ПМТФ, № 5, 1963

РАВНОВЕСИЕ ДВОЙНИКА У ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

А. М. Косевич, Л. А. Пастур

(Харьков)

Рассмотрена дислокационная модель квазистатического двойникования у поверхности кристалла. Выяснена общая качественная картина гистерезисных явлений при таком двойниковании.

Будем предполагать, что двойник неограничен в одном направлении, параллельном поверхности кристалла, т. е. образован нагрузкой, созданной бесконечно длинным лезвием. При этом форма двойника полностью характеризуется его профилем в плоскости, перпендикулярной указанному направлению. В дислокационной модели такой двойник эквивалентен совокупности прямолинейных дислокаций, оси которых расположены по его контуру. Обычно толщина двойника очень мала, поэтому естественно считать, что все дислокации расположены в одной плоскости (плоскости двойникования), причем, так как число их в макроскопическом двойнике достаточно велико, то можно ввести линейную плотность дислокаций, являющуюся непрерывной функцией координаты y, отсчитываемой вдоль плоскости двойникования от поверхности в глубь кристалла. Эти представления были положены в основу работ авторов [1–4]. В указанных работах для плотности дислокаций $\rho(y)$ были сформулированы уравнения, которые описывают квазиравновесное развитие тонкого двойника, а также проведено их качественное исследование.

В простейшем случае, когда двойник образован чисто краевыми дислокациями и перпендикулярен поверхности изотропного тела, указанное уравнение имеет вид

$$\int_0^l K(y,\eta)\,\rho(\eta)\,d\eta = f(y) + S(y), \qquad K(y,\eta) = \frac{1}{\eta - y} + \frac{y^2 + 4y\eta - \eta^2}{(y+\eta)^3} \tag{0.1}$$

где l — длина двойника, $f(y)$ — сила, действующая на дислокацию со стороны внешней нагрузки (причем всегда можно считать, что $f(y) > 0$), $S(y)$ — так называемая сила неупругого происхождения. Заметим, что сила такой же физической природы обусловливает наличие «модуля сцепления» в теории хрупких трещин, предложенной Г. И. Баренблаттом [5].

Если конец двойника свободен, т. е. нет никаких стопоров, препятствующих его росту в глубь кристалла,то ρ_0 определяется из следующего уравнения

$$\int_0^l \rho_0(\eta)\,\{f(\eta) + S(\eta)\}\,d\eta = 0 \tag{0.2}$$

где $\rho_0(\eta)$ — решение однородного уравнения, сопряженного (0.1).

В общем случае сила сопротивления, действующая на дислокацию, зависит от предыстории данного ее состояния.

Такая зависимость, как оказывается [6], является причиной гистерезиса при двойниковании под действием внешней нагрузки, бесконечно медленно, но немонотонно изменяющейся со временем (процесс нагрузки и последующей разгрузки). Интересно отметить, что для выяснения качественной картины гистерезисных явлений в дислокационной модели существенны лишь некоторые, довольно общие свойства входящей в (0.2) функции $\rho_0(\eta)$: знакопостоянство в интервале $(0, l)$ и определенная асимптотика на концах интервала. Доказательству этих свойств $\rho_0(\eta)$ и посвящена первая часть настоящей работы. Во второй части проведен качественный анализ гистерезисных явлений при двойниковании у поверхности кристалла, а также кратко рассмотрен вопрос об устойчивости двойников.

1. Как уже указывалось, $\rho_0(y)$ представляет собой решение однородного интегрального уравнения, сопряженного (0.1)

$$\int_0^l \left\{\frac{1}{\eta - y} + \frac{y^2 - 4y\eta - \eta^2}{(y+\eta)^3}\right\} \rho_0(\eta)\, d\eta = 0 \tag{1.1}$$

Заменой $\eta = lt$, $y = lx$, уравнение (1.1) приведем к виду

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{t - x} + \frac{x^2 - 4xt - t^2}{(x+t)^3}\right\} \varphi(t)\, dt = 0 \qquad (\varphi(t) = \rho_0(lt)) \tag{1.2}$$

Неоднородное уравнение такого типа рассматривалось Уиглсуэртом [7] в связи с задачей о трещине у поверхности твердого тела, причем решение было получено методом Винера — Хопфа. Будем решать уравнение (1.2), следуя в существенном методу работы [7].

