

УДК 532.592; 517.958

ДОКРИТИЧЕСКИЕ И СВЕРХКРИТИЧЕСКИЕ СДВИГОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

В. М. Тешуков, А. Будлал*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

* Лаборатория механики Университета естественных наук и технологий г. Лилля,
59655 Вильнев д'Аск, Франция

E-mail: teshukov@hydro.nsc.ru

Вводятся понятия докритических и сверхкритических течений для модели длинноволнового приближения, описывающей стационарные вихревые движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Анализируются сдвиговые течения слоя жидкости над неровным дном. Построены точные решения, описывающие различные режимы течения, изучены свойства течений в зависимости от режима течения. Рассмотрены течения с возвратными линиями тока.

Ключевые слова: длинноволновое приближение, сдвиговое течение, свободная граница, докритические и сверхкритические режимы, рециркуляционная зона.

1. Уравнения движения. Рассматриваются плоскопараллельные движения идеальной несжимаемой жидкости в слое $\eta(x) < y < h(t, x)$ со свободной границей и неровным дном. Предполагается, что характерный вертикальный масштаб задачи H_0 много меньше типичной длины волны L_0 , так что отношение H_0/L_0 много меньше единицы ($H_0/L_0 \ll 1$). В этом случае применима модель длинноволнового приближения (приближения мелкой воды [1, 2]):

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x + vu_y) + p_x &= 0, & p_y &= -\rho g, \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ — постоянная плотность жидкости; p — давление; u, v — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости; g — ускорение свободного падения; t — время; x, y — декартовы координаты на плоскости. Последнее уравнение системы (1.1) позволяет ввести функцию тока ψ , удовлетворяющую соотношениям

$$\psi_y = u, \quad \psi_x = -v.$$

Потребуем выполнения следующих граничных условий на заданной границе $y = \eta(x)$ и свободной границе $y = h(t, x)$:

$$\begin{aligned} y = \eta: & \quad v = u\eta_x, \\ y = h: & \quad h_t + uh_x = v, \quad p = p_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00253) и в рамках Программы совместных исследований CNRS — РАН (№ 16364) и Программы Министерства образования Российской Федерации “Развитие научного потенциала высшей школы” (№ 8298).

В длинноволновом приближении условие отсутствия завихренности сводится к соотношению $u_y = 0$. При выполнении этого условия постановка задачи (1.1), (1.2) приводит к классическим уравнениям модели мелкой воды, описывающим движения с вектором скорости, не изменяющимся с глубиной. В данной работе изучаются вихревые течения общего вида, характеризующиеся неравенством $u_y \neq 0$. Будем также называть их сдвиговыми течениями. При описании сдвиговых течений со свободными границами удобно использовать эйлерово-лагранжевы координаты t, x, λ ($0 < \lambda < \lambda_1$, $\lambda_1 = \text{const}$), которые вводятся следующим образом (см. [3]):

$$\begin{aligned} y = \Phi(t, x, \lambda), \quad \Phi_t(t, x, \lambda) + u\Phi_x(t, x, \lambda) &= v, \\ \Phi(0, x, \lambda) &= \frac{\lambda}{\lambda_1} h_0(x) + \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} \eta(x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

При таком переходе неизвестной свободной границе $y = h$ соответствует прямая $\lambda = \lambda_1$ в плоскости новых переменных, а дну $y = \eta$ — прямая $\lambda = 0$. В новых координатах уравнения движения принимают вид

$$u_t + uu_x + g \int_0^{\lambda_1} H_x d\lambda + g\eta_x = 0, \quad H_t + (uH)_x = 0. \quad (1.4)$$

Здесь $H(t, x, \lambda) = \Phi_\lambda(t, x, \lambda)$. Глубина жидкого слоя δ связана с $H(t, x, \lambda)$ соотношением

$$\delta = h - \eta = \int_0^{\lambda_1} H d\lambda. \quad (1.5)$$

Если функции $u(t, x, \lambda)$, $H(t, x, \lambda)$ найдены, то $\Phi(t, x, \lambda)$ восстанавливается интегрированием:

$$\Phi(t, x, \lambda) = \int_0^{\lambda} H(t, x, \lambda') d\lambda' + \eta(x),$$

а $v(t, x, \lambda)$ определяется из второго соотношения (1.3).

При обратном переходе к переменным t, x, y зависимость $y = \Phi(t, x, \lambda)$ обращается. После подстановки $\lambda = \lambda(t, x, y)$ в представление найденного решения задачи (1.1), (1.2) находим параметры течения в исходных переменных t, x, y . Обратный переход осуществляется однозначно при выполнении условия $H(t, x, \lambda) \neq 0$.

2. Стационарные сдвиговые течения. Рассмотрим стационарные течения и выберем ψ в качестве переменной λ . Интегрируя уравнения (1.4), получаем соотношения

$$u^2/2 + gh = F(\psi), \quad H = 1/u. \quad (2.1)$$

Здесь $F(\psi)$ — произвольная функция. В дальнейшем будем считать ее заданной. Последнее соотношение в (2.1) следует из определения функции ψ :

$$H = y_\psi = 1/\psi_y = 1/u.$$

Используя интегралы уравнений стационарного движения, выразим скорость u и функцию H через $F(\psi)$ и неизвестную величину h :

$$u = \pm \sqrt{2(F(\psi) - gh)}, \quad H = \pm 1/\sqrt{2(F(\psi) - gh)}. \quad (2.2)$$

Сначала рассмотрим стационарные течения, в которых функция u не меняет знак, при этом для определенности выбирается $u > 0$ и соответственно знак “+” в формулах (2.2).

