

УДК 519.61

Об обобщении метода Гаусса–Жордана (Йордана) для решения однородных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений*

Ф.М. Федоров¹, Н.Н. Павлов, С.В. Потапова, О.Ф. Иванова, В.Ю. Шадрин

Научно-исследовательский институт математики Северо-восточного федерального университета им. М.К. Аммосова, ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677891, Республика Саха (Якутия)

E-mails: foma_46@mail.ru (Федоров Ф.М.), pnn10@mail.ru (Павлов Н.Н.), sargyp@inbox.ru (Потапова С.В.), o_buskarova@mail.ru (Иванова О.Ф.), vshadr@mail.ru (Шадрин В.Ю.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 15, 2022.

Федоров Ф.М., Павлов Н.Н., Потапова С.В., Иванова О.Ф., Шадрин В.Ю.
Об обобщении метода Гаусса–Жордана (Йордана) для решения однородных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 3. — С. 329–342.

В данной работе мы, во-первых, используя метод редукции в узком смысле (метод простой редукции), обобщили классический метод Гаусса–Йордана для решения конечных систем линейных алгебраических уравнений на неоднородные бесконечные системы. Обобщение основывается на новой теории решения неоднородных бесконечных систем, предложенной нами, которая дает точное аналитическое решение в виде ряда. Во-вторых, мы показали, что применение редукции в узком смысле в случае однородных систем дает только тривиальное решение, поэтому, чтобы обобщить метод Гаусса–Йордана для решения бесконечных однородных систем, мы использовали метод редукции в широком смысле. Дается численное сравнение, которое показывает приемлемую точность.

DOI: 10.15372/SJNM20220308

Ключевые слова: однородные бесконечные системы, алгоритм Гаусса–Жордана, алгоритм Гаусса–Йордана, бесконечный определитель, гауссовы системы, метод редукции в узком и широком смысле.

Fedorov F.M., Pavlov N.N., Potapova S.V., Ivanova O.F., Shadrin V.Yu.
Generalization of the Gauss–Jordan method for solving homogeneous infinite systems of linear algebraic equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 3. — P. 329–342.

In this paper, we, first, using the reduction method in the narrow sense (the simple reduction method), have generalized the classical Gauss–Jordan method for solving finite systems of linear algebraic equations to inhomogeneous infinite systems. The generalization is based on a new theory of solutions to inhomogeneous infinite systems, proposed by us, which gives an exact analytical solution in the form of a series. Second, we have shown that the application of reduction in the narrow sense in the case of homogeneous systems gives only a trivial solution, therefore, in order to generalize the Gauss–Jordan method for solving infinite homogeneous systems, we used the reduction method in the wide sense. A numerical comparison is given that shows acceptable accuracy.

Keywords: homogeneous infinite systems, Gauss–Jordan algorithm, infinite determinant, Gaussian system, reduction method in the narrow and the wide senses.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № FSRG-2020-0006).

1. Введение

В работе рассматривается метод решения систем линейных алгебраических уравнений, часто называемый в русской научной литературе “методом Гаусса–Жордана”, хотя, на самом деле, его разработал немецкий геодезист и математик Вильгельм Йордан (мы неверно транскрибируем с немецкого *Jordan* как Жордан). Чтобы не ассоциировать метод с известным в математическом мире французом Камилем Жорданом, с одной стороны, но и не ломать сложившегося словоупотребления, с другой, в заглавии статьи мы даем двойное написание “метод Гаусса–Жордана (Йордана)”, указывая в скобках имя настоящего автора, т. е. В. Йордана, а далее по тексту будем придерживаться исторически верного написания “метод Гаусса–Йордана”.

Пусть задана неоднородная бесконечная система линейных алгебраических уравнений с бесконечным множеством неизвестных [1]:

[illegible]

где коэффициенты и свободные члены системы, а также неизвестные взяты из некоторого поля F .

Совокупность численных значений величин $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ называется *решением системы* (1.1), если после подстановки этих значений в левую часть равенств (1.1) мы получим сходящиеся ряды, и все эти равенства будут удовлетворены.

В случае разрешимости бесконечная система называется *совместной*, в противном случае — *несовместной*.

В таком толковании бесконечная система (1.1) понимается в самом широком смысле, поскольку в систему (1.1) входят и бесконечные системы, для которых все коэффициенты $a_{i,j}$ отличны от нуля, и бесконечные системы, для которых все коэффициенты $a_{i,j}$, начиная с некоторого номера j_i , равны нулю. Оказалось, что свойства этих систем могут сильно отличаться, и потому методы их решения должны быть существенно разными. Также хорошо известно, что наиболее трудоемким с вычислительной точки зрения является решение конечной системы большого порядка с неразрезанной матрицей. В силу этих обстоятельств бесконечные системы, для которых все коэффициенты $a_{i,j}$ отличны от нуля, кроме, быть может, конечного числа коэффициентов, условно назовем *общими бесконечными системами*.

