

УДК 532.13

## СТАЦИОНАРНОЕ ЛАМИНАРНОЕ СМЕШАННО-КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ НАНОЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ ПОТОКА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Х. Тамим, С. Динарванд\*, Р. Хосейни\*\*, Х. Рахими\*, И. Поп\*\*\*

Эракское отделение Исламского университета Азад, Эрак, Иран

\* Исламский университет Азад, Тегеран, Иран

\*\* Технологический университет им. Амир-Кабира, Тегеран, Иран

\*\*\* Университет им. Бабеша-Бойяи, 400084 Клуж-Напока, Румыния

E-mails: tamimhossein@gmail.com, dinarvand@yahoo.com,

hoseinir@aut.ac.ir, rahimi@iauctb.ac.ir, popm.ioan@yahoo.com.uk

Из системы нелинейных обыкновенных уравнений, которые решаются аналитически с использованием метода гомотопического анализа, определено автомоделное решение задачи о стационарном ламинарном смешанно-конвективном течении в пограничном слое в окрестности точки торможения потока вблизи вертикальной проницаемой пластины при наличии магнитного поля и сил плавучести. Рассмотрены наночастицы меди Cu, оксида алюминия  $Al_2O_3$  и диоксида титана  $TiO_2$ , в качестве базовой жидкости была выбрана вода. Исследовано влияние объемной доли наночастиц, параметра проницаемости, параметра магнитного поля и параметра смешанной конвекции на поверхностное напряжение сдвига и поверхностный теплоперенос, а также на скорость и температуру. Показано, что для всех рассмотренных наночастиц значения коэффициента поверхностного трения и локального числа Нуссельта увеличиваются с увеличением объемной доли наночастиц. Наибольшие значения коэффициента поверхностного трения и локального числа Нуссельта получены для наночастиц Cu.

Ключевые слова: пограничный слой, наножидкость, преобразование подобия, течение вблизи точки торможения потока, смешанная конвекция, отсос и вдув, решение в форме ряда, сходимое, метод гомотопического анализа.

DOI: 10.15372/PMTF20160610

**Введение.** Задача о смешанной конвекции над плоской поверхностью является актуальной при проектировании таких технических устройств, как теплообменники, солнечные коллекторы, ядерные реакторы, электронное оборудование и т. д. В работе [1] проведено исследование автомоделных решений задачи о ламинарном свободно-конвективном течении в пограничном слое при наличии поперечного магнитного поля на поверхности перевернутого конуса при смешанных тепловых граничных условиях и вычислены скорость пограничного слоя и температура при различных значениях параметра магнитного поля

и числа Прандтля. В [2] изучены устойчивые ламинарные смешанно-конвективные двумерные течения на вертикальных поверхностях вблизи точки торможения потока в случаях произвольной температуры стенки и произвольного поверхностного теплового потока. Исследования, выполненные в работе [2], были продолжены в [3] для неустановившегося потока, в [4] для вертикальной поверхности, погруженной в микрополярную жидкость, в [5] для магнитогидродинамического смешанно-конвективного течения на вертикальной проницаемой поверхности и в [6] для течения неньютоновской жидкости при наличии теплового излучения.

Наножи́дкости образуются в результате диспергирования твердых частиц нанометровых размеров в базовые жидкости с низкой теплопроводностью, такие как вода, этиленгликоль, различные масла и т. п. Термин “наножи́дкость” впервые введен в работе [7]. Частицы с размерами порядка нанометров имеют уникальные физические и химические свойства, которые исследовались в работах [8–10]. Установлено, что наличие наночастиц в жидкости приводит к значительному увеличению эффективной теплопроводности жидкости, а следовательно, к увеличению скорости теплопереноса. Для стационарного случая задача о смешанно-конвективном течении наножи́дкости вблизи точки торможения потока изучалась в работах [11–13], для нестационарного случая — в работе [14].

В данной работе исследуются стационарное ламинарное смешанно-конвективное течение в окрестности точки торможения потока и теплообмен в электропроводящей наножи́дкости вблизи вертикальной проницаемой поверхности при наличии магнитного поля. Целью исследования является нахождение аналитических решений этой задачи с использованием метода гомотопического анализа [15–21].

**1. Постановка задачи и математическая модель.** Рассмотрим двумерное течение несжимаемой вязкой электропроводящей наножи́дкости вблизи точки торможения потока на вертикальной проницаемой плоской пластине (рис. 1). Предполагается, что наночастицы находятся в тепловом равновесии и между ними отсутствует проскальзывание. Теплофизические свойства жидкости и наночастиц приведены в табл. 1 [8].

Выберем систему координат, в которой ось  $x$  направлена вдоль поверхности пластины, ось  $y$  — по нормали к ней (см. рис. 1). Предполагается, что компонента  $x$  скорости внешнего по отношению к пограничному слою течения  $U(x)$  и температура пластины  $T_w(x)$

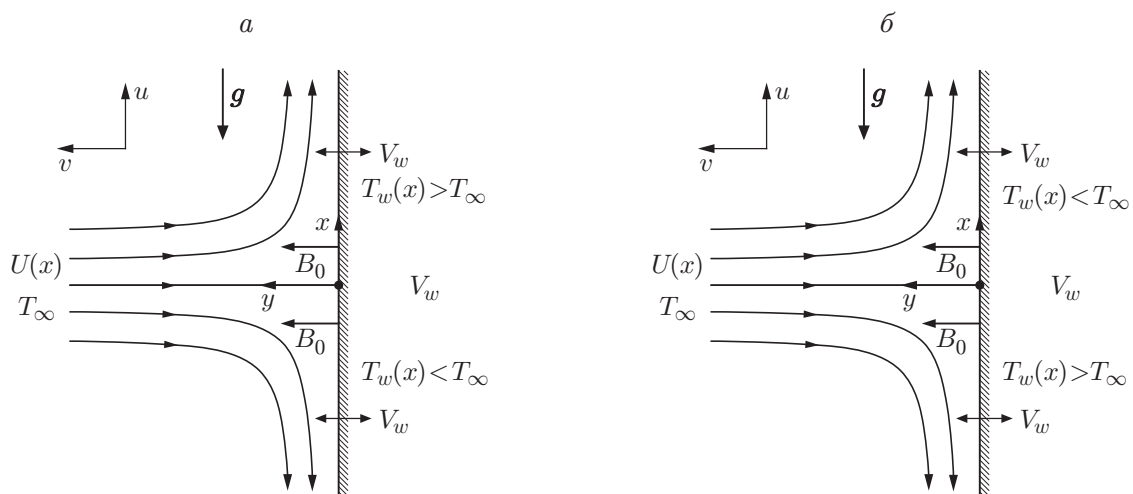


Рис. 1. Схема двумерного течения вблизи критической точки на вертикальной проницаемой поверхности:

$a$  — “способствующий” поток,  $b$  — “препятствующий” поток

Таблица 1

Термофизические свойства жидкости и наночастиц [8]

Компонент наножидкости	$C_p$ , Дж/(кг · К)	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$k$ , Вт/(м·К)	$\alpha \cdot 10^7$ , м <sup>2</sup> /с
Базовая жидкость (вода)	4179,0	997,1	0,613	1,47
Частицы Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	765,0	3970,0	40,0	131,7
Частицы TiO <sub>2</sub>	686,2	4250,0	8,9538	30,7
Частицы Cu	385,0	8933,0	400,0	1163,1

пропорциональны расстоянию от критической точки:  $U(x) = ax$ ,  $T_w(x) = T_\infty + bx$  ( $a > 0$ ,  $b$  — постоянные). Если верхняя половина пластины нагревается, а нижняя — охлаждается ( $b > 0$ ), то вследствие наличия силы плавучести вблизи нагреваемой пластины жидкость движется вверх, а вблизи охлаждаемой пластины — вниз. Такой характер течения способствует основному течению (“способствующий” поток). Если верхняя половина пластины охлаждается, а нижняя — нагревается ( $b < 0$ ), то возникает “препятствующий” поток [22]. С учетом принятых предположений и с использованием модели наножидкости, предложенной в работе [9], основные уравнения неразрывности, импульса и энергии и граничные условия для них в случае ламинарного несжимаемого течения наножидкости в пограничном слое можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{dp}{dx} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho_{nf}} u + \frac{\varphi \rho_s \beta_s + (1 - \varphi) \rho_f \beta_f}{\rho_{nf}} g(T - T_\infty); \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (3)$$

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = V_w^*, \quad T = T_w(x), \\ y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow U(x), \quad T \rightarrow T_\infty. \quad (4)$$

С учетом обобщенного уравнения Бернулли в свободном потоке уравнение (2) принимает вид

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{dp}{dx} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho_{nf}} U. \quad (5)$$

Подставляя (5) в уравнение (2), получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U \frac{dU}{dx} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho_{nf}} (U - u) + \frac{\varphi \rho_s \beta_s + (1 - \varphi) \rho_f \beta_f}{\rho_{nf}} g(T - T_\infty). \quad (6)$$

В (1)–(6)  $u$ ,  $v$  — компоненты скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $T$  — температура наножидкости;  $B_0$  — напряженность однородного магнитного поля;  $\sigma$  — электропроводность;  $\beta_f$ ,  $\beta_s$  — коэффициенты теплового расширения базовой жидкости и наночастиц соответственно;  $g$  — ускорение свободного падения;  $V_w^*$  — однородный поверхностный поток массы (значения  $V_w^* < 0$  соответствуют отсосу,  $V_w^* > 0$  — вдуву);  $\mu_{nf}$ ,  $\alpha_{nf}$ ,  $\rho_{nf}$  — вязкость, температуропроводность и плотность наножидкости соответственно:

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi)^{2,5}}, \quad \alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}, \quad \rho_{nf} = (1 - \varphi) \rho_f + \varphi \rho_s, \\ (\rho C_p)_{nf} = (1 - \varphi) (\rho C_p)_f + \varphi (\rho C_p)_s, \quad \frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_s + 2k_f - 2\varphi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + \varphi(k_f - k_s)},$$

$\varphi$  — объемная доля наночастиц;  $\rho_f$  — плотность базовой жидкости;  $\rho_s$  — плотность наночастиц;  $\mu_f$  — вязкость базовой жидкости;  $k_f, k_s$  — теплопроводность базовой жидкости и наночастиц соответственно;  $k_{nf}$  — эффективная теплопроводность наножидкости, определяемая моделью Максвелла — Гарнетта [8].

Будем искать автомодельное решение уравнений (1)–(3) с граничными условиями (4) в виде

$$\eta = \left(\frac{U}{\nu_f x}\right)^{1/2} y, \quad \psi = (U\nu_f x)^{1/2} f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad (7)$$

где  $\nu_f$  — кинематическая вязкость жидкости;  $\psi$  — функция тока. Так как  $u = \partial\psi/\partial y$ ,  $v = -\partial\psi/\partial x$ , то уравнение (1) выполняется тождественно. Подставляя (7) в уравнения (3), (6), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{(1-\varphi)^{2,5}(1-\varphi+\varphi\rho_s/\rho_f)} f''' + f f'' - f'^2 + 1 + \frac{M}{1-\varphi+\varphi\rho_s/\rho_f} (1-f') + \frac{1-\varphi+\varphi(\rho_s/\rho_f)(\beta_s/\beta_f)}{1-\varphi+\varphi\rho_s/\rho_f} \lambda\theta = 0; \quad (8)$$

$$\frac{k_{nf}/k_f}{1-\varphi+\varphi(\rho C_p)_s/(\rho C_p)_f} \theta'' + \text{Pr} (f\theta' - f'\theta) = 0 \quad (9)$$

с граничными условиями

$$f(0) = V_w, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1; \quad (10)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0. \quad (11)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по  $\eta$ ;  $M = \sigma B_0^2/(\rho_f a)$  — параметр магнитного поля;  $f(0) = V_w = -V_w^*/(\nu_f a)^{1/2}$  — константа (значения  $V_w > 0$  соответствуют отсосу,  $V_w < 0$  — вдуву); при  $M = 0$  (магнитное поле отсутствует),  $V_w = 0$  (пластина непроницаема) и  $\varphi = 0$  (наночастицы отсутствуют) уравнения (8)–(11) сводятся к уравнениям, полученным в [2] для произвольной температуры поверхности при  $n = 1$ ;  $\text{Pr} = \nu_f/\alpha_f$  — число Прандтля;  $\lambda$  — параметр плавучести, или параметр смешанной конвекции:

$$\lambda = \frac{\text{Gr}_x}{\text{Re}_x^2} = g\beta_f \frac{b}{a^2}, \quad \text{Gr}_x = g\beta_f (T_w - T_\infty) \frac{x^3}{\nu_f^2}, \quad \text{Re}_x = \frac{Ux}{\nu_f},$$

$\text{Gr}_x, \text{Re}_x$  — локальные числа Грасгофа и число Рейнольдса соответственно. Заметим, что значения  $\lambda > 0$  соответствуют “способствующему” потоку,  $\lambda < 0$  — “препятствующему” потоку, значение  $\lambda = 0$  соответствует случаю, когда сила плавучести отсутствует (принудительная конвекция).