Подставляя H в соотношение (1.5), получаем уравнение для определения возвышения свободной границы $h = h(x)$:

$$K(h) = \eta(x), \quad K(h) = h - \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{2(F(\psi) - gh)}}. \quad (2.3)$$

Введенная здесь функция $K(h)$, играющая основную роль в анализе стационарных течений, определена для $h \in (-\infty, h_0]$, где $h_0 = \min_{\psi} F(\psi)/g$. Легко вычисляются первая и вторая производные функции $K(h)$:

$$K'(h) = 1 - g \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{(\sqrt{2(F(\psi) - gh)})^3} = 1 - g \int_0^{\psi_1} \frac{H d\psi}{u^2},$$

$$K''(h) = -3g \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{(\sqrt{2(F(\psi) - gh)})^5} = -3g \int_0^{\psi_1} \frac{H d\psi}{u^4} < 0.$$

Покажем, что существует единственное значение $h = h_c$ ($-\infty < h_c < h_0$), такое что $K'(h_c) = 0$. Действительно, $K'(h)$ меняет знак на полубесконечном интервале $(-\infty, h_0]$, так как $K'(h) \rightarrow 1$ при $h \rightarrow -\infty$ и $K'(h) \rightarrow -\infty$ при $h \rightarrow h_0$. Тогда в силу неравенства $K''(h) < 0$ существует единственное значение $h = h_c$ ($-\infty < h_c < h_0$), такое что $K'(h_c) = 0$, причем функция $K(h)$ достигает максимального значения K_{\max} в точке h_c .

Стационарное течение, на котором выполнено неравенство

$$K'(h) = 1 - g \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{(\sqrt{2(F(\psi) - gh)})^3} = 1 - g \int_0^{\psi_1} \frac{H d\psi}{u^2} < 0, \quad (2.4)$$

будем называть докритическим, а течение, на котором выполнено обратное неравенство, — сверхкритическим (критическим параметрам соответствует достижение равенства в (2.4)). Отметим, что в случае безвихревого течения ($F(\psi) = \text{const}$) приведенные условия совпадают с классическими условиями докритичности и сверхкритичности потока без сдвига скорости:

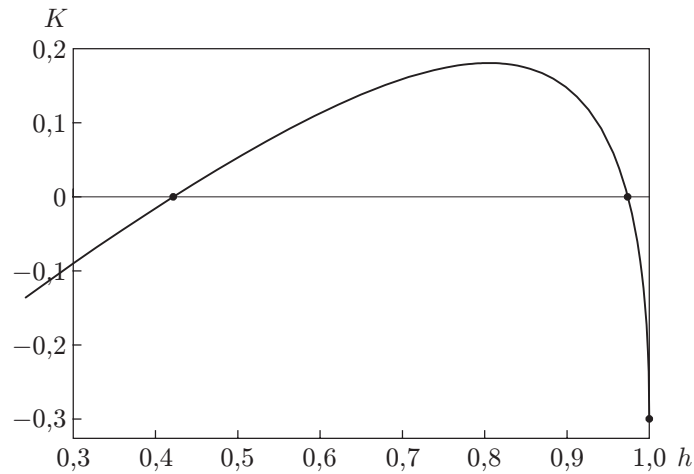
$$|u| < \sqrt{g\delta}, \quad |u| > \sqrt{g\delta}.$$

В работе [2] для системы уравнений, описывающей распространение длинных волн на вихревом течении, получено характеристическое уравнение

$$1 - g \int_0^{\lambda_1} \frac{H d\psi}{(u - k)^2} = 0 \quad (2.5)$$

для определения $k = dx/dt$ — скоростей распространения обобщенных характеристик (волновых фронтов $x = x(t)$, ограничивающих области возмущенного движения). Если при некотором x стационарное течение становится критическим, то согласно (2.4), (2.5) это означает, что в данной точке одна из скоростей распространения малых возмущений обращается в нуль.

На интервале $h \in (h_c, h_0)$, соответствующем докритическому режиму течения, функция $K(h)$ монотонно убывает от K_{\max} до $K_0 = K(h_0)$. На интервале $h \in (-\infty, h_c)$, соответствующем сверхкритическим течениям, функция $K(h)$ монотонно возрастает, причем $-\infty < K(h) < K_{\max}$.

Рис. 1. Зависимость $K(h)$

В качестве примера рассмотрим стационарное сдвиговое течение с линейным по глубине профилем скорости, в котором

$$F(\psi) = 2,762\psi + 9,81, \quad \psi_1 = 1,5635. \quad (2.6)$$

Поведение функции $K(h)$ для этого течения показано на рис. 1. В рассматриваемом случае $h_0 = 1$, $K(h_0) = -0,3$.

Из перечисленных свойств функции $K(h)$ следует, что уравнение

$$K(h) = \eta(x) \quad (2.7)$$

разрешимо в той области значений переменной x , где выполнено неравенство $\eta(x) \leq K_{\max}$. При этом в подобласти $K_0 \leq \eta(x) \leq K_{\max}$ приведенное уравнение (2.7) имеет два и только два решения: $h = h_1(x)$ и $h = h_2(x)$. Первое решение соответствует докритическому течению, второе — сверхкритическому, причем $h_2(x) < h_c < h_1(x) \leq h_0$.