Вычисляем главные миноры (определители) матрицы A системы (1.1): $|A_1| = a_{1,1}$, $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ и т. д. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n| = |A|$, то считается, что существует *бесконечный определитель*, а значение указанного предела есть значение *бесконечного определителя*.

Для общих неоднородных систем с бесконечным определителем, отличным от нуля, нами разработана теория их решения [2–9], краткое изложение которой приведено в следующем пункте.

В случае однородной системы, т. е. когда все правые части системы (1.1) равны нулю ($b_j = 0$ для всех j), данная теория неоднородных систем дает только тривиальное решение. Вместе с тем хорошо известно [10–13], что однородная бесконечная система может иметь нетривиальные решения, даже если бесконечный определитель отличен от нуля.

Более того, множество решений однородной бесконечной системы может составить бесконечномерное подпространство [12, 13]. Этим принципиально отличается бесконечная система от конечной. Но решение однородной бесконечной системы является более трудной задачей, чем решение неоднородной системы, на это указал еще Ф. Рисс [14]. Дело в том, что, если рассматривать систему (1.1) в однородном случае в матричной форме $AX = 0$, когда система имеет нетривиальное решение, то матрицы A и X являются делителями нуля. Это значит, что при $A \neq 0$ и $X \neq 0$ их произведение, тем не менее, равно нулю: $AX = 0$. Это обстоятельство иногда не учитывают, например в [15]. Кроме того оно накладывает определенные трудности при исследовании однородных бесконечных систем. В связи с этим более-менее полная теория разработана только для систем с разностными индексами [10, 12, 13], в том числе и для периодических систем [12, 13]. Вместе с тем единственность решения бесконечной системы определяется исключительно единственностью решения соответствующей однородной системы, т.е. однородная система должна иметь только тривиальное решение.

Настоящая работа посвящена обобщению классического метода Гаусса–Йордана для решения конечных систем на бесконечные однородные системы общего вида с бесконечным определителем, отличным от нуля, т.е. $|A| \neq 0$.

Основные сведения о бесконечных системах, матрицах, определителях и минорах можно найти в монографиях [1, 12, 13, 16, 17].

Для обобщения метода Гаусса–Йордана для решения однородной бесконечной системы использовано существование специального частного (строго частного) решения неоднородных общих систем, к которому сходится метод редукции в узком смысле (простой редукции). Ниже дано краткое изложение теории строго частного решения для общих бесконечных систем.

2. Теория решения неоднородных бесконечных систем

Отметим, что, если все элементы главных диагоналей нижней и верхней треугольных бесконечных матриц отличны от нуля, то эти матрицы нами называются просто *треугольной* и *гауссовой матрицами* соответственно. Если бесконечная система имеет гауссову матрицу, то говорят, что система задана в *гауссовой форме* или просто она называется *гауссовой системой*.

Сущность нашего подхода к решению общих бесконечных систем заключается в следующем. Предполагается, что бесконечная матрица A системы (1.1) имеет бесконечный ранг, для этого достаточно, чтобы ее бесконечный определитель был отличен от нуля [16]. В этом случае при определенных дополнительных условиях матрица A системы (1.1) разлагается в виде произведения треугольной матрицы B на гауссову матрицу C , т.е. $A = BC$ [4], причем элементы главных диагоналей этих матриц отличны от нуля по определению. Если принять элементы главной диагонали матрицы B равными единице, то получим **обобщение алгоритма Гаусса** для бесконечных систем [2]. Следовательно, решение общей бесконечной системы (1.1) сводится к эквивалентной так называемой *гауссовой системе*:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

где $a_{j,j+p}$ — элементы гауссовой матрицы C , а через b_j переобозначены элементы столбца $B^{-1}b$, b — столбец свободных членов системы (1.1).

Теорема 1. Пусть задана урезанная по методу простой редукции от системы (2.1) конечная гауссова система в виде

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j,j+p} x_{j+p}^n = b_j, \quad a_{j,j} \neq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Тогда решением системы (2.2) будет выражение

$$x_j^n = B_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

где

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=0}^{n-j-1} \frac{a_{j,n-p}}{a_{j,j}} B_p, \quad B_0 = \frac{b_n}{a_{n,n}}, \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (2.4)$$

Заметим, что решение (2.3) является точным решением усеченной системы (2.2) любого порядка n .

Предельный переход от решения усеченной системы к решению бесконечной системы. Когда метод простой редукции будет сходиться к решению гауссовой системы (2.1)? Для того, чтобы ответить на данный вопрос предположим выполнение двух следующих условий:

- 1) пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$;
- 2) пусть в выражении (2.4) допустим предельный переход почленно, т. е. имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=j+1}^n \frac{a_{j,p}}{a_{j,j}} B_{n-p} = \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{a_{j,p}}{a_{j,j}} \lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-p}. \quad (2.5)$$

Условие 1 гарантирует, как видно из выражения (2.3), что метод простой редукции сходится; условие 2 является достаточным для того, чтобы числа $B(j)$ составили частное решение гауссовой системы (2.1), а значит и исходной системы (1.1).