Коэффициент поверхностного трения  $C_f$  и локальное число Нуссельта  $\text{Nu}_x$  задаются формулами

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_f U^2/2}, \quad \text{Nu}_x = \frac{xq_w}{k_f(T_w - T_\infty)},$$

сдвиговое напряжение на стенке  $\tau_w$  и поток тепла на стенке  $q_w$  — формулами

$$\tau_w = \mu_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}, \quad q_w = -k_{nf} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}.$$

Используя автомодельные переменные (7), получаем

$$C_f \text{Re}_x^{1/2} = \frac{2}{(1-\varphi)^{2,5}} f''(0), \quad \text{Re}_x^{-1/2} \text{Nu}_x = -\frac{k_{nf}}{k_f} \theta'(0).$$

**2. Аналитическое решение.** Для того чтобы применить метод гомотопического анализа, преобразуем определяющие уравнения (8), (9) следующим образом:

$$A_1 f''' + f f'' - f'^2 + 1 + A_2 M(1 - f') + A_3 \lambda \theta = 0, \quad A_4 \theta'' + \text{Pr}(f \theta' - f' \theta) = 0.$$

Здесь

$$A_1 = \frac{1}{(1 - \varphi)^{2,5}(1 - \varphi + \varphi \rho_s / \rho_f)}, \quad A_2 = \frac{1}{1 - \varphi + \varphi \rho_s / \rho_f},$$

$$A_3 = \frac{1 - \varphi + \varphi(\rho_s / \rho_f)(\beta_s / \beta_f)}{1 - \varphi + \varphi \rho_s / \rho_f}, \quad A_4 = \frac{k_{nf} / k_f}{1 - \varphi + \varphi(\rho C_p)_s / (\rho C_p)_f}.$$

Представим функции  $f(\eta)$  и  $\theta(\eta)$  с помощью базисных функций  $\{\eta^k e^{-n\eta}; k \geq 0, n \geq 0\}$  в виде

$$f(\eta) = a_{0,0} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \eta^k e^{-n\eta}, \quad \theta(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n} \eta^k e^{-n\eta} \quad (12)$$

( $a_{k,n}, b_{k,n}$  — коэффициенты). В качестве начальных приближений  $f(\eta)$  и  $\theta(\eta)$  выберем функции

$$f_0(\eta) = V_w - 1 + \eta + e^{-\eta}, \quad \theta_0(\eta) = e^{-\eta}.$$

Введем вспомогательные линейные операторы

$$L_1[f] = f''' - f', \quad L_2[\theta] = \theta'' - \theta,$$

удовлетворяющие условиям

$$L_1[c_1 + c_2 e^\eta + c_3 e^{-\eta}] = 0, \quad L_2[c_4 e^\eta + c_5 e^{-\eta}] = 0$$

( $c_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) — константы).

Построим уравнения деформации нулевого порядка в виде

$$(1 - p)L_1[\hat{f}(\eta; p) - f_0(\eta)] = phN_1[\hat{f}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta; p)],$$

$$(1 - p)L_2[\hat{\theta}(\eta; p) - \theta_0(\eta)] = phN_2[\hat{f}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta; p)];$$

$$\hat{f}(0; p) = V_w, \quad \hat{f}'(0; p) = 0, \quad \hat{f}'(\infty; p) = 1, \quad \hat{\theta}(0; p) = 1, \quad \hat{\theta}(\infty; p) = 0,$$

где  $N_1, N_2$  — нелинейные операторы:

$$N_1[\hat{f}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta; p)] = A_1 \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta^3} + \hat{f}(\eta; p) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \right)^2 +$$

$$+ 1 + A_2 M \left( 1 - \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \right) + A_3 \lambda \hat{\theta}(\eta; p),$$

$$N_2[\hat{f}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta; p)] = A_4 \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \left( \hat{f}(\eta; p) \frac{\partial \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \hat{\theta}(\eta; p) \right),$$

$p \in [0, 1]$  — параметр вложения;  $h$  — ненулевой вспомогательный параметр. Очевидно, что при  $p = 0$  и  $p = 1$  уравнения (13) имеют следующие решения:

$$\hat{f}(\eta; 0) = f_0(\eta), \quad \hat{f}(\eta; 1) = f(\eta),$$

$$\hat{\theta}(\eta; 0) = \theta_0(\eta), \quad \hat{\theta}(\eta; 1) = \theta(\eta). \quad (14)$$

Поскольку значение  $p$  изменяется в диапазоне от 0 до 1, функции  $\hat{f}(\eta; p)$  и  $\hat{\theta}(\eta; p)$  изменяются от  $f_0(\eta)$ ,  $\theta_0(\eta)$  до  $f(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$ . С использованием теоремы Тейлора и с учетом уравнений (14) получаем

$$\begin{aligned} \hat{f}(\eta; p) &= f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(\eta)p^m, & f_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \hat{f}(\eta; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}, \\ \hat{\theta}(\eta; p) &= \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{+\infty} \theta_m(\eta)p^m, & \theta_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Сходимость ряда (15) существенно зависит от вспомогательного параметра  $h$ . Если параметр  $h$  выбран таким образом, что ряд (15) сходится при  $p = 1$ , то в силу уравнений (14) имеем

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{+\infty} \theta_m(\eta).$$

Чтобы построить уравнения деформации  $m$ -го порядка, продифференцируем уравнения (13) по  $p$   $m$  раз, разделим на  $m!$ , а затем положим  $p = 0$ . Полученные в результате уравнения деформации  $m$ -го порядка имеют вид

$$L_1[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = hR_{1,m}(\eta), \quad (16)$$

$$L_2[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] = hR_{2,m}(\eta);$$

$$\begin{aligned} f_m(0) = 0, \quad f'_m(0) = 0, \quad f'_m(\infty) = 0, \\ \theta_m(0) = 0, \quad \theta_m(\infty) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} R_{1,m}(\eta) &= A_1 f'''_{m-1}(\eta) + \sum_{n=0}^{m-1} [f_n(\eta) f''_{m-1-n}(\eta) - f'_n(\eta) f'_{m-1-n}(\eta)] + \\ &\quad + 1 - \chi_m + A_2 M(1 - f'_{m-1}(\eta)) + A_3 \lambda \theta_{m-1}(\eta), \end{aligned}$$

$$R_{2,m}(\eta) = A_4 \theta''_{m-1}(\eta) + \text{Pr} \sum_{n=0}^{m-1} [f_n(\eta) \theta'_{m-1-n}(\eta) - f'_n(\eta) \theta_{m-1-n}(\eta)],$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

Обозначим через  $f_m^*(\eta)$  и  $\theta_m^*(\eta)$  частные решения уравнений (16), (17). Общие решения этих уравнений имеют вид

$$f_m(\eta) = f_m^*(\eta) + c_1 + c_2 e^\eta + c_3 e^{-\eta}, \quad \theta_m(\eta) = \theta_m^*(\eta) + c_4 e^\eta + c_5 e^{-\eta},$$

где коэффициенты  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  определяются граничными условиями (17):

$$c_2 = c_5 = 0, \quad c_1 = -c_3 - f_m^*(0), \quad c_3 = \left. \frac{\partial f_m^*(\eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}, \quad c_4 = -\theta_m^*(0).$$

На рис. 2 приведены зависимости  $f'''(0)$  и  $\theta''(0)$ , полученные для приближения 12-го порядка. Из рис. 2 следует, что значения  $h$ , при которых ряды (12) сходятся, находятся в диапазоне  $-0,7 \leq h \leq -0,2$ .