При x , удовлетворяющих неравенству $\eta(x) < K_0$, существует только одна “сверхкритическая” ветвь решения $h = h(x)$. Если заданная функция $\eta(x)$, удовлетворяющая неравенству $\eta(x) \leq K_{\max}$, достигает максимального значения $\eta_{\max} = K_{\max}$ в некоторых точках, то возможны транскритические течения со сменой режимов течения в точках, где достигаются максимальные значения функции $\eta(x)$.

Дифференцируя уравнение (2.7), получаем соотношение

$$h'(x) = \eta'(x)/K'(h),$$

из которого следует, что в докритическом режиме течения функция $h(x)$ убывает (возрастает) при возрастании (убывании) $\eta(x)$, а в сверхкритическом режиме $h(x)$ возрастает (убывает) при возрастании (убывании) $\eta(x)$. Более того, аналогично изменяется толщина слоя жидкости $\delta(x) = h(x) - \eta(x)$, так как знак величины

$$\delta'(x) = h'(x) - \eta'(x) = \eta'(x) \left(\frac{1}{K'(h)} - 1 \right) = g \frac{\eta'(x)}{K'(h)} \int_0^{\psi_1} \frac{H d\psi}{u^2}$$

совпадает со знаком $h'(x)$. В сверхкритическом режиме течения поведение $h(x)$ и $\delta(x) = h(x) - \eta(x)$ меняется, так как в этом случае выполняется неравенство $K'(h) > 0$. В этом режиме течения функция $h(x)$ возрастает (убывает) при возрастании (убывании) $\eta(x)$. При транскритическом переходе от одного режима к другому в точках, где достигается

равенство $h = h_c$, величины $\eta'(x)$ и $K'(h)$ одновременно меняют знак, и поэтому функции $h(x)$ и $\delta(x)$ меняются монотонно в окрестности указанных точек.

В итоге установлено, что сверхкритическая ветвь стационарного решения существует при $-\infty < \eta(x) < K_{\max}$, а докритическая — при $K_0 < \eta(x) < K_{\max}$. На интервале $\eta \in [K_0, K_{\max}]$ определены обе ветви. Если функции $u(x, \psi)$, $H(x, \psi)$, $h(x)$ найдены, то можно определить решение в плоскости переменных (x, y) . Для этого вычисляем

$$y = \Phi(x, \psi) = \int_0^{\psi} H(x, \psi') d\psi' + \eta(x) \quad (2.8)$$

и, обращая полученную зависимость, находим функцию $\psi = \psi(x, y)$, а затем — функцию $u = u(x, \psi(x, y))$. Аналогично вычисляется v . Сначала определяем $v(x, \psi)$ с использованием формул (2.8), (1.3), а затем — $v = v(x, \psi(x, y))$.

3. Обтекание локального препятствия на дне канала. Рассмотрим задачу обтекания локального препятствия — возвышения или углубления — на дне канала. Функция $\eta(x)$, задающая рельеф дна, обладает следующими свойствами: $\eta(x) = 0$ для $|x| \geq d$; $\eta(x) \neq 0$ для $x \in (-d, d)$; равенство $\eta'(x) = 0$ достигается в единственной точке $x_0 \in (-d, d)$, где функция $\eta(x)$ имеет либо локальный максимум, либо локальный минимум. Для определенности будем считать, что поток жидкости движется слева направо. Стационарное течение в области $x < -d$ левее препятствия задается соотношениями

$$u = \sqrt{2(F(\psi) - gh_l)}, \quad H = 1/\sqrt{2(F(\psi) - gh_l)},$$

где $F(\psi)$ — заданная положительная функция, определенная при $0 < \psi < \psi_1$; ψ_1, h_l — заданные положительные постоянные. Уровень свободной поверхности слева от препятствия h_l удовлетворяет уравнению

$$K(h_l) = h_l - \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{2(F(\psi) - gh_l)}} = 0.$$

3.1. Сверхкритическое и транскритическое обтекания локального возвышения на дне канала. В данном случае на входе при $x = -d$ задаются $F(\psi)$ и $h = h_l$. При этом выполняются неравенства $0 < h_l < h_c$. В сверхкритическом потоке, где $K'(h) > 0$, функция $h(x)$ возрастает при возрастании $\eta(x)$. Поэтому $K'(h)$ убывает при возрастании $\eta(x)$ (так как $K''(h) < 0$), но если всюду $\eta(x) < K_{\max}$, то $K'(h)$ сохраняет знак и сверхкритическое течение при прохождении препятствия возвращается к первоначальным параметрам. В этом случае параметры потока при $x = d$ и $x = -d$ совпадают, в частности, глубина за препятствием $\delta = h$ совпадает с глубиной h_l ($0 < h_l < h_c$).

