsilon} = \frac{1}{2} - \epsilon. \tag{11}$$

Для удобства уравнение (7) с учетом регуляризации ядра можно записать в матричной форме

$$H_\epsilon W_0 = \hat{W}, \tag{12}$$

где векторы W_0 и $\hat{W}$ размерности $1 \times L$ соответствуют отсчетам функций $W_0(\theta)$ и $\hat{W}(\theta)$, а матрица H_ϵ размерности $L \times L$ для случая $M = 2$ есть

$$H_\epsilon = \begin{bmatrix} h_{0,0} & 0 & h_{0,L/2} & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & h_{L/2-1,L/2-1} & 0 & h_{L/2-1,L-1} \\ h_{L/2,0} & 0 & h_{L/2,L/2} & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & h_{L-1,L/2-1} & 0 & h_{L-1,L-1} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где $h_{l,l} = p_{0,\epsilon}$, $h_{l,\mathrm{mod}(L/2+l,L)} = p_{1,\epsilon}$. Здесь $\mathrm{mod}\,(x, y)$ — операция взятия числа x по модулю y.

Таким образом, решение уравнения (12) есть

$$\hat{W}_0 \approx \hat{W}_{0,\epsilon} = H_\epsilon^{-1} \hat{W}. \tag{14}$$

Однако возникает очевидная проблема

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\det H_\epsilon) = 0,$$

т. е. матрица является вырожденной, что делает невозможным вычисление обратной матрицы H_ϵ^{-1} при $\epsilon \to 0$.

Данная проблема имеет место в случае $p_0 = p_1$. Кроме того, это осложняет получение устойчивого решения в случае близких значений p_0 и p_1 при анализе выборок малого объема, что достаточно часто встречается на практике.

4. Случай $p_0 = p_1$

Рассмотрим функцию (7) в случае $p_0 = p_1 = 1/2$. Полагаем, что параметр $\epsilon = 0$ в (11). Таким образом,

$$h(\theta) = \frac{1}{2}\delta(\theta) + \frac{1}{2}\delta(\theta - \pi). \tag{15}$$

Как известно, одним из наиболее эффективных методов для решения уравнения (7) является метод регуляризации Тихонова [14]. Для численной реализации данного метода при решении уравнения свертки перейдем в частотную область, тогда преобразование Фурье (15) есть

$$h(\Theta) = \frac{1}{2}\Big(1 + \exp(-j\Theta\pi)\Big), \tag{16}$$

квадрат модуля которой

$$|h(\Theta)|^2 = h(\Theta)h(-\Theta) = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos(\Theta\pi)\Big).$$

Отметим, что при получении оценки $\hat{W}(\theta)$, как описано в [10], получаем оценки значений коэффициентов Фурье $\hat{a}_k$ из (8), а также осуществляем их регуляризацию умножением на стабилизирующий множитель $g(k, \alpha, \epsilon)$. Соответствующее преобразование Фурье правой части обозначим как $\hat{W}(\Theta)$.

В результате решение уравнения (7) в частотной области есть

$$W_0(\Theta) = \frac{\hat{W}(\Theta)}{h(\Theta)} = \frac{\hat{W}(\Theta)h(-\Theta)}{h(\Theta)h(-\Theta)}. \tag{17}$$

При этом при численной реализации имеем случай деления "ноль на ноль" (иными словами неопределенность вида 0/0) для каждого нечетного (при $M = 2$) коэффициента ряда Фурье, т. е.

$$\frac{\hat{W}(2k+1)}{h(2k+1)} = \left(\frac{0}{0}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отметим, что применение регуляризации путем введения параметра α в знаменатель выражения (17) (см. [14, 19]) не позволит разрешить указанную проблему и получить решение уравнения (7) (или в матричной форме уравнения (12)). Действительно, в этом случае для нечетных коэффициентов получим $0/\alpha = 0$, в то время как соответствующие истинные коэффициенты отличны от нуля, т. е. $W_0(\Theta_{2k+1}) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Как известно, для разрешения неопределенности можно применить правило Лопиталя. Тогда с учетом принятых обозначений получим

$$W_0(\Theta) = \frac{\hat{W}'(\Theta)}{h'(\Theta)} = \frac{\hat{W}'(\Theta)h'(-\Theta)}{h'(\Theta)h'(-\Theta)}. \tag{18}$$