Теорема 2. Пусть выполняется условие 1. Предельный переход в выражении (2.5) возможен тогда и только тогда, когда совокупность чисел $B(j)$, $j = 1, 2, \dots$, является решением гауссовой системы (2.1).

Строго частное решение и совместность бесконечной системы. На самом деле теорема 2 отвечает на вопрос: “Когда же простая редукция сходится к решению гауссовой системы (2.1)?”

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1 и 2, тогда предельное значение $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$ является частным решением системы (2.1), а значит и общей системы (1.1).

Частное решение $x_j = B(j)$ гауссовой бесконечной системы (2.1) называется *строго частным решением системы* (1.1).

Теорема 4. Если неоднородная гауссова система (2.1) совместна, то всегда существует ее строго частное решение, которое выражается формулой Крамера.

Теорема 5. *Общая неоднородная бесконечная система (1.1) с отличным от нуля бесконечным определителем совместна тогда и только тогда, когда существует ее строго частное решение.*

Теорема 6. *Пусть гауссова система (2.1) совместна, тогда ее строго частное решение x_j имеет вид*

$$x_j = B(j) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p A_p(j) b_{j+p}}{a_{j+p, j+p}}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

где $A_p(j)$ рекуррентно определяются соотношениями:

$$A_p(j) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p-1-k} a_{j+k, j+p}}{a_{j+k, j+k}} A_k(j), \quad A_0(j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots. \quad (2.7)$$

Решение однородной системы. В случае существования нетривиального решения соответствующей однородной системы, применяя метод редукции в широком смысле, можно найти это решение.

Теорема 7. *Пусть задана урезанная от гауссовой системы (2.1) в однородном случае ($b_j = 0$), в соответствии с методом редукции в широком смысле, конечная однородная гауссова система в виде*

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j, j+p} x_{j+p}^{n+1} = 0, \quad a_{j, j} \neq 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (2.8)$$

Тогда решением системы (2.8) является выражение

$$x_j^{n+1} = \frac{(-1)^j x_0 A_{n-j}(j)}{A_n(0)}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.9)$$

где $A_{n-j}(j)$ — характеристический определитель [12, 13] порядка $n - j = p$, вычисляемый соотношением (2.7), x_0 — произвольное вещественное число, индекс $(n + 1)$ — количество неизвестных системы (2.8) порядка n .

Здесь для удобства записи нумерация уравнений в (2.1) начинается с нуля, т.е. $j = 0, 1, 2, \dots$. При существовании предела в выражении (2.9) при $n \rightarrow \infty$, т.е. при выполнении соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^j x_0 A_{n-j}(j)}{A_n(0)} = x_j, \quad (2.10)$$

данный предел будет нетривиальным решением системы (2.1) в однородном случае. Если предела не существует, то скорее всего исходная однородная система не имеет нетривиального решения. Это значит, что исходная неоднородная система имеет единственное решение.

3. Алгоритм решения гауссовой неоднородной системы

Если каким-то образом заранее известно, что общая система (1.1), а значит и гауссова система (2.1), является совместной, то, согласно теоремам 5 и 6, ее точным аналитическим решением будет выражение (2.6). Но чаще всего совместность системы (1.1) заранее неизвестна. В таком случае как использовать решение (2.6)? Если удастся найти сумму ряда (2.6), то, подставляя ее в исходную гауссову систему (2.1), убеждаемся, является она решением или нет. Как поступить, если не удастся доказать сходимость ряда (2.6) или не удастся найти сумму ряда (2.6) аналитическим способом? Для ответа на данный вопрос был предложен следующий численный алгоритм решения исходной общей системы (1.1) с применением ряда (2.6) [9, 18].

Вычисление ряда (2.6) с использованием рекуррентной формулы (2.7) осуществляется таким образом: для каждого j при $n \rightarrow \infty$ вычисляем абсолютное значение разности последних двух членов суммы

$$x_j = B_{n-j}(j) = \sum_{p=0}^{n-j-1} (-1)^p A_p(j) \frac{b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

следа за этой разностью, и если это значение не превышает заданной точности ε , мы останавливаем вычисления (при некотором $n = N_j$). Естественно, для каждого j существует свое N_j , а это, в свою очередь, позволяет следить за невязкой, т.е. за разницей между левой и правой частями системы (1.1) для найденных значений x_j для каждого j . Если эти невязки стремятся к нулю при увеличении n , то полученные числа x_j будут приближенными решениями системы (1.1) с гарантированной точностью в случае достаточно быстрой сходимости ряда (2.6), тем самым быстрой сходимости редукции.