Рассмотрим случай, когда значение функции $\eta(x)$ в точке максимума удовлетворяет равенству $\eta(x_0) = K_{\max}$. Так же как в предыдущем случае, в области $x < x_0$ строится “докритическое” решение. В силу того что $K'(h(x_0)) = 0$, при продолжении решения в область $x > x_0$ возможен неоднозначный выбор сверхкритической либо докритической ветви стационарного решения. В первом варианте, так же как в предыдущем случае, после прохождения препятствия происходит возвращение к начальным параметрам. В случае реализации докритического режима на нисходящем склоне возвышения уровень свободной поверхности $h(x)$ растет с убыванием $\eta(x)$, и если $K(h_0) < 0$, то докритическое течение продолжается до $x = -d$, где глубина становится равной h_r . Здесь h_r — единственный корень уравнения $K(h) = 0$ на докритической ветви ($K'(h_r) < 0, h_c < h_r$).

Если же $K(h_0) > 0$, то решение $h = h(x)$ продолжается только до точки x_{00} ($x_0 < x_{00} < d$), где достигается равенство $\eta(x_{00}) = K(h_0)$. Далее (в п. 4) будет показано, что

продолжение стационарного решения на интервал $x \in (x_0, d)$ возможно, но при этом на нисходящем склоне препятствия появляются области возвратного течения.

При $\eta(x_0) > K_{\max}$ непрерывного решения задачи обтекания препятствия не существует.

Помимо перечисленных возможны также решения с разрывами. Пусть в точке x_s ($-d < x_s < d$) имеется скачок параметров потока. Построим стационарное разрывное решение при $x > x_s$, предполагая, что при $x < x_s$ стационарное сверхкритическое решение уже найдено (см. п. 2). Сначала определим предельные значения разрывного решения при $x \rightarrow x_s$ в области за фронтом разрыва.

Будем использовать соотношения на скачке

$$[u^2 - u_0^2] = 0, \quad [uH] = 0, \quad \left[\int_0^{\psi_1} u^2 H d\psi + \frac{g\delta^2}{2} \right] = 0 \quad (3.1)$$

(эти соотношения можно использовать при моделировании разрывов малой амплитуды (см. [4])). Здесь u_0 — скорость жидкости на дне (при $\psi = 0$); $\delta = h - \eta$ — глубина слоя жидкости; $[f] = f^+ - f^-$ — разность предельных значений функции f на фронте разрыва. Следует отметить, что для течений без сдвига скорости из (3.1) получаются условия на разрывах, принятые в классической теории мелкой воды. Если индексом 1 обозначить предельные при $x \rightarrow x_s$ значения параметров потока из области за скачком, то из соотношений на разрыве $x = x_s$ получим

$$u_1^2(x_s, \psi) = u^2(x_s, \psi) - m, \quad u_1 H_1 = 1, \quad (3.2)$$

$$\int_0^{\psi_1} u_1(x_s, \psi) d\psi + \frac{g\delta_1^2(x_s)}{2} = \int_0^{\psi_1} u(x_s, \psi) d\psi + \frac{g\delta^2(x_s)}{2},$$

где $m = [u_0^2]$ — неизвестный параметр, не зависящий от ψ ; $u(x_s, \psi)$, $\delta(x_s)$ — известные предельные при $x \rightarrow x_s$ значения функций $u(x, \psi)$ и $\delta(x)$, определенных в области $x < x_s$ перед разрывом. С помощью соотношений на разрыве (3.1), (3.2) выражаем предельные значения функций u_1 , H_1 , δ_1 за фронтом разрыва через их значения перед скачком и параметр m :

$$u_1(x_s, \psi) = \sqrt{u^2(x_s, \psi) - m}, \quad H_1(x_s, \psi) = 1/\sqrt{u^2(x_s, \psi) - m}, \quad (3.3)$$

$$\delta_1(x_s) = \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{u^2(x_s, \psi) - m}}.$$

Из последнего соотношения в (3.2), выражающего закон сохранения полного импульса жидкого слоя, следует уравнение для определения величины m

$$Q(m) - Q(0) = 0,$$

где

$$Q(m) = \int_0^{\psi_1} \sqrt{u^2(x_s, \psi) - m} d\psi + \frac{g}{2} \left(\int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{u^2(x_s, \psi) - m}} \right)^2. \quad (3.4)$$

Заметим, что формулы (3.2)–(3.4) имеют смысл только для тех значений параметра m , которые удовлетворяют неравенству $m < m_0$, где $m_0 = \min_{\psi} u^2(x_s, \psi)$.

При отыскании параметров течения на скачке необходимо, чтобы кроме соотношений (3.1) удовлетворялось также условие устойчивости разрывного решения, т. е. обеспечивалось убывание полной энергии жидкого слоя при пересечении потоком фронта разрыва (см. [1, 4]). В работе [4] показано, что это условие сводится к неравенству

$$l = u_1^2/2 + gh_1 - u^2/2 - gh < 0.$$

Используя представления (3.3) параметров потока на фронте разрыва, определим зависимость величины l от параметра m :

$$l(m) = -\frac{m}{2} + g \left(\int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{u^2(x_s, \psi) - m}} - \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{u(x_s, \psi)} \right).$$

Характер возрастания или убывания функций $Q(m)$, $l(m)$ определяется поведением их производных:

$$Q'(m) = \frac{\delta_1}{2} \left(g \int_0^{\psi_1} \frac{H_1 d\psi}{u_1^2} - 1 \right), \quad l'(m) = \frac{1}{2} \left(g \int_0^{\psi_1} \frac{H_1 d\psi}{u_1^2} - 1 \right). \quad (3.5)$$