Введем функции

$$\varphi_-(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (0 \leqslant x < 1), \\ 0 & (1 < x < \infty), \end{cases} \qquad \varphi_+(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1) \\ \gamma_1(x) & (1 < x < \infty) \end{cases}$$

$$\gamma_1(x) = \int_0^1 K(t, x)\, \varphi_-(t)\, dt$$

При помощи этих функций, а также с учетом однородности $K(t, x)$ запишем (1.2) в виде

$$\int_0^\infty \varphi_-(x)\, k\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dx}{x} = \varphi_+(y) \qquad \left(k(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1 + 4x - x^2}{(1+x)^3}\right) \tag{1.3}$$

Преобразованием Меллина, учитывая, что левая часть (1.3) имеет вид меллиновской свертки, приводим (1.3) к виду

$$\Phi_-(s) = 2\pi \frac{\sin^2(1/2\,\pi s) - s^2}{\sin \pi s} = \Phi_+(s) \tag{1.4}$$

Здесь $\Phi_\pm(s)$ есть преобразования Меллина функций $\varphi_\pm(x)$, т. е.

$$\Phi_+(s) = \int_1^\infty \varphi_+(x)\, x^{s-1} dx, \qquad \Phi_-(s) = \int_0^1 \varphi_-(x)\, x^{s-1} dx$$

Функциональное уравнение (1.4) будем решать методом Винера — Хопфа (см., например, [8]). Следуя основной идее этого метода, выясним прежде всего общую полосу аналитичности обеих частей уравнения. Если предположить, что $\varphi_-(x)$ при $x \to 0$ ведет себя, как x^α $(\alpha > -1)$, то $\Phi_-(s)$ будет аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -\alpha$. Далее, так как

$$\varphi_+(x) = \int_0^1 \varphi_-(t)\, k\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \sim \frac{A}{x^2} \qquad \text{при } x \to \infty$$

то $\Phi_+(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s < 2$. Поэтому общая полоса аналитичности уравнения (1.4) будет $\beta < \operatorname{Re} s < 1$, где $\beta = \max\{-\alpha, 0\}$; функция аналитична в каждой из полос, указанных в скобках.

$$\varkappa(s) = \frac{\sin^2(1/2\,\pi s) - s^2}{\sin \pi s} \qquad (2n < \operatorname{Re} s < 2n + 1,\ n = 0,\ \pm 1, \ldots)$$

Следующий этап решения состоит в факторизации $\varkappa(s)$, т. е. в представлении ее в виде $\varkappa(s) = \varkappa_-(s) / \varkappa_+(s)$, где $\varkappa_\mp(s)$ — аналитические и не обращающиеся в нуль функции соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Re}\, s > \beta$ и $\mathrm{Re}\, s > 1$. Это было проделано в работе [7]; здесь приводится только выражение для $\varkappa_-(s)$, которое понадобится в дальнейшем

$$\varkappa_-(s) = \frac{h_-(s)\,\Gamma\,(^1/_2\,(s+1))}{\Gamma\,(^1/_2\,s)} \tag{1.5}$$

где $\Gamma\,(s)$ — гамма-функция Эйлера, а

$$h_-(s) = (1+s)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{\mu_n}\right)\left(1+\frac{s}{\bar{\mu}_n}\right)\left(1+\frac{s}{2n}\right)^{-2} \tag{1.6}$$

Здесь μ_n — корни уравнения $\sin^2(^1/_2\,\pi s) - s^2 = 0$, лежащие в первом квадранте, кроме 0 и 1 ($\mathrm{Im}\,\mu_n > 0$, $\mathrm{Re}\,\mu_n > 0$), а черта обозначает комплексное сопряжение. Для $h_-(s)$ можно получить также интегральное представление, из которого устанавливается [7, 8], что $\lim\limits_{s\to\infty} h_-(s) = 1$ ($\mathrm{Re}\, s > \beta$).