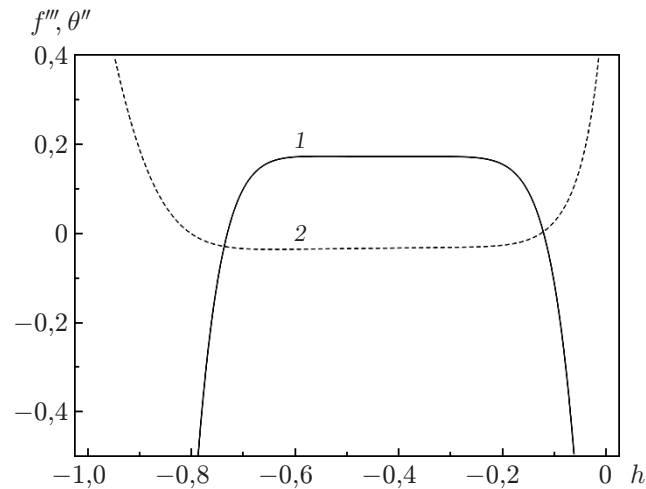


Рис. 2.  $h$ -кривые для функций  $f'''(0)$  (1) и  $\theta''(0)$  (2), полученные при аппроксимации 12-го порядка для наножидкости Cu — вода при  $Pr = 6,2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\varphi = 0,2$ ,  $M = 1$ ,  $V_w = 0,1$

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** В табл. 2 приведены значения безразмерного коэффициента поверхностного трения  $f'''(0)$  и локального числа Нуссельта  $-\theta''(0)$  при  $\varphi = 0$  и различных значениях  $Pr$ . Из табл. 2 следует, что результаты, полученные в данной работе, хорошо согласуются с результатами работ [2–5].

В табл. 3 приведены значения коэффициента поверхностного трения  $Re_x^{1/2} C_f$  и локального числа Нуссельта  $Nu_x Re_x^{-1/2}$  при различных значениях объемной доли наночастиц  $\varphi$ . Для проверки точности решения, полученного с использованием метода гомотопического анализа, приведены результаты численных расчетов, полученные методом пристрелки в сочетании со схемой Рунге — Кутты. Из табл. 3 следует, что все эти результаты хорошо согласуются.

В табл. 4 приведены значения коэффициента поверхностного трения  $Re_x^{1/2} C_f$  и локального числа Нуссельта  $Nu_x Re_x^{-1/2}$  при различных значениях  $\varphi$ ,  $M$ ,  $V_w$  для наножидкости Cu — вода. Из табл. 4 следует, что при увеличении  $\varphi$ ,  $M$ ,  $V_w$  значения коэффициента поверхностного трения и локального числа Нуссельта увеличиваются и в случае “способствующего” потока, и в случае “препятствующего” потока.

На рис. 3 представлены профили скорости и температуры при  $M = 1,0$ ,  $\lambda = 1$  и различных значениях  $\varphi$ . Видно, что с увеличением  $\varphi$  толщина пограничного слоя уменьшается, в то время как толщина теплового граничного слоя увеличивается. Следует отметить, что при  $\varphi = 0,1$  профиль скорости близок к профилю при  $\varphi = 0,2$ . Таким образом, с увеличением количества наночастиц влияние объемной доли наночастиц на скорость уменьшается.

На рис. 4 представлены профили скорости и температуры при  $\varphi = 0,2$ ,  $V_w = 0,1$ ,  $\lambda = 1$ . Видно, что при увеличении  $M$  толщина пограничного слоя и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются. Следовательно, коэффициент поверхностного трения  $Re_x^{1/2} C_f$  и локальное число Нуссельта  $Nu_x Re_x^{-1/2}$  увеличиваются при увеличении  $M$ . Влияние магнитного поля на температуру является менее существенным по сравнению с его влиянием на скорость.

На рис. 5 показаны профили скорости и температуры при  $M = 1$ ,  $\lambda = 1$  и различных значениях  $V_w$ . Видно, что при отсосе как скорость, так и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются, в то время как при вдуве они увеличиваются.

Таблица 2

Значения  $f''(0)$  и  $-\theta'(0)$  при  $V_w = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\lambda = 1$  и различных значениях  $Gr$

Gr	$f''(0)$					$-\theta'(0)$				
	Данные работы [2]	Данные работы [3]	Данные работы [4]	Данные работы [5]	Данные настоящей работы	Данные работы [2]	Данные работы [3]	Данные работы [4]	Данные работы [5]	Данные настоящей работы
0,7	1,706 376	1,7064	1,7063	1,7063	1,7063	0,764087	0,7641	0,7641	0,7641	0,7641
1,0	—	—	—	1,6754	1,6754	—	—	—	0,8708	0,8707
7,0	1,517 952	1,5180	1,5179	1,5179	1,5178	1,722 775	1,7223	1,7224	1,7224	1,7225
10,0	—	—	—	1,4928	1,4926	—	—	—	1,9446	1,9448
20,0	1,448 520	1,4485	1,4485	1,4485	1,4488	2,458 836	2,4574	2,4576	2,4576	2,4572
40,0	1,410 094	—	1,4101	1,4101	1,4104	3,103 703	—	3,1011	3,1011	3,1015
50,0	—	—	—	1,3989	1,3985	—	—	—	3,3415	3,3419

Таблица 3

Зависимость коэффициента поверхностного трения и локального числа Нуссельта от объемной доли наночастиц для различных наночастиц при  $M = 1$ ,  $V_w = 0$