При этом производная $h'(\Theta)$ может быть вычислена аналитически. Выражение для производной комплексной функции (16) есть

$$\frac{dh(\Theta)}{d\Theta} = \frac{1}{2}\Big(-\pi\sin(\Theta\pi) + j\pi\cos(\Theta\pi)\Big). \tag{19}$$

Положим $\Theta = k$. Тогда $\sin(k\pi) \equiv 0$ при $k \in Z$, а выражение (19) упрощается к следующему виду:

$$\left.\frac{dh(\Theta)}{d\Theta}\right|_{\Theta=k} = j\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Вторая производная функции (16) есть

$$\frac{d^2h(\Theta)}{d\Theta^2} = \frac{1}{2}\Big(-\pi^2\cos(\Theta\pi) + j\pi^2\sin(\Theta\pi)\Big),$$

и при $\Theta = k$ получаем

$$\left.\frac{d^2h(\Theta)}{d\Theta^2}\right|_{\Theta=k} = -\frac{\pi^2}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Аналогично могут быть вычислены производные более высоких порядков.

Соответствующие оценки производных коэффициентов ряда Фурье могут быть вычислены аналогично (8) по имеющейся выборке фаз следующим образом:

$$\hat{a}'_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} -\psi_n \sin(k\psi_n), \qquad \hat{b}'_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi_n \cos(k\psi_n).$$

Аналогично получаем выражения для вычисления вторых производных данных коэффициентов в виде

$$\hat{a}''_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} -\psi_n^2 \cos(k\psi_n), \qquad \hat{b}''_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} -\psi_n^2 \sin(k\psi_n).$$

Очевидно, что в рамках рассматриваемой задачи в силу четности искомых функций для получения конечного решения интерес представляют только четные производные. При этом коэффициенты $\hat{b}''_k$, как и ранее, положим равными нулю. Коэффициенты $\hat{a}''_k$ в силу погрешности вычисления необходимо регуляризировать, домножив на (9).

В результате, решение уравнения (7) при функции $h(\theta)$ с вероятностными коэффициентами $p_0 = p_1 = 0.5$, т. е. вида (15), при использовании вторых производных вычисляется из выражения

$$\hat{W}^{(d2)}_{0,\alpha}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{2\hat{a}''_k g(k,\alpha)}{\pi^2}\cos(k\theta)\right)\right]. \tag{20}$$

Здесь обозначение $(d2)$ в $\hat{W}^{(d2)}_{0,\alpha}(\theta)$ означает порядок используемых производных. Аналогично в выражении (20) могут быть использованы производные более высоких порядков.

5. Численный эксперимент

В рамках проведения численного моделирования рассмотрим следующие случаи:

1. $p_0 > p_1$: правую часть $\hat{W}(\theta)$ предварительно получаем путем решения прямой задачи при заданных аналитически $h(\theta)$ и $W_0(\theta)$;
2. $p_0 = p_1$: правую часть $\hat{W}(\theta)$ предварительно получаем путем решения прямой задачи при заданных аналитически $h(\theta)$ и $W_0(\theta)$;
3. $p_0 > p_1$: оценка $\hat{W}(\theta)$ осуществляется по "относительно небольшой" выборке объема N_ψ в соответствии с методом, представленным в работе [10], коэффициенты p_0 и p_1 функции $h(\theta)$ неизвестны;
4. $p_0 = p_1$: оценка $\hat{W}(\theta)$ осуществляется по "относительно небольшой" выборке объема N_ψ (см. [10]).