Используя факторизованную функцию $\varkappa\,(s)$, представим (1.4) в виде

$$\Phi_-(s)\,\varkappa_-(s) = \Phi_+(s)\,\varkappa_+(s) \tag{1.7}$$

Отсюда следует, что обе части (1.7) равны одной и той же целой функции $P\,(s)$, которую, как обычно, в методе Винера — Хопфа, можно всегда выбрать полиномом. Таким образом

$$\Phi_\pm(s) = \frac{P\,(s)}{\varkappa_\pm(s)} \tag{1.8}$$

Из (1.5) следует, что $\varkappa_-(s) \sim \sqrt{s}$ при $|s| \to \infty$, $\mathrm{Re}\, s > \beta$. Так как $\Phi_-(s)$ должна исчезать на бесконечности (это есть необходимое условие для применения преобразования Меллина [8]), то $P\,(s)$ может быть только константой. Окончательно получаем, что $\Phi_\pm(s) = C/\varkappa_\pm(s)$, а значит

$$\varphi_-(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{C}{\varkappa_-(s)}\,x^{-s}ds \tag{1.9}$$

где L — прямая $\mathrm{Re}\, s = \delta > 0$. Так как здесь $0 < x < 1$, то можно дополнить контур L полуокружностью бесконечного радиуса, лежащую левее L, и тогда $\varphi_-(x)$ будет равна сумме вычетов $\Phi_-(s)$ в полюсах, лежащих левее L, т. е.

$$\varphi\,(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,(C_n x^{\mu_n}) \tag{1.10}$$

Здесь C_0 и C_n — вычеты $\Phi_-(s)$ в точках $s = 0$ и $s = \mu_n$ соответственно. Из (1.10) видно, что $\varphi\,(0) = C_0$ (так как $\mathrm{Re}\,\mu_n > 0$).

Для выяснения поведения $\varphi\,(x)$ при $x \to 1$ воспользуемся следующим утверждением [9]: если $f\,(s)$ есть «полуплоскостное» преобразование Меллина, функции $\psi\,(t)$, то

$$\lim_{t\to 1}\psi\,(t) = \lim_{s\to\infty} sf\,(s) \qquad \left(f\,(s) = \int\limits_0^1 \psi\,(t)\,t^{s-1}dt\right) \tag{1.11}$$

причем здесь из существования предела в левой части следует существование предела справа. Предположим теперь, что

$$\varphi\,(x) \sim A\,(1-x)^\gamma \quad \text{при } x\to 1 \ (A = \mathrm{const},\ \gamma > -1)$$

Тогда из (1.11) следует прежде всего, что $\gamma < 0$, так как $s\Phi_-(s)$ при $s \to \infty$ также стремится к бесконечности ($s\Phi_-(s) \sim \sqrt{s}$ при $s \to \infty$). Далее, применяя (1.11) к $\psi(t) = \varphi(t) - A(1-t)^\gamma$, заключаем, что необходимо

$$\lim_{s\to\infty} s \left\{\Phi_-(s) - A\frac{\Gamma(1-\gamma)}{s^{1-\gamma}}\right\} = 0$$

а так как при больших s

$$\Phi_-(s) = Cs^{-1/2} + O(s^{-3/2})$$

то очевидно

$$\gamma = -\frac{1}{2}, \qquad A = \frac{C}{\Gamma(1/2)}$$

Таким образом, окончательно

$$\varphi(x) \sim \frac{C}{\sqrt{\pi}}(1-x)^{-1/2} \quad \text{при } x \to 1$$

Докажем теперь неотрицательность функции $\varphi(x)$. Это ее свойство является следствием одной теоремы С. Н. Бернштейна [10], которая применительно к рассматриваемому случаю формулируется так: для того чтобы функция $\varphi(x)$ была неотрицательна, необходимо и достаточно, чтобы ее «полуплоскостное» преобразование Меллина

$$\Phi_-(s) = \int_0^1 \varphi(x)\, x^{s-1} dx$$

было абсолютно монотонной функцией, т. е.