Дадим некоторое пояснение вышесказанному. Здесь описан алгоритм опознавания совместности или несовместности исходной бесконечной системы. Если заранее известно, что заданная система совместна, то ее аналитическое решение задано в виде сходящегося ряда (2.6), и на его вычислении не останавливаемся — это дело техники.

Если числовая последовательность x_j^n сходится при увеличении n , то это говорит о том, что простая редукция имеет предел, т.е. сходится. Здесь необходимо помнить о том, что, на самом деле, формула (3.1) дает точное решение урезанной конечной системы n -го порядка для каждого n в единой записи. Но сходимость редукции еще не говорит о том, что редукция сходится именно к решению гауссовой бесконечной системы (2.1) [9]. Кстати, если она сходится, то она сходится непременно к значению, определяемому формулой Крамера для соответствующего j , но оно может и не быть решением исходной системы (см. [9]). Для того чтобы показать, что простая редукция сходится к решению системы (2.1), необходимо следить за невязкой.

Следовательно, сначала убеждаемся, сходится редукция или нет. Если она не сходится, то по теореме 5 система несовместна. Очевидно, из формулы (3.1) следует

$$\left| x_j^n - x_j^{n+1} \right| = \left| A_{n+1-j}(j) \frac{b_{n+1}}{a_{n+1,n+1}} \right|.$$

Если теперь предположить, что правая часть последнего выражения стремится к нулю при увеличении n (т.е. она становится меньше заданного ξ), то это значит: во-первых, числовая последовательность x_j^n имеет предел по критерию сходимости Коши; во-вторых, необходимое условие сходимости числового ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_p(j) \frac{b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}$$

выполняется. Теперь проверяем невязку, а это возможно, поскольку порядок урезанной системы вычисления для каждого неизвестного x_j свой: $n = N_j$. Если невязка не уменьшается, то система не имеет решения, если уменьшается при увеличении n , то существует строго частное решение (2.6). Если взять за $n = \max_j N_j$, то неравенство $\left| \frac{n}{x_j} - \frac{n+1}{x_j^{+1}} \right| < \xi$ будет выполняться для всех j . Следовательно, получим гарантированную точность ξ .

Таким образом, если ряд в выражении (3.1) сходится и невязка системы (1.1) стремится к нулю при увеличении n , то исходная общая система (1.1) совместна, и мы получим ее приближенное численное решение с заданной точностью при достаточно быстрой сходимости ряда (3.1), т.е. простой редукции. Если ряд (3.1) расходится, т.е. редукция не сходится или она сходится, но указанная невязка не стремится к нулю при увеличении n , то исходная общая бесконечная система (1.1) не является совместной, т.е. не имеет решения.

4. Обобщение метода Гаусса–Йордана

Рассуждения, приведенные в предыдущем пункте, позволяют обобщить метод Гаусса–Йордана на бесконечные системы. Первое действие совпадает с классическим методом Гаусса–Йордана. Поэтому, разделив первое уравнение системы (1.1) на $a_{1,1}$, получим

$$x_1 + a_{1,2}^{(0)}x_2 + a_{1,3}^{(0)}x_3 + \dots + a_{1,n}^{(0)}x_n + \dots = b_1^{(0)}, \quad (4.1)$$

где $a_{1,j}^{(0)} = \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}$, $b_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{1,1}}$, $j = 2, 3, \dots$. Вычтем из второго уравнения системы (1.1) уравнение (4.1), умноженное на $a_{2,1}$, и результат разделим на $a_{2,2}^{(1)}$:

$$x_2 + a_{2,3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2,n}^{(1)}x_n + \dots = b_2^{(1)}, \quad (4.2)$$

где $a_{2,j}^{(1)} = \frac{a_{2,j} - a_{1,j}^{(0)}a_{2,1}}{a_{2,2}^{(1)}}$, $b_2^{(1)} = \frac{b_2 - b_1^{(0)}a_{2,1}}{a_{2,2}^{(1)}}$, $j = 2, 3, \dots, N$. Насчет числа N пояснение дадим ниже. Теперь исключим $a_{1,2}^{(0)}x_2$ из уравнения (4.1). Для этого умножим уравнение (4.2) на $a_{1,2}^{(0)}$ и вычтем из уравнения (4.1):

$$x_1 + a_{1,3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1,n}^{(1)}x_n + \dots = b_1^{(1)}. \quad (4.3)$$

Аналогично приведем третье уравнение системы (1.1) к виду

$$x_3 + a_{3,4}^{(2)}x_4 + \dots + a_{3,n}^{(2)}x_n + \dots = b_3^{(2)}. \quad (4.4)$$