Параметр течения	$\varphi$	Cu						Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>						TiO <sub>2</sub>					
		$\lambda = 1$		$\lambda = -1$		$\lambda = 1$		$\lambda = -1$		$\lambda = 1$		$\lambda = -1$		$\lambda = 1$		$\lambda = -1$			
		АМ-МГА	ЧМ-МРК	АМ-МГА	ЧМ-МРК	АМ-МГА	ЧМ-МРК	АМ-МГА	ЧМ-МРК	АМ-МГА	ЧМ-МРК	АМ-МГА	ЧМ-МРК	АМ-МГА	ЧМ-МРК	АМ-МГА	ЧМ-МРК		
$Re_x^{1/2} C_f$	0	3,6880	3,6880	2,6262	2,6262	3,6880	3,6880	2,6262	2,6262	3,6880	3,6880	2,6262	2,6262	3,6880	3,6880	2,6262	2,6262		
	0,05	4,2859	4,2858	3,2213	3,2211	4,0515	4,0516	2,9829	2,9828	4,0625	4,0626	4,0625	4,0626	4,0625	4,0626	2,9994	2,9995		
	0,10	4,9294	4,9295	3,8532	3,8530	4,4557	4,4556	3,3802	3,3804	4,4787	4,4789	4,4787	4,4789	4,4787	4,4789	3,4136	3,4138		
	0,15	5,6355	5,6357	4,5395	4,5398	4,9096	4,9094	3,8265	3,8267	4,9463	4,9460	4,9463	4,9460	4,9463	4,9460	3,8782	3,8780		
	0,20	6,4219	6,4217	5,3005	5,3002	5,4221	5,4225	4,3334	4,3331	5,4729	5,4725	5,4729	5,4725	5,4729	5,4725	4,4026	4,4031		
$Nu_x Re_x^{-1/2}$	0	1,7380	1,7380	1,6101	1,6101	1,7380	1,7380	1,6101	1,6101	1,7380	1,7380	1,6101	1,6101	1,7380	1,7380	1,6101	1,6101		
	0,05	1,9186	1,9185	1,7992	1,7991	1,8762	1,8761	1,7510	1,7509	1,8535	1,8534	1,8535	1,8534	1,8535	1,8534	1,7308	1,7309		
	0,10	2,0982	2,0980	1,9846	1,9848	2,0147	2,0148	1,8935	1,8933	1,9677	1,9675	1,9677	1,9675	1,9677	1,9675	1,8509	1,8507		
	0,15	2,2774	2,2776	2,1702	2,1700	2,1546	2,1544	2,0366	2,0368	2,0803	2,0805	2,0803	2,0805	2,0803	2,0805	1,9693	1,9696		
	0,20	2,4611	2,4614	2,3568	2,3571	2,2961	2,2964	2,1834	2,1830	2,1923	2,1927	2,1923	2,1927	2,1923	2,1927	2,0874	2,0878		

Примечание. АМ — аналитический метод, ЧМ — численный метод, МГА — метод гомотопического анализа, МРК — метод Рунге — Кутты четвертого порядка.



Таблица 4

Значения коэффициента поверхностного трения и локального числа Нуссельта при различных значениях  $\varphi$ ,  $M$ ,  $V_w$  для наножидкости Cu — вода

$\varphi$	$M$	$V_w$	$\lambda = 1$		$\lambda = -1$	
			$Re_x^{1/2} C_f$	$Nu_x Re_x^{-1/2}$	$Re_x^{1/2} C_f$	$Nu_x Re_x^{-1/2}$
0	1,00	0,10	3,7622	2,0993	2,7810	1,9887
0,05	1,00	0,10	4,4109	2,2800	3,4155	2,1755
0,10	1,00	0,10	5,1047	2,4590	4,0888	2,3593
0,15	1,00	0,10	5,8600	2,6387	4,8181	2,5422
0,20	1,00	0,10	6,6956	2,8202	5,6220	2,7270
0,20	0,00	0,10	6,1135	2,7683	4,9669	2,6621
0,20	1,00	0,10	6,6956	2,8202	5,6220	2,7270
0,20	2,00	0,10	7,2281	2,8644	6,2114	2,7807
0,20	3,00	0,10	7,7216	2,9028	6,7514	2,8265
0,20	4,00	0,10	8,1837	2,9368	7,2524	2,8664
0,20	1,00	0	6,4217	2,4614	5,3002	2,3571
0,20	1,00	0,10	6,6956	2,8202	5,6220	2,7270
0,20	1,00	0,20	6,9790	3,2062	5,9539	3,1230
0,20	1,00	0,30	7,2728	3,6163	6,2954	3,5429
0,20	1,00	0,40	7,5766	4,0483	6,6455	3,9838

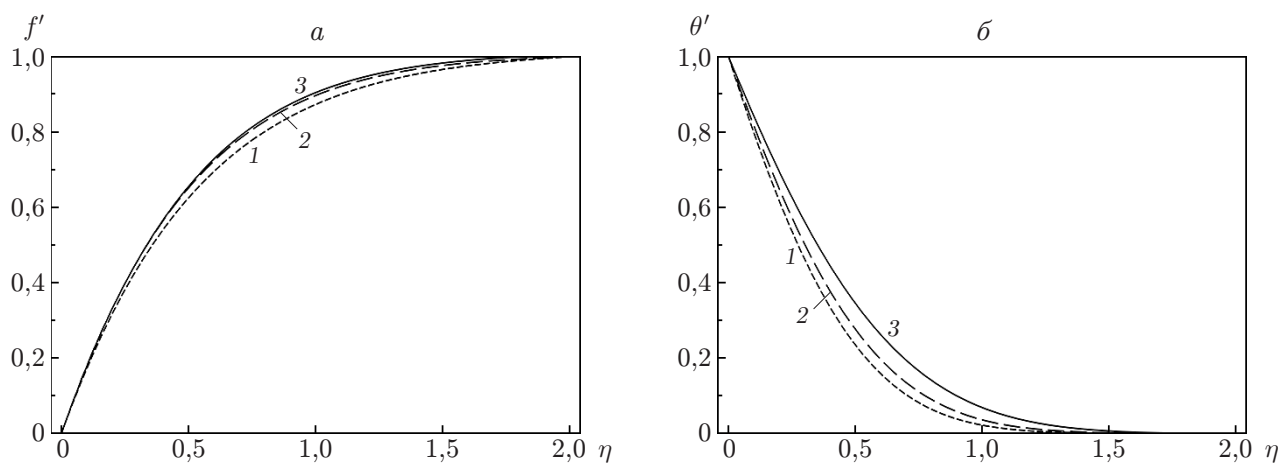


Рис. 3. Профили скорости  $f'(\eta)$  (а) и температуры  $\theta'(\eta)$  (б) при  $Pr = 6,2$ ,  $M = 1$ ,  $V_w = 0,1$ ,  $\lambda = 1$  и различных значениях  $\varphi$ :  
1 —  $\varphi = 0$ , 2 —  $\varphi = 0,1$ , 3 —  $\varphi = 0,2$

На рис. 6 показано влияние параметра плавучести  $\lambda$  на скорость и температуру. Видно, что наибольшие толщины пограничного и теплового пограничного слоев имеют место в случае “препятствующего” потока, в то время как наименьшие — в случае “способствующего” потока. Следует отметить, что при больших значениях параметра смешанной конвекции  $\lambda$  наличие “способствующего” потока приводит к увеличению скорости вблизи стенки. Из рис. 6,а следует, что в случае “препятствующего” потока ( $\lambda < 0$ ) при уменьшении параметра  $\lambda$  скорость в пограничном слое существенно уменьшается, при малых значениях  $\lambda$  вблизи поверхности возникает обратное течение. Влияние величины  $\lambda$  на температуру является менее существенным.