В качестве $W_0(\theta)$ для случаев 1, 2 используем нормальное круговое распределение, задаваемое выражением [8]

$$W_0(\theta) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\right)\left(1 + \sqrt{2\pi\mu^2}\cos(\theta)\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(-\frac{\mu\cos(\theta)}{\sqrt{2}}\right)\exp\left(\frac{\mu^2\cos^2(\theta)}{2}\right)\right),$$

где $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \exp(-y^2)\,dy$ — функция ошибок или интеграл вероятности.

Правую часть $\hat{W}(\theta)$ в этом случае получаем из (1) при $M = 2$. Для случаев 1 и 2 значение $\mu = 2$.

5.1. Случай 1

Данный случай является наиболее очевидным. Пусть, например, $p_0 = 0.7$, $p_1 = 1 - p_0 = 0.3$. Соответствующая функция $W_0(\theta)$ и правая часть $\hat{W}(\theta)$ показаны на рисунке 1. Здесь же показано решение уравнения (7), полученное из выражения (14).

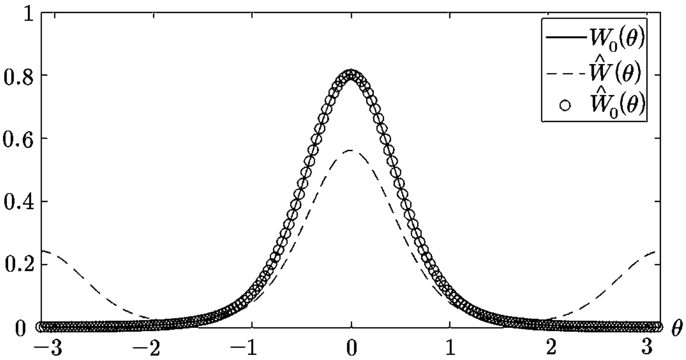

Рис. 1. Плотности распределения вероятности фаз $W_0(\theta)$, правая часть $\hat{W}(\theta)$ при $p_0 = 0.7$, $p_1 = 0.3$ и решение уравнения $\hat{W}_0(\theta)$

Отметим, что в случае задания плотностей в аналитической форме аналогичный результат получается для любых $p_0 \neq p_1$.

Погрешность решения будем оценивать следующим образом:

$$\text{error} = \frac{\left\|\hat{W}_0 - W_0\right\|}{\left\|\hat{W}_0\right\|}.$$

Зависимость погрешности решения от значения p_0 по мере его приближения к значению 0.5 (с учетом (4) p_1 также стремится к 0.5) приведена на рис. 2.

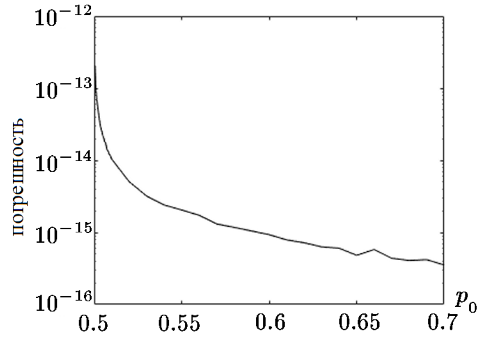

Рис. 2. Погрешность решения в зависимости от вероятности p_0

5.2. Случай 2

Пусть теперь $p_0 = p_1 = 0.5$. На рис. 3, по аналогии со случаем 1, приведены плотности вероятностей $W_0(\theta)$ и $\hat{W}(\theta)$. Решение уравнения (7) при этом получено путем вычисления производной, как описано в п. 4.