Из уравнения (4.3) исключим $a_{1,3}^{(1)}x_3$. Умножив уравнение (4.4) на $a_{1,3}^{(1)}$ и вычтя из уравнения (4.3), имеем

$$x_1 + a_{1,4}^{(2)}x_4 + \dots + a_{1,n}^{(2)}x_n + \dots = b_1^{(2)}.$$

Повторяя данный процесс k_1 раз, получим

$$x_1 + \dots + a_{1,k_1+2}^{(k_1)} x_{k_1+2} + \dots + a_{1,n}^{(k_1)} x_n + \dots = b_1^{(k_1)}. \quad (4.5)$$

При этом следим за разностью $\Delta_1^{k_1} = |b_1^{(k_1)} - b_1^{(k_1-1)}|$. При выполнении для некоторого $k_1 = N$ неравенства $\Delta_1^{k_1} < \varepsilon$ для заданного ε за предполагаемое приближенное решение $\tilde{x}_1$ можно взять

$$\tilde{x}_1 = b_1^{(k_1)}, \quad (4.6)$$

отбрасывая все члены ряда в (4.5), содержащие неизвестные $x_{k_1+2}, x_{k_1+3}, \dots$, и так далее в соответствии с методом простой редукции. Если убеждаемся, что при увеличении k_1 разность $\Delta_1^{k_1}$ не уменьшается, то процесс останавливаем, поскольку исходная бесконечная система не является совместной.

Для получения предполагаемого решения x_2 , повторяя указанный процесс для уравнения (4.2), получим

$$\tilde{x}_2 = b_2^{(k_2)}.$$

Аналогично повторяя данный процесс последовательно для $x_3, x_4, \dots, x_n$, получим первые n предполагаемых приближенных решений системы (1.1):

$$\tilde{x}_j = b_j^{(k_j)}, \quad k_j = N_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

Для того, чтобы убедиться, что числа (4.7) действительно являются приближенными решениями системы (1.1), подставляем их в левую часть системы (1.1) и вычисляем невязки, т.е. разность левых и правых частей системы (1.1). Если эти невязки стремятся к нулю при увеличении n , то эти числа действительно являются приближенными решениями, в противном случае система несовместна.

Таким образом, мы дали краткое описание обобщения метода Гаусса–Йордана для решения неоднородной бесконечной системы (1.1), применяя метод редукции в узком смысле (метод простой редукции). Однако, если мы этим алгоритмом решим систему (1.1) в однородном случае ($b_j \equiv 0$), то получим только тривиальное решение, что видно из (4.7). Это результат применения метода редукции в узком смысле. Поэтому возникает необходимость применения редукции в широком смысле, т.е. в усеченной системе от (1.1) число неизвестных больше, чем число уравнений. Фактически это означает, что усеченная система имеет вырожденную матрицу. Этим отличается, главным образом, решение однородной бесконечной системы от неоднородной. Сначала рассмотрим случай, когда в усеченной системе число неизвестных больше на одно, чем число уравнений. Полагая $x_1 = 1$ и перенося члены $a_{j,1}$ в правую часть в системе (1.1), получим неоднородную систему, которую можно уже решить методом простой редукции с применением метода Гаусса–Йордана для неоднородной системы, описанного выше.

5. Пример решения однородной бесконечной системы

Пример 1. Рассмотрим следующую однородную бесконечную систему:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots &= 0, \\ x_0 + 7x_1 + 21x_2 + 43x_3 + 73x_4 + \dots &= 0, \\ x_0 + 7x_1 + 141x_2 + 883x_3 + 3097x_4 + \dots &= 0, \\ x_0 + 7x_1 + 141x_2 + 5923x_3 + 63577x_4 + \dots &= 0, \\ x_0 + 7x_1 + 141x_2 + 5923x_3 + 426457x_4 + \dots &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

Легко убедиться, что для системы (5.1) гауссовой является следующая система:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p+1)!}{(2p+1)!} x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Действительно, умножая треугольную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

на гауссову матрицу и на столбец свободных членов системы (5.2), получим систему (5.1). На самом деле система (5.2) является периодической бесконечной системой (см. [12, 13]), т. е. коэффициенты матрицы этой системы подчиняются следующему закону:

$$a_{j,j+p} = a_p a_{j+p,j+p} = \frac{(2j+2p+1)!}{(2p+1)!} = \frac{1}{(2p+1)!} (2j+2p+1)!.$$

В работе [12] также показано, что однородная система (5.2) имеет бесконечномерное подпространство нетривиальных решений с базисом

$$\bar{b}_k = \frac{(-1)^j \pi^{2j} k^{2j}}{(2j+1)!}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Так как в бесконечномерном пространстве для любого n существует n базисных векторов, то любое решение системы (5.2) запишется следующим образом:

$$x_j = \sum_{k=0}^n C_k \frac{(-1)^j \pi^{2j} k^{2j}}{(2j+1)!},$$

где $C_k = \text{const}$. Умножая произвольное число C_k на базисный вектор (5.3), получим *фундаментальное решение* (см. [12, 13]):

$$x_j^{(k)} = C_k \frac{(-1)^j \pi^{2j} k^{2j}}{(2j+1)!}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

При $k = 1$ из (5.4) следует первое фундаментальное решение

$$x_j^{(1)} = C_1 \frac{(-1)^j \pi^{2j}}{(2j+1)!}. \quad (5.5)$$

Очевидно, при $C_1 = 1$ получим первый базисный вектор.