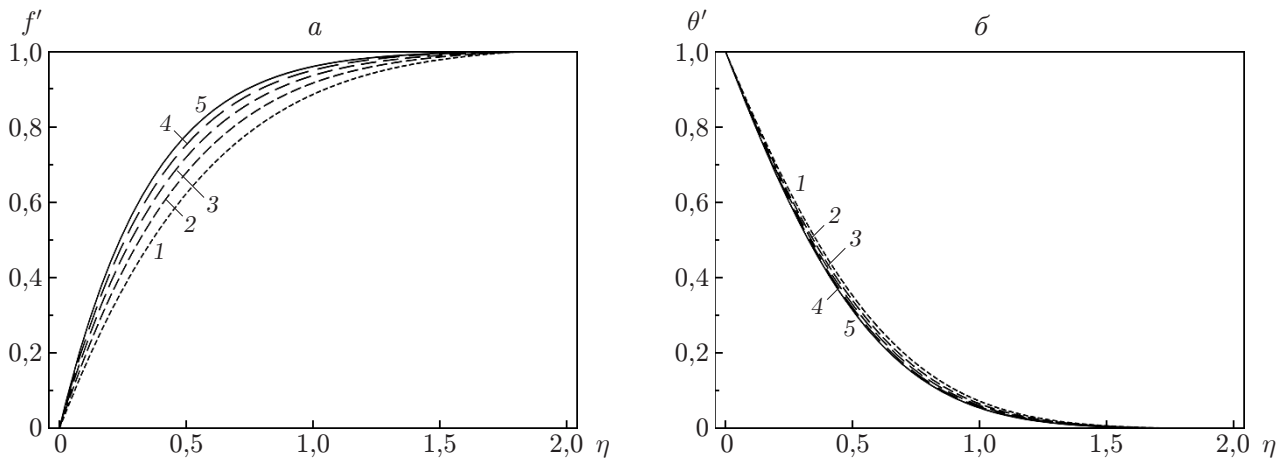


Рис. 4. Профили скорости  $f'(\eta)$  (а) и температуры  $\theta'(\eta)$  (б) при  $Pr = 6,2$ ,  $\varphi = 0,2$ ,  $V_w = 0,1$ ,  $\lambda = 1$  и различных значениях  $M$ :  
 1 —  $M = 0$ , 2 —  $M = 2$ , 3 —  $M = 4$ , 4 —  $M = 6$ , 5 —  $M = 8$

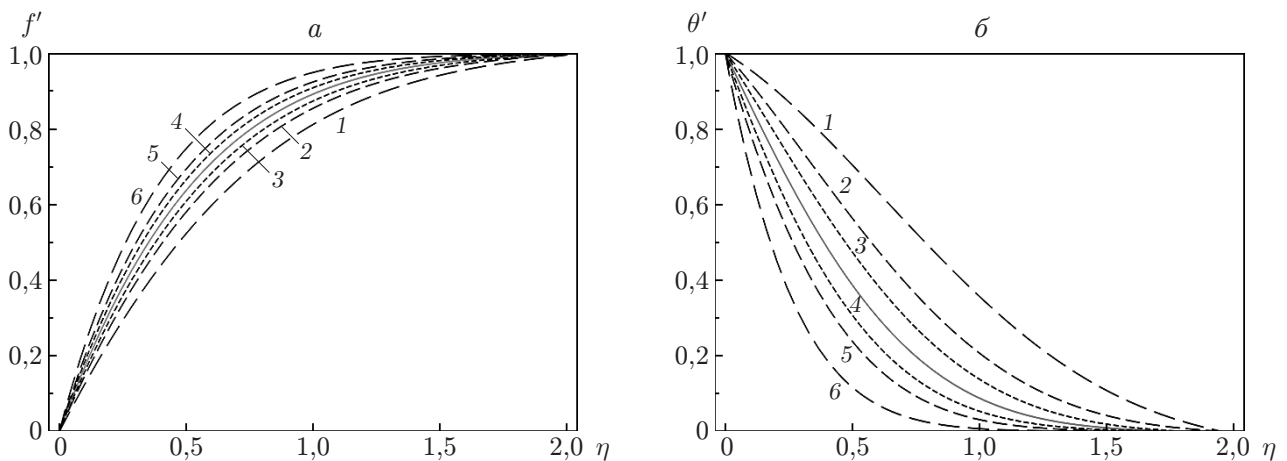


Рис. 5. Профили скорости  $f'(\eta)$  (а) и температуры  $\theta'(\eta)$  (б) при  $Pr = 6,2$ ,  $\varphi = 0,2$ ,  $M = 1$ ,  $\lambda = 1$  и различных значениях  $V_w$ :  
 сплошная линия — непроницаемая пластина, штриховые — проницаемая пластина (1 —  $V_w = -0,8$ , 2 —  $V_w = -0,4$ , 3 —  $V_w = -0,2$ , 4 —  $V_w = 0,2$ , 5 —  $V_w = 0,4$ , 6 —  $V_w = 0,8$ )

Влияние числа Прандтля на скорость и температуру жидкости, содержащей наночастицы  $Cu$ , показано на рис. 7. Видно, что с увеличением числа Прандтля толщина пограничного слоя увеличивается, в то время как температура уменьшается. Как и следовало ожидать, влияние числа Прандтля на температуру является более существенным по сравнению с его влиянием на скорость. При больших числах Прандтля (например,  $Pr = 50$ ) толщина пограничного слоя больше толщины теплового пограничного слоя (см. рис. 7), в то время как при малых числах Прандтля ( $Pr = 0,02$ ) — меньше.