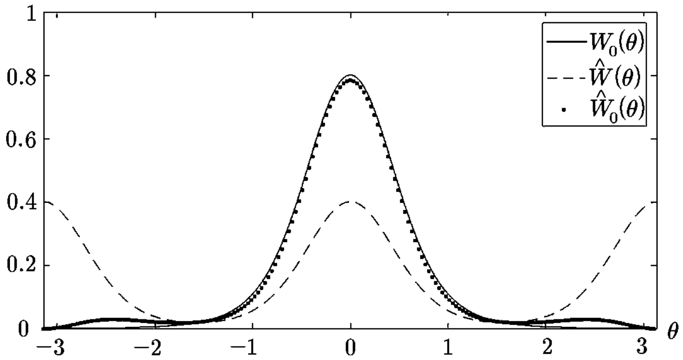

Рис. 3. Плотности распределения вероятности фаз $W_0(\theta)$, правая часть $\hat{W}(\theta)$ при $p_0 = p_1 = 0.5$ и решения уравнения $\hat{W}_0(\theta)$

Для уменьшения "краевых эффектов" можно применить оконные функции (см., например, [20–22]).

На рис. 4 приведены те же исходные плотности вероятностей и решение $\hat{W}_0(\theta)$, полученное в случае применения косинусной оконной функции.

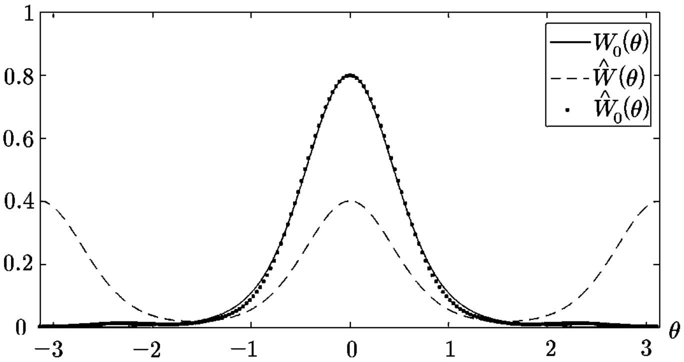

Рис. 4. Плотности распределения вероятности фаз $W_0(\theta)$, правая часть $\hat{W}(\theta)$ при $p_0 = p_1 = 0.5$ и решения уравнения $\hat{W}_0(\theta)$ в случае применения оконной функции

Значения погрешностей при этом составляют: в первом случае error $= 0.0559$, а в случае применения оконной функции error $= 0.03$. Аналогично уменьшается и погрешность в соответствии с критерием Колмогорова [23], вычисляемая из выражения

$$\rho_C = \sup \left| W_0(\theta) - \hat{W}_0(\theta) \right|.$$

Соответствующие значения оценки погрешностей составили $\rho_C = 0.0267$ и $\rho_C = 0.018$ в случае применения косинусной оконной функции.

5.3. Случай 3

Рассмотрим подробнее случай, когда правая часть — выборочная плотность $\hat{W}_{\alpha,\epsilon}(\theta)$ — получена путем вычисления соответствующих регуляризированных коэффициентов ряда Фурье по выборке фаз вида (5). Вероятностные коэффициенты так же, как и ранее для случая 1, положим $p_0 = 0.7$, $p_1 = 1 - p_0 = 0.3$. Объем выборки $N_\psi = 10^3$. Значение α в каждом из опытов подбиралось индивидуально (для указанного объема выборки $\alpha = 5 \div 9 \cdot 10^{-4}$).

Кроме того, для сравнительного анализа в рамках численного эксперимента получена выборочная плотность $W_0(\theta)$ при $\varphi_n = 0$. Для ее сглаживания аналогично производится регуляризация коэффициентов ряда Фурье, т. е. в результате имеем оценку $\hat{W}_{0,\alpha}(\theta)$.

На рис. 5 представлены оценки $\hat{W}_{0,\alpha}(\theta)$, $\hat{W}_\alpha(\theta)$ и соответствующее решение уравнения (7).