Теперь однородную систему попытаемся решить численно с применением обобщенного метода Гаусса–Йордана, описанного в п. 4. Так как при этом используем редукцию в широком смысле, то за первое неизвестное берем произвольное число. Полагая $x_0 = 1$ и перенося члены, содержащие его, в правую часть, получим неоднородную систему. Это дает возможность применения алгоритма Гаусса–Йордана, описанного выше в п. 4. Здесь необходимо отметить, что при получении аналитической формулы (2.9) за произвольное неизвестное в усеченной гауссовой системе взято последнее неизвестное, т. е. x_n . Затем решаем усеченную систему относительно x_n , и обратной рекурсией получим формулу (2.9).

Результаты расчетов первых десяти неизвестных по методу Гаусса–Йордана при $\varepsilon = 10^{-10}$ (таблица 1) совпали с точным решением (5.5) до десяти знаков в дробной части, $C_1 = 1$.

Таблица 1.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...	x_9
1	-1.64493	0.81174	-0.19075	0.02615	-0.00234	...	-0.000000007

Теперь дадим численное сравнение результатов решения системы (5.1) по формуле (2.9), вычисляя предел (2.10) на основании алгоритма, описанного в п. 3, с точным решением (5.5) (табл. 1). Результаты расчетов первых десяти неизвестных совпали с точным решением до шести знаков в дробной части.

Таким образом, формула (2.9) в пределе, а также метод Гаусса–Йордана при $x_0 = 1$ фактически дают первое фундаментальное решение, точнее первый базисный вектор. Естественно, формула (2.9) не дает другие фундаментальные решения. Поэтому первое фундаментальное решение называется *главным фундаментальным решением*.

Здесь необходимо дать некоторый комментарий относительно выбора значения начальной неизвестной $x_0 = 1$. Как показывает выражение (5.4), начальное неизвестное равно 1 для всех фундаментальных решений ($C_k = 1$), т. е. независимо от k . Этому не противоречит и формула (2.9). Это обстоятельство играет важную роль при разрешении вопроса об единственности решения бесконечных систем, но об этом речь пойдет ниже.

Вместе с тем при надлежащем выборе значений начальных неизвестных метод Гаусса–Йордана, в принципе, может дать второе и последующие фундаментальные решения. Для этого поступаем следующим образом. В отличие от предыдущего случая не только первое неизвестное, но и второе принимает произвольное значение. Поэтому, принимая $x_0 = 1$ и полагая, например, $x_1 = -1.6449340668$, подставим их в систему (5.1). Затем полученные выражения перенесем в правую часть, получим неоднородную систему со свободными членами $b_j = -a_{j,0} + 1.611449340668 a_{j,1}$ и к ней применим обобщенный метод Гаусса–Йордана.

Результаты расчетов первых десяти неизвестных при помощи обобщенного метода Гаусса–Йордана (табл. 2) совпали с точным решением до десяти знаков в дробной части. Вычисления проводим до тех пор, пока разница между двумя последовательными итерациями станет меньше $\varepsilon = 10^{-10}$.

Таблица 2.

Неизвестное	Значение
x_0	1
x_1	-1.644934067
x_2	0.811742425
x_3	-0.190751824
x_4	0.026147848
x_5	-0.002346081
x_6	0.000148429
x_7	-0.000006976
x_8	0.000000253
x_9	-0.000000007

Значение $x_1 = -1.6449340668$ принято, исходя из решения (5.4) при $k = 1$, т. е. $x_1 = -\frac{\pi^2}{3!} = -1.6449340668$.

Аналогично поступаем при нахождении третьего фундаментального решения и других последующих. Например, рассмотрим случай $k = 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = -\frac{(2\pi)^2}{3!} = -6.579736267392906$, $x_2 = -\frac{(2\pi)^4}{5!} = 12.987878804534$. Далее, подставляя значения x_0 , x_1 , x_2 в исходную систему и перенося члены, содержащие их, в правую часть, применяем метод Гаусса–Йордана.

Результаты расчетов первых десяти неизвестных при помощи метода Гаусса–Йордана (табл. 3) совпали с точным решением до десяти знаков в дробной части. Вычисления проводим до тех пор, пока разница между двумя последовательными итерациями станет меньше $\varepsilon = 10^{-10}$.

Таблица 3.