Заметим, что $Q'(m)$ обязательно меняет знак при изменении параметра m от нуля до m_0 . Действительно, величина

$$S(m) = g \int_0^{\psi_1} \frac{H_1 d\psi}{u_1^2} - 1 = g \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{(u^2(x_s, \psi) - m)^{3/2}} - 1$$

при $m = 0$ отрицательна, так как течение перед скачком является сверхкритическим, но $S(m)$ стремится к $+\infty$ при $m \rightarrow m_0$. С учетом изложенного выше и неравенства $S'(m) > 0$ можно заключить, что существует единственное значение $m_c \in (0, m_0)$, такое что $S(m_c) = 0$. На интервале $(0, m_c)$ функция $Q(m) - Q(0)$ убывает и достигает отрицательного минимума в точке m_c , а на интервале (m_c, m_0) она монотонно возрастает. Если $Q(m_0) - Q(0) > 0$, то найдется единственное значение $m_s \in (m_c, m_0)$, удовлетворяющее уравнению $Q(m_s) - Q(0) = 0$. После нахождения m_s все параметры течения за фронтом разрыва вычисляются по формулам, приведенным выше, причем вместо m в эти формулы нужно подставить m_s .

Покажем, что для найденного решения при $m_s > 0$ выполняется условие убывания энергии, а именно $l(m_s) < 0$. Действительно, интегрируя от 0 до m_s следствие соотношений (3.5) $l'(m) = Q'(m)/\delta_1$, получаем

$$l(m_s) = \int_0^{m_s} \frac{Q'(m) dm}{\delta_1} = \int_0^{m_s} \frac{(Q(m) - Q(0))\delta_1' dm}{\delta_1^2}. \quad (3.6)$$

При выводе данного равенства использовано соотношение $Q(m_s) - Q(0) = 0$. Учитывая, что в промежуточных точках при $0 < m < m_s$ выполнены неравенства $\delta_1'(m) > 0$ и $Q(m) - Q(0) < 0$, из (3.6) получаем неравенство $l(m_s) < 0$ при $m_s > 0$. Используя соотношение (3.6), можно показать, что неравенство $l(m_s) < 0$ возможно только при $m_s > 0$ (см. [4]).

Для построения течения в области за фронтом разрыва при $x > x_s$ полагаем

$$F_1(\psi) = \frac{u_1^2(x_s, \psi)}{2} + gh_1(x_s) = \frac{u^2(x_s, \psi) - m_s}{2} + g \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{u^2(x_s, \psi) - m_s}} + g\eta(x_s).$$

Это равенство можно также записать в виде

$$F_1(\psi) = F(\psi) + l(m_s), \quad (3.7)$$

где

$$F(\psi) = \frac{u^2(x_s, \psi)}{2} + g \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{u(x_s, \psi)} + g\eta(x_s).$$

Далее, используя представление стационарного решения (2.2), выражаем u и H в области за скачком через известную функцию $F_1(\psi)$ и неизвестную величину h :

$$u = \sqrt{2(F_1(\psi) - gh)}, \quad H = 1/\sqrt{2(F_1(\psi) - gh)}. \quad (3.8)$$

Это позволяет получить уравнение для определения функции $h(x)$ в области $x > x_s$:

$$K_1(h) = h - \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{2(F_1(\psi) - gh)}} = \eta(x). \quad (3.9)$$

С учетом равенства (3.7) преобразуем $K_1(h)$ следующим образом:

$$K_1(h) = h - \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{2(F(\psi) - g(h - l(m_s)/g))}},$$

что позволяет в итоге записать уравнение (3.9) в виде

$$K(h - l(m_s)/g) = \eta(x) - l(m_s)/g.$$

Из этой формулы следует, что для существования стационарного решения необходимо, чтобы функция $\eta(x)$, задающая рельеф дна, удовлетворяла при $x > x_s$ неравенству $\eta(x) \leq K_{\max} + l(m_s)$. В случае строгого неравенства поток обтекает вершину препятствия, сохраняя характер докритического течения. Если выполняется неравенство $-l(m_s)/g > K(h_0)$, то докритическое течение продолжается до точки $x = d$. Если же выполняется неравенство $-l(m_s)/g < K(h_0)$, то докритическое течение вида (3.8) продолжается только до точки x_* , где достигается равенство $K(h_0) = \eta(x_*) - l(m_s)/g$. В точке $x = x_*$ скорость u становится равной нулю и продолжение стационарного решения в область $x > x_*$ включает зону рециркуляционного течения на обратном склоне препятствия. В случае, когда в точке x_0 достигается равенство $\eta(x_0) - l(m_s) = K_{\max}$, возможен переход к сверхкритическому режиму в области $x \in (x_0, d)$.

Отдельного рассмотрения требует случай $Q(m_0) - Q(0) < 0$.

3.2. Докритическое и транскритическое обтекания локального возвышения на дне канала. В данном случае задаваемый на левой границе $x = -d$ уровень свободной поверхности $h = h_l$ удовлетворяет неравенствам $h_c < h_l < h_0$. На интервале $x \in (-d, d)$ функция $h(x)$ определяется с помощью уравнения (2.3). Согласно изложенному в п. 2 функция $h(x)$ убывает при возрастании $\eta(x)$. При этом $K'(h)$ возрастает, так как $K''(h) < 0$. Но если выполнено неравенство $\eta(x) < K_{\max}$, то функция $K'(h)$ не меняет знак над препятствием и течение будет докритическим всюду на интервале $(-d, d)$. Параметры течения на правой ($x = d$) и левой ($x = -d$) границах препятствия совпадают.