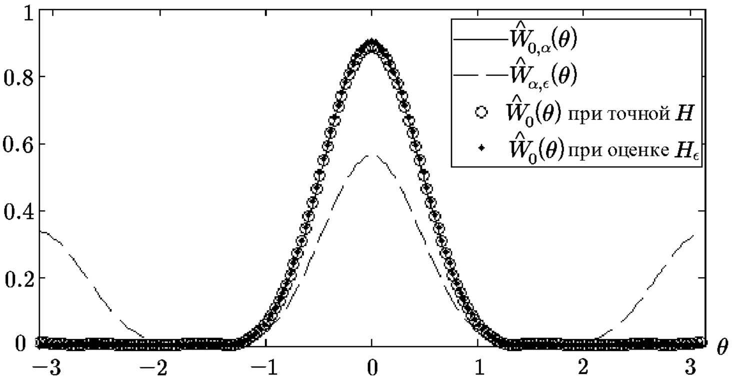

Рис. 5. Выборочные плотности распределения вероятности фаз $\hat{W}_{0,\alpha}(\theta)$, правая часть $\hat{W}_{\alpha,\epsilon}(\theta)$ при $p_0 = 0.7$, $p_1 = 0.3$ и решения уравнения $\hat{W}_0(\theta)$ при точной матрице H и оценке H_ϵ

Погрешности получаемого решения будем оценивать следующим образом:

$$\text{error} = \frac{\left\| \hat{W}_0 - \hat{W}_{0,\alpha} \right\|}{\left\| \hat{W}_{0,\alpha} \right\|}$$

и

$$\rho_C = \sup \left| \hat{W}_{0,\alpha}(\theta) - \hat{W}_0(\theta) \right| .$$

Значения погрешностей в этом случае составили: error $= 0.0097$ и $\rho_C = 0.0073$ при точной матрице H; error $= 0.0081$ и $\rho_C = 0.0057$ при оценке коэффициентов p_0, p_1 в матрице H_ϵ. Меньшая погрешность при использовании матрицы H_ϵ объясняется тем, что имеется ограниченный объем анализируемой выборки фаз. При этом реальные значения p_0, p_1 при ее генерации в силу случайности могут несколько отличаться от заданных.

5.4. Случай 4

Пусть теперь $p_0 = p_1 = 0.5$. В качестве правой части имеем оценку плотности $\hat{W}_{\alpha,\epsilon}(\theta)$, полученную путем двухпараметрической регуляризации, как описано в [10], а также в п. 2 (см. выражение (10)) и представленную на рис. 6. Как и ранее, объем выборки $N_\psi = 1000$.

Для анализа численного решения уравнения (7) (или в матричной форме (12)) получена оценка $\hat{W}_{0,\alpha}(\theta)$, также представленная на рис. 6.

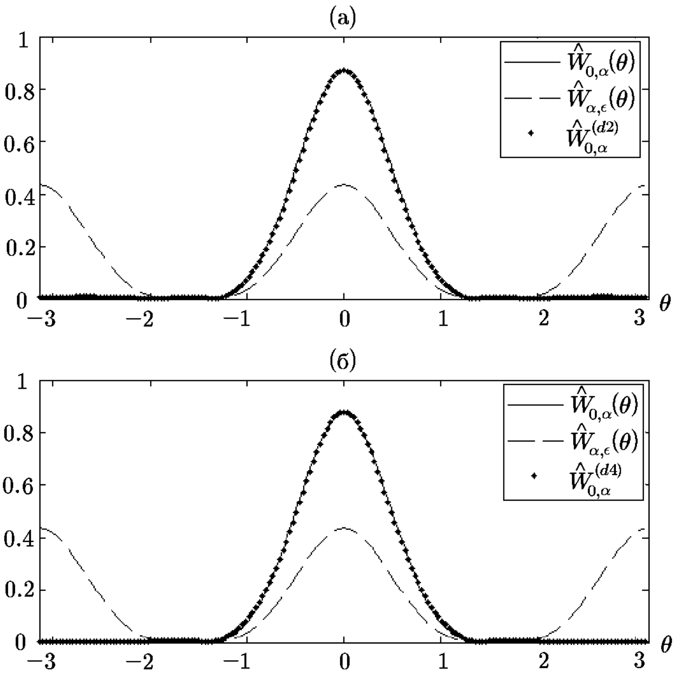

Рис. 6. Выборочные плотности распределения вероятности фаз $\hat{W}_{0,\alpha}(\theta)$, правая часть $\hat{W}_{\alpha,\epsilon}(\theta)$ при $p_0 = p_1 = 0.5$ и решение уравнения, полученное при использовании вторых производных $\hat{W}^{d2}_{0,\alpha}(\theta)$ (а) и четвертых производных $\hat{W}^{d4}_{0,\alpha}(\theta)$ (б)