Неизвестное	Значение
x_0	1
x_1	−6.57973627
x_2	12.98787881
x_3	−12.20811674
x_4	6.69384904
x_5	−2.40238698
x_6	0.60796434
x_7	−0.11429271
x_8	0.1658859
x_9	−0.00191489

Таким образом, мы показали принципиальную возможность вычисления фундаментальных решений обобщенным методом Гаусса–Йордана. Но при этом выбор значений начальных неизвестных, кроме $x_0 = 1$, при $k > 1$ остается открытым. Умение вычислять главное фундаментальное решение достаточно для ответа на вопрос: “Исходная неоднородная система имеет единственное или бесконечное множество решений?” Отметим, что предыдущий пример показал неединственность решения системы (5.1) в неоднородном случае. Ниже приведем пример бесконечной системы с единственным решением.

Пример 2. Решить неоднородную периодическую бесконечную систему и исследовать единственность ее решения:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{j+p,j+p}}{p!} x_{j+p} = b^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad b \neq 0. \quad (5.6)$$

За $a_{j,j}$ можно взять любое число, например $a_{j,j} = 1$ или $a_{j,j} = b^j$. Так как свободный член имеет вид $b_{j+p} = b_j b_p$, то для таких периодических систем в работах [12, 13] получено точное решение. В нашем случае оно имеет вид

$$x_j = \frac{b^j}{a_{j,j} \exp(b)}. \quad (5.7)$$

Результаты расчетов первых десяти неизвестных при помощи метода Гаусса–Йордана (табл. 4) совпали с точным решением до десяти знаков в дробной части, при этом взяты $a_{j,j} = 1$, $b = 0.5$. Вычисления проводим до тех пор, пока разница между двумя последовательными итерациями станет меньше $\varepsilon = 10^{-10}$.

Таблица 4.

Неизвестное	Значение
x_0	0.6065306597
x_1	0.3032653298
x_2	0.1516326649
x_3	0.075816332
x_4	0.037908166
x_5	0.0189540831
x_6	0.0094770415
x_7	0.0047385207
x_8	0.002369260
x_9	0.001184630

Теперь найдем главное фундаментальное решение системы (5.6) в однородном случае, если оно существует. Полагая $x_0 = 1$ и перенося члены, содержащие его, в правую часть, применим обобщенный метод Гаусса–Йордана, при этом возьмем $a_{j,j} = 1$, $b = 0.5$. Вычисления показывают, что строго частное решение полученной неоднородной системы расходится. Следовательно, по теореме 5 данная система является несовместной, значит система (5.6) в однородном случае не имеет нетривиального решения. Действительно, система (5.6) периодическая, ее нетривиальное решение в однородном случае определяется нулями характеристической функции $f(x)$ [12, 13]:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p x^p = 0 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} x^p = \exp(x).$$

Ясно, что характеристическая функция $f(x)$ не имеет нулей на всей области ее определения, а значит соответствующая однородная система не имеет нетривиальных решений. Следовательно, бесконечная система (5.6) имеет единственное решение (5.7).

Литература

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — М.: ГИТТЛ, 1952.
2. Федоров Ф.М. Об алгоритме Гаусса для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. — 2012. — Т. 19, вып. 1. — С. 133–140.
3. Федоров Ф.М. Неоднородные гауссовы бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. — 2012. — Т. 19, вып. 1. — С. 124–131.
4. Федоров Ф.М., Иванова О.Ф., Павлов Н.Н. Сходимость метода редукции и совместность бесконечных систем // Вестник СВФУ им. М.К. Аммосова. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 14–21.
5. Fedorov F.M. On remarkable relations and the passage to the limit in the theory of infinite systems // J. Generalized Lie Theory Appl. — 2015. — Vol. 9, № 1. — P. 1–9. — DOI:10.4172/1736-4337.1000224.
6. Fedorov F.M. On the theory of infinite systems of linear algebraic equation // TWMS J. Pure Appl. Math. — 2015. — Vol. 6, № 2. — P. 202–212.
7. Федоров Ф.М., Иванова О.Ф., Павлов Н.Н. Об особенностях бесконечных систем // Мат. заметки СВФУ. — 2015. — Т. 22, № 4. — С. 62–78.
8. Fedorov F.M. Introduction to the theory of infinite systems. Theory and practices // Proc. AIP Conference. — 2017. — Vol. 1907: Smart Construction Towards Global Challenges, № 1. — ID Number: 030006.