На рис. 8 приведены профили скорости и температуры для различных типов наножидкости. Видно, что скорость и температура слабо зависят от материала наночастиц, если их объемная доля мала. Для наножидкости  $Cu$  — вода пограничный и тепловой пограничный слой имеют наименьшую толщину. Это обусловлено тем, что  $Cu$  имеет наибольшую теплопроводность по сравнению с другими рассмотренными частицами наножидкости. Наночастицы  $Cu$  имеют большую температуропроводность (по сравнению с  $Al_2O_3$  и  $TiO_2$ ),

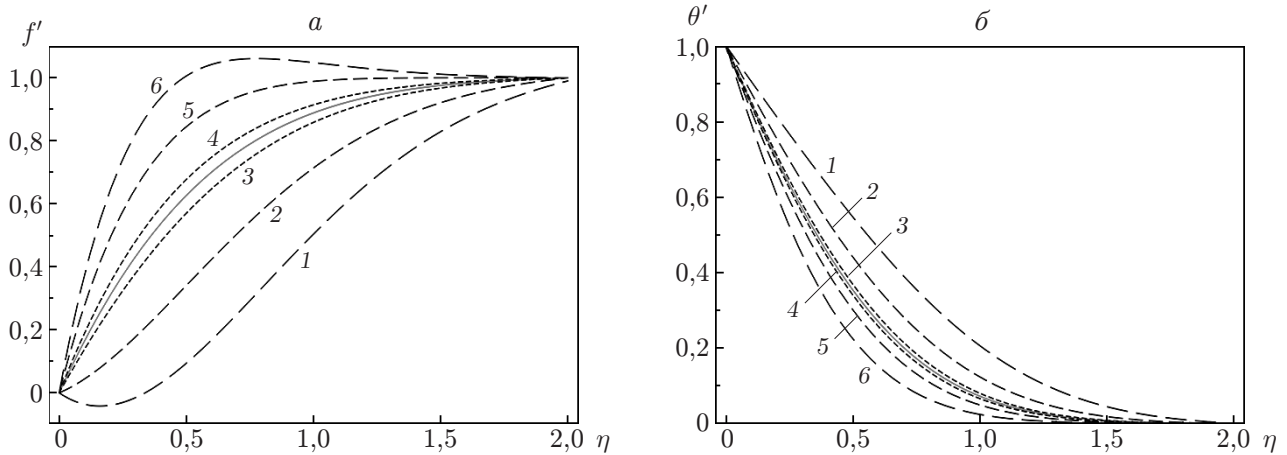


Рис. 6. Профили скорости  $f'(\eta)$  (а) и температуры  $\theta'(\eta)$  (б) при  $Pr = 6,2$ ,  $\varphi = 0,2$ ,  $M = 1$ ,  $V_w = 0,1$  и различных значениях  $\lambda$ :

сплошная линия — непроницаемая пластина, штриховые — проницаемая пластина (1 —  $\lambda = -20$ , 2 —  $\lambda = -10$ , 3 —  $\lambda = -2$ , 4 —  $\lambda = 2$ , 5 —  $\lambda = 10$ , 6 —  $\lambda = 20$ )

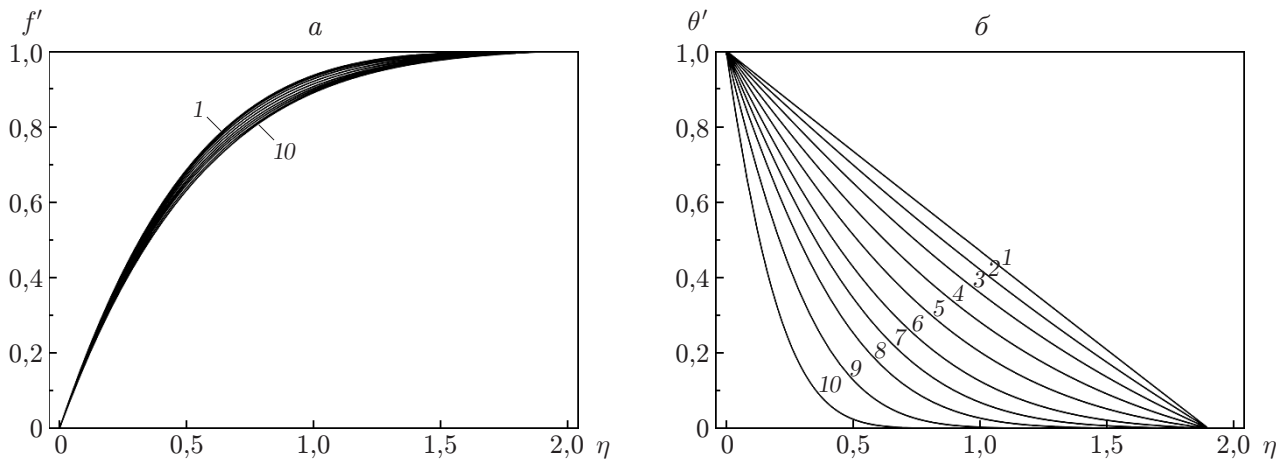


Рис. 7. Профили скорости  $f'(\eta)$  (а) и температуры  $\theta'(\eta)$  (б) при  $\lambda = 1,0$ ,  $\varphi = 0,2$ ,  $M = 1$ ,  $V_w = 0,1$  и различных значениях  $Pr$ :

сплошная линия — непроницаемая пластина, штриховые — проницаемая пластина (1 —  $Pr = 0,02$ , 2 —  $Pr = 0,2$ , 3 —  $Pr = 0,72$ , 4 —  $Pr = 1,5$ , 5 —  $Pr = 2,5$ , 6 —  $Pr = 4,0$ , 7 —  $Pr = 6,2$ , 8 —  $Pr = 10,0$ , 9 —  $Pr = 20,0$ , 10 —  $Pr = 50,0$ )

вследствие чего градиент температуры в наножидкости с этими частицами меньше, чем в наножидкостях с частицами  $Al_2O_3$  и  $TiO_2$ .