На рис. 6 приведены решения уравнения (7) — плотности $\hat{W}^{d2}_{0,\alpha}(\theta)$ и $\hat{W}^{d4}_{0,\alpha}(\theta)$, полученные при использовании вторых (см. выражение (20)) и четвертых производных соответственно. Значения параметра регуляризации для производных коэффициентов составляют: $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-3}$ при вычислении по вторым производным; $\alpha = 2.5 \cdot 10^{-3}$ при вычислении по четвертым производным.

Значения погрешностей составили: error $= 0.028$ и $\rho_C = 0.0193$ для решения $\hat{W}^{d2}_0(\theta)$; error $= 0.0249$ и $\rho_C = 0.0143$ для $\hat{W}^{d4}_0(\theta)$.

6. Заключение

В работе рассмотрена задача оценки плотности распределения вероятности фазы. Задача сведена к решению обратной задачи, формализованной как уравнение циклической свертки на отрезке $[-\pi; \pi]$. Показано, что в случае равных значений коэффициентов $(p_0 = p_1)$ в функции $h(\theta)$ (15) при вычислении решения уравнения (7) возникает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Для разрешения указанной проблемы в работе предложено использовать правило Лопиталя и перейти к рассмотрению соответствующих производных спектральных коэффициентов. При этом производные спектральных коэффициентов функции $h(\theta)$ могут быть вычислены аналитически. Для производных коэффициентов Фурье плотности распределения вероятностей фаз ФМ-сигнала, являющейся правой частью решаемого уравнения, выведены выражения для получения их оценок по имеющейся выборке. Для обеспечения гладкости и устойчивости получаемого решения производится регуляризация вычисляемых производных коэффициентов.

Отметим, что значения параметра регуляризации α в (10), а также в (20) при использовании, вообще говоря, производных различных порядков отличны друг от друга. При этом вопрос выбора оптимального значения параметра регуляризации в данной работе не рассматривался.

Представленный подход может быть использован при построении функционалов правдоподобия, а также получения оценок достоверности и качества принимаемого сигнала.

Литература

1. **Mardia K.V.** Statistics of directional data // J. of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). — 1975. — Vol. 37, № 3. — P. 349–371.
2. **Mardia K.V., Jupp P.E.** Directional Statistics. — Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
3. **Jammalamadaka S.R., SenGupta A.** Topics in Circular Statistics. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2001.
4. **Santamarina J.C., Fratta D.** Discrete Signals and Inverse Problems. — John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
5. **Levy B.C.** Principles of Signal Detection and Parameter Estimation. — New York: Springer, 2008.
6. **Barkat M.** Signal Detection and Estimation, 2nd ed. — Norwood: Artech House, Inc., 2005.
7. **Xiong F.** Digital Modulation Techniques. — Boston: Artech House, Inc., 2006.
8. **Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. — М.: Советское радио, 1966.
9. **Proakis J.G., Salehi M.** Digital Communications, 5th ed. — New York: McGraw-Hill, 2008.
10. **Маслаков М.Л., Егоров В.В.** Регуляризация рядов Фурье с приближенными коэффициентами для задачи оценки плотности распределения вероятностей фаз // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 2. — С. 157–171.
11. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. — Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1982.
12. **Губарев В.В.** Алгоритмы статистических измерений. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
13. **Сирота А.А.** Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB. — СПб.: БХВ-Петербург, 2016.
14. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
15. **Тихонов А.Н.** Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 156, № 2. — С. 268–271.
16. **Арсенин В.Я.** Об оптимальном суммировании рядов Фурье с приближенными коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 183, № 2. — С. 257–260.
17. **Толстов Г.П.** Ряды Фурье. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
18. **Lu S., Pereverzev S.V.** Regularization Theory for Ill-posed Problems. — Berlin: De Gruyter, 2013.
19. **Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.** Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990.
20. **Harris F.J.** On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform // Proc. of the IEEE. — 1978. — Vol. 66, № 1. — P. 51–83.
21. **Смит С.** Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников. — М.: Додэка-XXI, 2012.
22. **Taylor F.J.** Digital Filters: Principles and Applications with MATLAB. — New Jersey: John Wiley & Sons, 2012.