9. **Иванова О.Ф., Павлов Н.Н., Федоров Ф.М.** О главных и строго частных решениях бесконечных систем // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 3. — С. 351–362.
10. **Koch H.** On regular and irregular solutions of some infinite systems of linear equations // Proc. of the fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 22–28 August 1912. — Cambridge University Press, 1912. — Vol. I. — P. 352–365. — URL: <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1912.1/ICM1912.1.ocf.pdf>.
11. **Натансон И.П.** Об одной бесконечной системе линейных уравнений // Изв. Казанск. Физ.-мат. общества. — 1934–1935. — Т. 7, сер. 3. — С. 97–98.
12. **Федоров Ф.М.** Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. — Новосибирск: Наука, 2009.
13. **Федоров Ф.М.** Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2011.
14. **Riesz F.** Les Systemes D'equation Lineaires a une Infinite D'inconnues. — Paris: Gauthier-Villars, 1913.
15. **Shivakumar P.N., Wong R.** Linear equations in infinite matrices // Linear Alg. Appl. — 1973. — Vol. 7. — P. 53–62.
16. **Каган В.Ф.** Основания теории определителей. — Киев: Гос. изд-во Украины. Одесское отделение, 1922.
17. **Кук Р.** Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: Физматгиз, 1960.
18. **Иванова О.Ф., Павлов Н.Н., Федоров Ф.М.** Решение задачи об изгибе пластинки с заделанными краями путем сведения к бесконечным системам уравнений // Прикладная математика и механика. — 2019. — Т. 83, № 2. — С. 295–302.

Поступила в редакцию 10 июля 2019 г.

После исправления 12 октября 2021 г.

Принята к печати 24 апреля 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Kantorovich L.V., Krylov V.I.** Priblizhennyye metody vysshego analiza. — М.: GITTL, 1952.
2. **Fedorov F.M.** Ob algoritme Gaussa dlya beskonechnykh sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii (BSLAU) // Mat. zametki YaGU. — 2012. — Т. 19, вып. 1. — С. 133–140.
3. **Fedorov F.M.** Neodnorodnye gaussovy beskonechnyye sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii (BSLAU) // Mat. zametki YaGU. — 2012. — Т. 19, вып. 1. — С. 124–131.
4. **Fedorov F.M., Ivanova O.F., Pavlov N.N.** Skhodimost' metoda redukcii i sovmestnost' beskonechnykh sistem // Vestnik SVFU im. M.K. Ammosova. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 14–21.
5. **Fedorov F.M.** On remarkable relations and the passage to the limit in the theory of infinite systems // J. Generalized Lie Theory Appl. — 2015. — Vol. 9, № 1. — P. 1–9. — DOI:10.4172/1736-4337.1000224.
6. **Fedorov F.M.** On the theory of infinite systems of linear algebraic equation // TWMS J. Pure Appl. Math. — 2015. — Vol. 6, № 2. — P. 202–212.
7. **Fedorov F.M., Ivanova O.F., Pavlov N.N.** Ob osobennostyakh beskonechnykh sistem // Mat. zametki SVFU. — 2015. — Т. 22, № 4. — С. 62–78.
8. **Fedorov F.M.** Introduction to the theory of infinite systems. Theory and practices // Proc. AIP Conference. — 2017. — Vol. 1907: Smart Construction Towards Global Challenges, № 1. — ID Number: 030006.

9. **Ivanova O.F., Pavlov N.N., Fedorov F.M.** O glavnyh i strogo chastnyh resheniyah beskonechnykh sistem // *Zh. vychisl. matem. i mat. fiz.* — 2016. — Т. 56, № 3. — С. 351–362.
10. **Koch H.** On regular and irregular solutions of some infinite systems of linear equations // *Proc. of the fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 22–28 August 1912.* — Cambridge University Press, 1912. — Vol. I. — P. 352–365. — URL: <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1912.1/ICM1912.1.ocr.pdf>.
11. **Natanson I.P.** Ob odnoi beskonechnoi sisteme lineinykh uravnenii // *Izv. Kazansk. Fiz.-mat. obschestva.* — 1934–1935. — Т. 7, ser. 3. — С. 97–98.
12. **Fedorov F.M.** Periodicheskie beskonechnye sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii. — Novosibirsk: Nauka, 2009.
13. **Fedorov F.M.** Beskonechnye sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii i ih prilozheniya. — Novosibirsk: Nauka, 2011.
14. **Riesz F.** Les Systemes D'equation Lineaires a une Infinite D'inconnues. — Paris: Gauthier-Villars, 1913.
15. **Shivakumar P.N., Wong R.** Linear equations in infinite vatrices // *Linear Alg. Appl.* — 1973. — Vol. 7. — P. 53–62.
16. **Kagan V.F.** Osnovaniya teorii opredelitelei. — Kiev: Gos. izd-vo Ukrainy. Odesskoe otd-nie, 1922.
17. **Kuk R.** Beskonechnye matricy i prostranstva posledovatel'nostei. — M.: Fizmatgiz, 1960.
18. **Ivanova O.F., Pavlov N.N., Fedorov F.M.** Reshenie zadachi ob izgibe plastinki s zadelannymi krayami putem svedeniya k beskonechnym sistemam uravnenii // *Prikladnaya matematika i mekhanika.* — 2019. — Т. 83, № 2. — С. 295–302.