Пусть функция $\eta(x)$ такова, что в точке ее максимума достигается равенство $\eta(x_0) = K_{\max}$, а течение при $x < x_0$ является докритическим. Над препятствием функция $h(x)$

изменяется от h_l до h_c при изменении x от $-d$ до x_0 . При $x \rightarrow x_0$ достигается равенство $K'(h(x_0)) = 0$. Продолжение решения для $x > x_0$ можно выполнить двумя путями, выбрав либо докритическую, либо сверхкритическую ветвь решения. Выбрав сверхкритическую ветвь $h = h_2(x)$, получаем транскритическое течение над препятствием. На выходе $x = d$ глубина становится равной h_r , где $h_r < h_l$ — решение уравнения $K(h_r) = K(h_l)$.

В случае, когда $\eta(x_0) > K_{\max}$, непрерывного стационарного решения уравнения (2.3) не существует, так как $K(h) < K_{\max}$ для любых значений h .

3.3. Сверхкритическое обтекание локального углубления на дне канала. Рассмотрим задачу обтекания углубления на дне. Если набегающий поток сверхкритический, то $K'(h) > 0$ и $h(x)$ убывает при убывании $\eta(x)$. Тогда $K'(h)$ возрастает и течение остается сверхкритическим вплоть до самой низкой точки дна. Стационарное решение определяется формулами (2.2). За препятствием параметры потока возвращаются к первоначальным значениям.

3.4. Докритическое обтекание локального углубления на дне канала. Рассмотрим докритическое обтекание углубления на дне. В этом случае $K'(h) < 0$ в набегающем на препятствие потоке. На участке убывания $\eta(x)$ функция $h(x)$ возрастает, тогда $K'(h)$ убывает. Это означает, что на указанном участке поток остается докритическим. Если функция η удовлетворяет неравенству $\eta(x_0) > K_0$, то докритическое течение продолжается до границы $x = -d$. После прохождения препятствия параметры потока возвращаются к первоначальным значениям. Если же $\eta(x_0) < K_0$, то докритическое решение вида (2.2) продолжается только до точки $x_1 \in (-d, x_c)$. В указанной точке $F(0) = gh$, поэтому скорость на дне обращается в нуль и продолжение решения вида (2.2) становится невозможным из-за появления отрицательных величин под знаком квадратного корня в формулах (2.2). Далее будет показано, что для продолжения решения в область $x > x_1$ можно использовать стационарные решения, описывающие течения с рециркуляционными зонами.

4. Течения с рециркуляционными зонами. В случае, когда $\eta(x) \rightarrow K_0$ при $x \rightarrow x_1$ и $\eta'(x) < 0$, подкоренное выражение в (2.2) стремится к нулю и продолжение стационарного решения, соответствующего докритическому течению, в область $x > x_1$ становится невозможным, так как под знаком квадратного корня появляется отрицательная величина. Покажем, что в этом случае можно построить стационарное течение другой структуры, включающее рециркуляционные зоны, где частицы жидкости осуществляют поворотное движение. При построении решения используются методы, предложенные в [5].

Рассмотрим для определенности случай докритического обтекания локального углубления на дне, когда функция $\eta(x)$ на концах интервала $(-d, d)$ равна нулю, а в точке $x_0 \in (-d, d)$ достигает значения $\eta_{\min} < K_0 < 0$. Пусть в точках x_1, x_2 ($-d < x_1 < x_0 < x_2 < d$) достигаются равенства $\eta(x_1) = \eta(x_2) = K_0$. Покажем, что существует продолжение стационарного течения в область $x > x_1$, такое что при $x_1 < x < x_2$ появляется рециркуляционная зона, занимающая область D , определенную неравенствами $\eta(x) < y < \eta_1(x)$, $x_1 < x < x_2$, при этом $\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = K_0$. В области $y > \eta_1(x)$ стационарное решение определяется формулами

$$u = \sqrt{2(F(\psi) - gh)}, \quad H = 1/\sqrt{2(F(\psi) - gh)}, \quad K(h) = \eta_1(x), \quad (4.1)$$

где $K(h)$ определено в (2.3). Будем предполагать, что в области D функция u меняет знак при $y = \eta_0(x)$, при этом горизонтальная компонента скорости положительна при $\eta_0(x) < y < \eta_1(x)$ и отрицательна при $\eta(x) < y < \eta_0(x)$. В переменных x, ψ для u в области D имеем выражение

$$u = \pm \sqrt{2(G(\psi) - gh)}, \quad H = \pm 1/\sqrt{2(G(\psi) - gh)} \quad (4.2)$$

с некоторой функцией $G(\psi)$, определенной при $\psi < 0$. Потребуем, чтобы скорость u была

непрерывна при переходе через границу $y = \eta_1(x)$. Это условие будет выполняться, если функция $G(\psi)$ удовлетворяет равенству $G(0) = F(0)$.