$$\Phi_-(s) \geqslant 0, \qquad \Phi_-'(s) \leqslant 0, \qquad \Phi_-''(s) \geqslant 0 \ldots, \qquad (0 < s < \infty) \tag{1.12}$$

В силу этой теоремы необходимо лишь убедиться в том, что $\Phi_-(s)$ удовлетворяет условию (1.12). Для этого воспользуемся выражением (1.8) для $\Phi_-(s)$, из которого с учетом вида $\varkappa_-(s)$, даваемого (1.5), сразу видно, что $\Phi_-(s) > 0$ $(0 < s < \infty)$. Далее, рассмотрим

$$\Psi(s) \equiv \ln \Phi_-(s) = \left[\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n+3} - \operatorname{Re}\frac{1}{s+\mu_n}\right)\right]$$

Можно показать, что $\operatorname{Re}\mu_n - (2n+3) < 0$ при любом n, откуда следует, что $\Psi'(s) < 0$, $\Psi'(s) > 0, \ldots$.Применяя теперь метод математической индукции, легко доказать, что $\Phi_-(s)$ удовлетворяет (2.12), а значит $\varphi(x)$ неотрицательна.

2. Рассмотрим развитие двойника при бесконечно медленном, но немонотонном изменении нагрузки. За основу примем уравнение (0.2), которое дает связь длины свободного двойника с величиной и характером сил, действующих на дислокацию. Отметим прежде всего, что сила сопротивления $S(x)$ состоит из двух существенно разных частей

$$S = s + S^\circ$$

где $s(x)$ — сила торможения (сила Пайерлса), а $S^\circ(x)$ — сила поверхностного натяжения.

Относительно s будем предполагать, что она направлена против возможного движения дислокаций и в пределе бесконечно малой скорости равна постоянной: $|s| = S_0 = \text{const}$. При монотонном нарастании внешней нагрузки $s = -S_0$, а при немонотонном ее изменении, вообще говоря, $-S_0 \leqslant s \leqslant S_0$.

Сила поверхностного натяжения $S^\circ(x)$ приложена непосредственно к «устью» двойника и потому ее можно считать отличной от нуля лишь вблизи конца двойника, т. е. $S^\circ(x) = Q(l - x)$, где $Q(x) \neq 0$ только при $0 \leqslant x \leqslant d$ и d мало.

Внешнюю нагрузку $f(x)$ положим пропорциональной некоторому параметру A ($f(x) = Ag(x)$), так что увеличение или уменьшение нагрузки обусловлено увеличением или уменьшением A. Тогда для случая нагрузки уравнение (0.2) запишется в виде

$$F(l) = S_0 + J(l) \tag{2.1}$$

Здесь

$$F(l) = \frac{A}{B}\int_0^l g(x)\,\eta(x)\,dx, \qquad J(l) = \frac{1}{B}\int_0^l S^\circ(x)\,\eta(x)\,dx$$

$$B = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \Phi_-(1), \qquad \eta(x) = \frac{\varphi(x/l)}{l}$$

Нетрудно показать теперь, учитывая результаты § 1, что уравнение (2.1) обладает теми же свойствами, что соответствующие уравнения в работах [5, 6]. Так $J(l)$ будет монотонно убывающей функцией l и ее главный член при $l \gg d$ равен

$$J(l) \approx \frac{M}{\sqrt{l}}; \qquad M = \frac{C}{B\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{x}}$$

Далее, $F(l)$ также будет монотонно убывающей функцией l, если $f(x)$ монотонно убывает. Если же $f(x)$ немонотонно зависит от x, то $F(l)$ может иметь несколько максимумов и минимумов (однако всегда $F(\infty) = 0$, если только $f(x)$ интегрируема на бесконечном интервале). Отмеченное совпадение свойств уравнения (2.1) и соответствующих уравнений работ [5, 6] позволяет утверждать, что все основные выводы и результаты этих работ будут справедливы и в данном случае. Вкратце сформулируем эти результаты.