**4. Выводы.** В работе с использованием метода гомотопического анализа получены аналитические решения для стационарного ламинарного смешанно-конвективного течения в пограничном слое наножидкости вблизи вертикальной проницаемой плоской пластины под влиянием магнитного поля. Для всех рассмотренных типов наночастиц (оксид алюминия, оксид титана, оксид меди) и воды в качестве базовой жидкости наблюдается увеличение коэффициента поверхностного трения и локального числа Нуссельта с увеличением объемной доли наночастиц. Коэффициент поверхностного трения и скорость переноса тепла на поверхности являются наибольшими для наножидкости  $Cu$  — вода. Следует отметить, что тип наножидкости оказывает существенное влияние на теплоперенос. Наи-

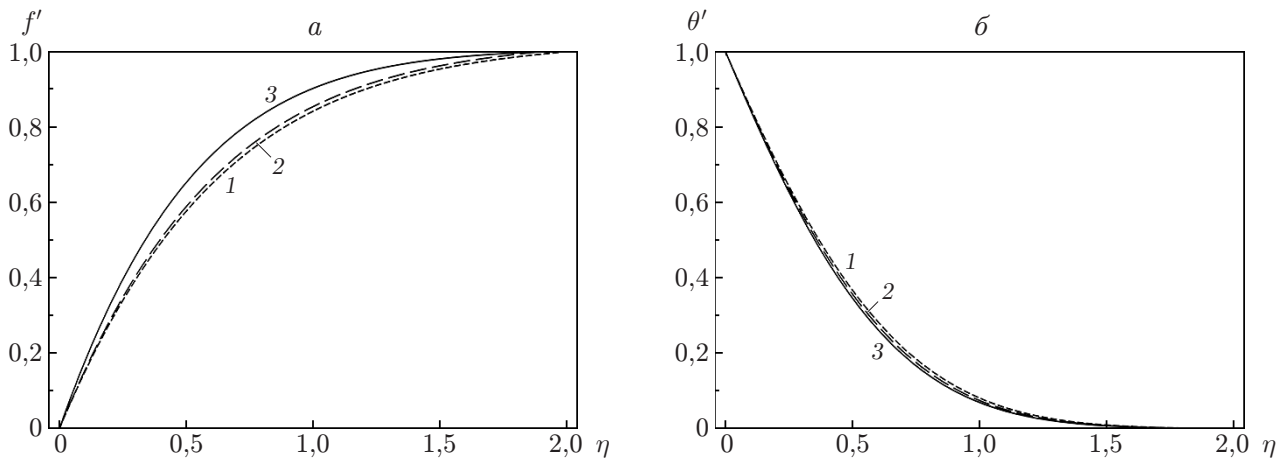


Рис. 8. Профили скорости  $f'(\eta)$  (а) и температуры  $\theta'(\eta)$  (б) при  $Pr = 6,2$ ,  $\lambda = 1,0$ ,  $\varphi = 0,2$ ,  $M = 1$ ,  $V_w = 0,1$  для различных наножидкостей:  
 1 —  $Al_2O_3$  — вода, 2 —  $TiO_2$  — вода, 3 —  $Cu$  — вода

большие толщины пограничного и теплового пограничного слоев имеют место в случае “препятствующего” потока, в то время как наименьшие — в случае “способствующего” потока.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ece M. C.** Free convection flow about a cone under mixed thermal boundary conditions and a magnetic field // *Appl. Math. Model.* 2005. V. 29. P. 1121–1134.
2. **Ramachandran N., Chen T. S., Armaly B. F.** Mixed convection in stagnation flows adjacent to a vertical surface // *Trans. ASME. J. Heat Transfer.* 1988. V. 110. P. 373–377.
3. **Devi C. D. S., Takhar H. S., Nath G.** Unsteady mixed convection flow in stagnation region adjacent to a vertical surface // *Heat Mass Transfer.* 1991. V. 26. P. 71–79.
4. **Lok Y. Y., Amin N., Campean D., Pop I.** Steady mixed convection flow of a micropolar fluid near the stagnation point on a vertical surface // *Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow.* 2005. V. 15. P. 654–670.
5. **Ishak A., Nazar R., Bachok N., Pop I.** MHD mixed convection flow near the stagnation-point on a vertical permeable surface // *Phys. A.* 2010. V. 389. P. 40–46.
6. **Mahmoud M. A. A., Megahed A. M.** Thermal radiation effect on mixed convection heat and mass transfer of a non-Newtonian fluid over a vertical surface embedded in a porous medium in the presence of thermal diffusion and diffusion-thermo effects // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 1. P. 90–99.
7. **Choi S. U. S.** Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // *Developments, applications of non-Newtonian flows.* N. Y.: ASME, 1995. FED-V. 231/MD-V. 66. P. 99–105.
8. **Oztop H. F., Abu-Nada E.** Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 2008. V. 29. P. 1326–1336.
9. **Tiwari R. J., Das M. K.** Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2007. V. 50. P. 2002–2018.
10. **Maïga S. E. B., Palm S. J., Nguyen C. T., et al.** Heat transfer enhancement by using nanofluids in forced convection flows // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 2005. V. 26. P. 530–546.

11. **Kandasamy R., Muhaimin I., Kamachi G.** Scaling group transformation for the effect of temperature-dependent nanofluid viscosity on an MHD boundary layer past a porous stretching surface // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2011. V. 52, N 6. P. 931–940.
12. **Tamim H., Dinarvand S., Hosseini R., Pop I.** MHD mixed convection stagnation-point flow of a nanofluid over a vertical permeable surface: a comprehensive report of dual solutions // *Heat Mass Transfer.* 2014. V. 50, N 5. P. 639–650.
13. **Kandasamy R., Muhaimin I.** Homotopy analysis method for thermophoretic particle deposition effect on magnetohydrodynamic mixed convective heat and mass transfer past a porous wedge in the presence of suction // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2010. V. 51, N 2. P. 249–260.
14. **Tamim H., Dinarvand S., Hosseini R., et al.** Unsteady mixed convection flow of a nanofluid near orthogonal stagnation point on a vertical permeable surface // *J. Process Mech. Engng.* 2014. V. 228, N 3. P. 226–237.
15. **Liao S. J.** The proposed homotopy analysis technique for the solution of non-linear problems: Ph. D. Thesis / Shanghai Jiao Tong Univ., Shanghai, 1992.
16. **Liao S. J.** Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method. Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2003.
17. **Liao S. J.** Beyond perturbation: a review on the basic ideas of the homotopy analysis method and its applications // *Adv. Mech.* 2008. V. 38. P. 1–34. (In Chinese.)
18. **Liao S. J.** On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids over a stretching sheet // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 488. P. 189–212.
19. **Liao S. J.** Series solutions of unsteady boundary-layer flows over a stretching flat plate // *Stud. Appl. Math.* 2006. V. 117, N 3. P. 2529–2539.
20. **Liao S. J., Tan Y.** A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations // *Stud. Appl. Math.* 2007. V. 119. P. 297–355.
21. **Liao S. J.** Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2009. V. 14. P. 983–997.
22. **Lok Y. Y., Pop I., Ingham D. B., Amin N.** Mixed convection flow of a micropolar fluid near a non-orthogonal stagnation-point on a stretching vertical sheet // *Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow.* 2009. V. 19. P. 459–483.

*Поступила в редакцию 7/II 2014 г.,  
в окончательном варианте — 13/VIII 2014 г.*

---