Пусть $\psi = \psi_*(h)$ — корень уравнения $G(\psi) - gh = 0$ ($\psi_*(h) < 0$). Равенство $\psi = \psi_*(h)$ выполняется всюду на границе $y = \eta_0(x)$ по определению этой границы. Получим соотношение, связывающее величины $h, \eta, \eta_0, \eta_1, G(\psi)$ в рециркуляционной зоне. Для этого используем соотношения

$$\begin{aligned} \eta_0 - \eta &= \int_0^{\psi_*(h)} H d\psi = - \int_0^{\psi_*(h)} \frac{d\psi}{\sqrt{2(G(\psi) - gh)}}, \\ \eta_1 - \eta_0 &= \int_{\psi_*(h)}^0 H d\psi = \int_{\psi_*(h)}^0 \frac{d\psi}{\sqrt{2(G(\psi) - gh)}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Исключая из соотношений (4.3) η_0 и используя равенство $K(h) = \eta_1$, получаем

$$\int_{\psi_*(h)}^0 \frac{d\psi}{\sqrt{2(G(\psi) - gh)}} = \frac{1}{2} (K(h) - \eta(x)).$$

Предполагая, что $G'(\psi) \neq 0$, выполним замену переменных $s = G(\psi)/g$ в последнем интеграле. В результате получим

$$\int_h^A \frac{f(s) ds}{\sqrt{s - h}} = \frac{K(h) - \eta(x)}{\sqrt{2g}}. \quad (4.4)$$

Здесь $f(s) = 1/G'(\psi(s))$; $A = g^{-1}F(0)$.

Покажем, что множество решений задачи о течении в рециркуляционной зоне имеет произвол в одну функцию одной переменной. Действительно, зададим произвольную монотонно возрастающую функцию $\tilde{\eta}(h)$ с областью определения $h \in (h_*, A)$, принимающую следующие значения на концах интервала: $\tilde{\eta}(h_*) = \eta_{\min}$, $\tilde{\eta}(A) = K_0$. Здесь $h_* = \text{const}$, $0 < h_* < A$. Далее определим функцию $h(x)$ на интервале (x_1, x_0) из уравнения

$$\tilde{\eta}(h) = \eta_l(x), \quad (4.5)$$

где $\eta_l(x)$ — сужение функции $\eta(x)$ на интервал (x_1, x_0) . Аналогично определим $h(x)$ на интервале (x_0, x_2) как решение уравнения

$$\tilde{\eta}(h) = \eta_r(x), \quad (4.6)$$

где $\eta_r(x)$ — сужение функции $\eta(x)$ на интервал (x_0, x_2) .

Определив функцию $h(x)$ при $x \in (x_1, x_2)$ и функцию $\tilde{\eta}(h)$ на интервале (h_*, A) , найдем функцию $G(\psi)$ в области рециркуляционного течения. Соотношение (1.4) можно записать в виде

$$\int_h^A \frac{f(s) ds}{\sqrt{s - h}} = \varphi(h), \quad (4.7)$$

где

$$\varphi(h) = (K(h) - \tilde{\eta}(h))/\sqrt{2g}. \quad (4.7')$$

Решение полученного интегрального уравнения Абеля для определения функции $f(h)$ имеет вид

$$f(h) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\varphi(A)}{\sqrt{A-h}} - \int_h^A \frac{\varphi'(s) ds}{\sqrt{s-h}} \right).$$

В рассматриваемом случае $\varphi(A) = 0$, так как при $x = x_1$ выполнены равенства $K(A) = \tilde{\eta}(A) = \eta(x_1)$. Следовательно, формула, задающая решение уравнения (4.7), упрощается:

$$f(h) = -\frac{1}{\pi} \int_h^A \frac{\varphi'(s) ds}{\sqrt{s-h}}. \quad (4.8)$$

Отметим, что решение уравнения Абеля удовлетворяет соотношению

$$\int_h^A f(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_h^A \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{s-h}}, \quad (4.9)$$

которое будет использовано ниже.

Для того чтобы завершить построение решения в рециркуляционной зоне, найдем функцию $G(\psi)$ как решение задачи Коши:

$$G'(\psi) = 1/f(g^{-1}G(\psi)), \quad G(0) = gA. \quad (4.10)$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение и удовлетворив граничному условию, получаем равенство

$$\chi(G) = \psi, \quad \chi(G) = -g \int_{G/g}^A f(\xi) d\xi = -\frac{g}{\pi} \int_{G/g}^A \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{s-G/g}}, \quad (4.11)$$

задающее функцию $G(\psi)$ неявно. При получении соотношения (4.11) использовалось равенство (4.9).

Заметим, что производная $\chi'(G)$ не обращается в нуль. Действительно, в силу того что $K'(h) < 0$, а $\tilde{\eta}'(h) > 0$ в соответствии с выбором функции $\tilde{\eta}(h)$, справедливо неравенство $\varphi'(h) < 0$ (см. формулу (4.7')). Из формул (4.7'), (4.8) следует, что $f(h) > 0$, тогда функции $\chi'(G)$ и $G'(\psi)$ также принимают положительные значения. Используя монотонность функции $\chi(G)$, однозначно определяем функцию $G(\psi)$ из неявного соотношения (4.11). Таким образом, решение с рециркуляционной зоной построено. В этой зоне функции u и H определяются формулами (4.2), а функция $h(x)$ — соотношениями (4.5), (4.6). Полученное решение зависит от произвольной функции $\tilde{\eta}(h)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо функции $\tilde{\eta}(h)$ можно задать на интервале (x_1, x_0) произвольную монотонно убывающую функцию $h = h(x)$, удовлетворяющую условиям $h(x_1) = A$ и $h(x_0) = h_*$. Обратив зависимость $h = h(x)$, находим $x = X(h)$, $x_1 < X(h) < x_0$. Затем определим функцию $\tilde{\eta}(h)$ на интервале (h_*, A) соотношением $\tilde{\eta}(h) = \eta(X(h))$, после чего функция $h = h(x)$ определяется на интервале (x_0, x_2) как решение уравнения (4.6). Возможен также вариант, когда задается функция $G(\psi)$ при $\psi < 0$. Тогда зависимость $h = h(x)$ находится из уравнения (4.4).