Нагрузка. При возрастании внешней силы $Ag(x)$, пока параметр A меньше некоторого A^*, двойник не возникает. Величина A^* определяется тем условием, что внешняя сила в точке нахождения источника сравнивается с полной силой сопротивления в этой точке $S(0)$. При $A = A^*$ появляется двойник, который увеличивается с дальнейшим ростом A. В зависимости от вида $g(x)$ длина двойника при $A = A^*$ может быть либо сколь угодно малой (при монотонном и достаточно быстром убывании $g(x)$, когда уравнение (3.1) имеет только одно решение), либо конечной (при медленном убывании или немонотонном изменении $g(x)$, когда уравнение (2.1) имеет два или более корня). В последнем случае скачкообразно возникает двойник конечных размеров.

Разгрузка. При рассмотрении разгрузки делается упрощающее предположение о виде $g(x)$, которая считается монотонно убывающей с ростом x. Оказывается, что здесь определяющую роль играет отношение S_0 к S°, в зависимости от величины которого могут представиться два случая.

1. Поверхностное натяжение мало $S^\circ(0) < S_0$. Тогда, если двойник образован сравнительно малой силой, такой, что всегда $f(0) < 2S_0$, то после снятия нагрузки размеры двойника остаются без изменения. В противном случае, когда внешнее напряжение в точке $x = 0$ в конце нагрузки больше $2S_0$, при снятии нагрузки происходит некоторое утоньшение двойника в средней его части без изменения длины.

2. Поверхностное натяжение велико. В этом случае двойники больших размеров, такие, что $S_0\sqrt{l} > M$, ведут себя так же, как и в случае 1, т. е. только утоньшаются не меняя длины. Если же длина двойника не очень велика и выполняется обратное неравенство $S_0\sqrt{l} < M$, то при снятии нагрузки сначала происходит уменьшение толщины при неизменной длине, а потом, при дальнейшем уменьшении внешней силы, длина также начинает уменьшаться, и в конце концов двойник полностью исчезает.

По-видимому, именно случай 2 соответствует реальным двойниковым прослойкам, тогда как случай 1 более вероятен для незавершенных сдвигов.

В заключении приведем некоторые соображения об устойчивости двойников у поверхности кристалла. Двойник будем называть устойчивым, если его длина возрастает с увеличением нагрузки, т. е. если $dl/dA > 0$.

Рассматривая теперь уравнение (2.1) как неявное задание функции $l(A)$, найдем, что из условия $dl/dA > 0$ следует, что $F'(l) < J'(l)$. При достаточно больших l

$$F(l) \sim \frac{F_0}{l} \qquad \left(F_0 \approx \frac{1}{B}\int_0^\infty f(x)\,dx\right), \qquad J(l) \approx \frac{M}{\sqrt{l}}$$

и, следовательно, условие устойчивости выполняется. Это означает, что длинные двойники всегда устойчивы, причем под длинными следует понимать такие двойники, длина которых велика по сравнению с размерами области приложения нагрузки на поверхности кристалла.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук СССР

Поступила 8 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Косевич А. М., Пастур Л. А. О дислокационной модели двойника. Физ. твердого тела, 1961, т. III.
2. Косевич А. М., Пастур Л. А. Форма тонкого двойника, расположенного под углом к поверхности. Физ. твердого тела, 1961, т. III.
3. Косевич А. М., Пастур Л. А. Труды 2-го совещания по физике щелочно-галоидных кристаллов. Рига, 1962.
4. Косевич А. М., Пастур Л. А. Тонкий двойник у плоской поверхности анизотропного тела. Физ. твердого тела, 1962, т. IV.
5. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
6. Косевич А. М. Дислокационная теория гистерезисных явлений при двойниковании и сдвигообразовании в неограниченной среде. Физ. твердого тела, 1961, т. III.
7. Wigglesworth L. A. Stress distribution in a notched plate. Mathematika, 1957, No 4, 76—96.
8. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. ИЛ, т. 1, 1958.
9. Ван-дер-Поль Б., Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. ИЛ, 1952.
10. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. Физматгиз, 1961.