23. **Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В.** Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011.

Поступила в редакцию 11 ноября 2022 г.
После исправления 14 марта 2023 г.
Принята к печати 10 апреля 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Mardia K.V.** Statistics of directional data // J. of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). — 1975. — Vol. 37, № 3. — P. 349–371.
2. **Mardia K.V., Jupp P.E.** Directional Statistics. — Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
3. **Jammalamadaka S.R., SenGupta A.** Topics in Circular Statistics. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2001.
4. **Santamarina J.C., Fratta D.** Discrete Signals and Inverse Problems. — John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
5. **Levy B.C.** Principles of Signal Detection and Parameter Estimation. — New York: Springer, 2008.
6. **Barkat M.** Signal Detection and Estimation, 2nd ed. — Norwood: Artech House, Inc., 2005.
7. **Xiong F.** Digital Modulation Techniques. — Boston: Artech House, Inc., 2006.
8. **Tikhonov V.I.** Statisticheskaya radiotekhnika. — M.: Sovetskoe radio, 1966.
9. **Proakis J.G., Salehi M.** Digital Communications, 5th ed. — New York: McGraw-Hill, 2008.
10. **Maslakov M.L., Egorov V.V.** Regulyarizaciya ryadov Fur'e s priblizhennymi koefficientami dlya zadachi ocenki plotnosti raspredeleniya veroyatnostei faz // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2022. — T. 25, № 2. — S. 157–171.
11. **Zhuk V.V.** Approksimaciya periodicheskikh funkcii. — L.: Izd-vo Leningradskogo un-ta, 1982.
12. **Gubarev V.V.** Algoritmy statisticheskikh izmerenii. — M.: Energoatomizdat, 1985.
13. **Sirota A.A.** Metody i algoritmy analiza dannykh i ikh modelirovanie v MATLAB. — SPb.: BKHV-Peterburg, 2016.
14. **Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1979.
15. **Tikhonov A.N.** Ob ustoichivykh metodakh summirovaniya ryadov Fur'e // Dokl. AN SSSR. — 1964. — T. 156, № 2. — S. 268–271.
16. **Arsenin V.Ya.** Ob optimal'nom summirovanii ryadov Fur'e s priblizhennymi koefficientami // Dokl. AN SSSR. — 1968. — T. 183, № 2. — S. 257–260.
17. **Tolstov G.P.** Ryady Fur'e. — M.: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoi literatury, 1980.
18. **Lu S., Pereverzev S.V.** Regularization Theory for Ill-posed Problems. — Berlin: De Gruyter, 2013.
19. **Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G.** Chislennye metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1990.
20. **Harris F.J.** On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform // Proc. of the IEEE. — 1978. — Vol. 66, № 1. — P. 51–83.
21. **Smit S.** Cifrovaya obrabotka signalov. Prakticheskoe rukovodstvo dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov. — M.: Dodeka-XXI, 2012.
22. **Taylor F.J.** Digital Filters: Principles and Applications with MATLAB. — New Jersey: John Wiley & Sons, 2012.
23. **Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Postovalov S.N., Chimitova E.V.** Statisticheskii analiz dannykh, modelirovanie i issledovanie veroyatnostnykh zakonomernostei. Komp'yuternyi podkhod. — Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2011.