Приведем формулы перехода в плоскость переменных x, y . Граница области рециркуляционного течения задается уравнением

$$y = \eta_1(x) = K(h(x)).$$

Скорость u обращается в нуль на кривой

$$y = (K(h(x)) + \eta(x))/2.$$

В области D при $\eta(x) < y < \eta_0(x)$ линии тока $\psi = \psi_0 = \text{const}$ задаются уравнениями (ψ_0 изменяется в интервале $\psi_*(h_*) < \psi_0 < 0$)

$$y = \int_{\psi_0}^0 \frac{d\psi}{\sqrt{2(G(\psi) - gh(x))}} + \eta(x) = \sqrt{\frac{g}{2}} \int_{G(\psi_0)/g}^A \frac{f(s) ds}{\sqrt{s - h(x)}} + \eta(x),$$

а в подобласти $\eta_0(x) < y < \eta_1(x)$ области D — уравнениями

$$y = K(h(x)) - \int_{\psi_0}^0 \frac{d\psi}{\sqrt{2(G(\psi) - gh(x))}} = K(h(x)) - \sqrt{\frac{g}{2}} \int_{G(\psi_0)/g}^A \frac{f(s) ds}{\sqrt{s - h(x)}}.$$

Рассмотрим стационарное сдвиговое течение в слое постоянной глубины $h = 0,9739$, определенное соотношениями (2.6), которое обтекает углубление, расположенное на дне при $-0,4 < x < 0,4$. Форма дна при $x \in (-0,4, 0,4)$ задана уравнением

$$y = -0,6(1 - x^2/0,16).$$

Профиль скорости для этого течения представлен на рис. 2.

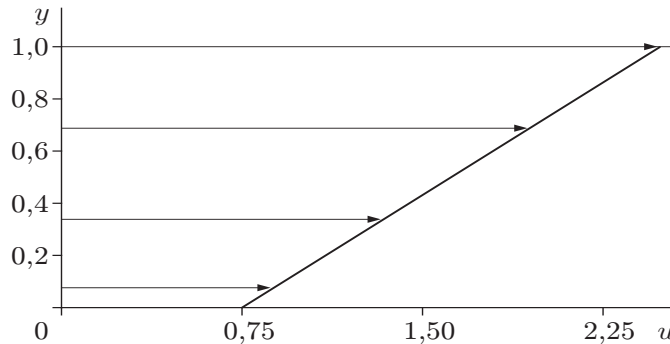


Рис. 2. Профиль скорости по глубине

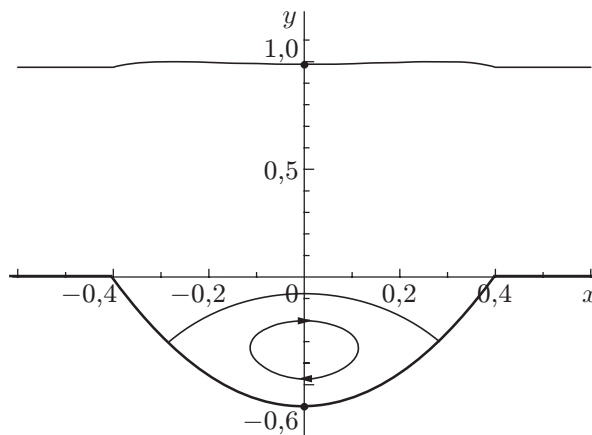


Рис. 3. Картина течения

Стационарное обтекание возможно только в том случае, когда в углублении появляется возвратное течение. На рис. 3 представлены результаты вычисления формы свободной поверхности, границы рециркуляционной зоны и одной из замкнутых линий тока внутри нее, найденных в предположении, что в рециркуляционной зоне зависимость “константы” Бернулли от ψ такая же, как в основном потоке: $G(\psi) = 2,762\psi + 9,81$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построение решения с рециркуляционной зоной в задаче обтекания возвышения на дне, рассмотренной в подп. 3.1, аналогично изложенному выше, так как течение в области $x_{00} < x < d$ определяется так же, как в “половинке” углубления (области $x \in (x_1, x_0)$), а при $x > d$ течение является однородным сдвиговым потоком, в котором $h(x) = \text{const}$.

Таким образом, понятия докритичности и сверхкритичности потока обобщены на случай сдвиговых стационарных течений. Изучены свойства решений системы уравнений длинных волн для различных режимов течения. Найденны точные решения, описывающие широкие классы сдвиговых докритических, сверхкритических и транскритических течений над неровным дном.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
2. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, вып. 3. С. 555–562.
3. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
4. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–20.
5. **Varley E., Blythe P. A.** Long eddies on sheared flows // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 103–187.

Поступила в редакцию 7/IX 2005 г.
