

УДК 532.5; 519.62

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ СО СТЕПЕННЫМ РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ В КАНАЛЕ С РАСПОЛОЖЕННЫМ В НЕМ ЦИЛИНДРОМ, ИМЕЮЩИМ КВАДРАТНОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ

Р. Мохебби, М. Назари\*, М. Х. Кайхани\*

Университет Дамгана, Дамган, Иран

\* Технологический университет Шахруда, Шахруд, Иран

E-mails: rasul\_mohebbi@du.ac.ir, mnazari@shahroodut.ac.ir, H\_kayhani@shahroodut.ac.ir

С использованием метода решеточных уравнений Больцмана и метода конечных элементов решена задача о ламинарном установившемся течении несжимаемой жидкости со степенным реологическим законом и теплопереносе между двумя параллельными пластинами, где расположен цилиндр, имеющий квадратное поперечное сечение. Получено численное решение задачи при различных значениях отношения длины стороны квадрата к ширине канала и показателя степени  $n$  в реологическом законе. Исследовано течение как псевдопластической жидкости ( $n < 1$ ), так и дилатантной ( $n > 1$ ). Проведено сравнение численных решений с аналитическим решением. Вычислены локальное и осредненное числа Нуссельта. Показано, что метод решеточных уравнений Больцмана является альтернативой методу конечных элементов при исследовании течений неньютоновских жидкостей.

Ключевые слова: вынужденная конвекция, степенные жидкости, метод решеточных уравнений Больцмана, метод конечных элементов.

DOI: 10.15372/PMTF20160107

**Введение.** Течения неньютоновских жидкостей используются в различных областях науки и техники, таких как геофизика [1], гидрология [2], материаловедение [3] и моделирование физиологических процессов [4].

Задача об обтекании жидкостью цилиндра с квадратным поперечным сечением изучалась экспериментально и численно при различных режимах течения, в частности при различных числах Рейнольдса и свойствах обтекаемой жидкости. Такие течения имеют место при охлаждении электронных устройств, в системах теплообмена, аэродинамических устройствах, делителях потока, используемых при производстве полимеров, и т. п.

В большинстве многофазных жидкостей (пенах, суспензиях, эмульсиях и т. п.), а также в высокомолекулярных полимерах (растворах, расплавах, смесях и т. п.) при определенных условиях вязкость уменьшается (псевдопластические жидкости) или увеличивается (дилатантные жидкости). Как правило, поведение таких жидкостей моделируется неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом (для псевдопластических жид-

костей показатель степени в реологическом законе  $n < 1$ , для дилатантных жидкостей —  $n > 1$ ) [5–8].

Для решения задач о течении в канале жидкости со степенным реологическим законом используются различные численные методы. В большинстве ранних работ для получения численного решения применялись методы дискретизации полуэмпирических моделей, основанные на традиционных методах численного решения задач гидродинамики, таких как метод конечных разностей (МКР), метод конечных объемов (МКО), метод конечных элементов (МКЭ).

МКЭ впервые был использован при решении задач механики конструкций [9]. В конце 60-х гг. XX в. МКЭ стал эффективным методом численного решения различных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, в частности задач о теплопереносе и задач гидродинамики жидкости. В 1980 г. для решения задач гидродинамики был разработан метод конечных объемов. По сути, МКР, МКЭ и МКО принадлежат к одному и тому же классу численных методов — классу методов взвешенных невязок. Различие этих методов заключается в выборе базисных функций и невязок.

Для устранения недостатков метода клеточных автоматов в 1988 г. был разработан метод решеточных уравнений Больцмана [10], являющийся альтернативным методом решения задач гидродинамики. При использовании традиционных численных методов уравнения Навье — Стокса (уравнения сохранения массы, количества движения и энергии) решаются путем разбиения расчетной области дискретными точками, конечными элементами или конечными объемами. Таким образом, дифференциальные уравнения заменяются системой нелинейных алгебраических уравнений, которая решается итерационными методами.

С использованием метода решеточных уравнений Больцмана решаются кинетические уравнения Больцмана на основе моделей микроскопической или макроскопической кинетики [11]. При этом жидкость заменяется фракциями частиц, движущихся в заданных направлениях (по связям решетки) и сталкивающимся в узлах решетки. Метод решеточных уравнений Больцмана является явным методом, описывающим локальные процессы столкновения и течения. Поэтому этот метод применим для решения задач на параллельных процессорах. Кроме того, с помощью метода решеточных уравнений Больцмана эффективно решаются задачи в областях с движущимися границами (задачи о движении пористой среды, многофазной среды, задачи затвердевания и плавления). При этом отсутствует необходимость применять метод трассировки.

Известны работы, в которых численно решены задачи о движении неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом с использованием как МКЭ, так и метода решеточных уравнений Больцмана, однако детального сравнения этих методов не проводилось.

В работе [12] показана эффективность решения задачи о течении неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом методом решеточных уравнений Больцмана с помощью модели Бхатнагара — Гросса — Крука. В [13] изучалась точность метода решеточных уравнений Больцмана в случае течения жидкости с усеченным степенным реологическим законом. В [14] предложен метод решеточных уравнений Больцмана второго порядка точности для решения задач о течении неньютоновской жидкости. В [15] с использованием полунявного МКЭ решалась задача о переносе тепла в ламинарном установившемся потоке дилатантной жидкости при обтекании нагретого длинного цилиндра с квадратным поперечным сечением. Исследовалось влияние чисел Рейнольдса и Прандтля, а также показателя степени в реологическом законе на процесс теплопереноса. Показано, что с увеличением чисел Рейнольдса и Прандтля осредненное число Нуссельта монотонно возрастает.

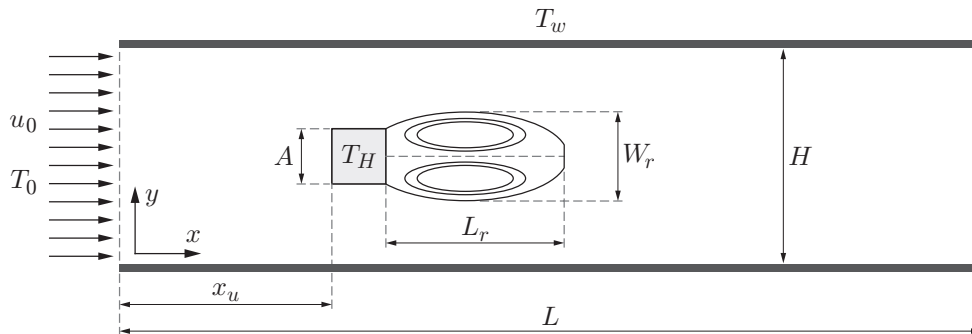


Рис. 1. Геометрия расчетной области

Неустановившееся ламинарное течение жидкости со степенным реологическим законом и теплоперенос в двумерном горизонтальном плоском канале с расположенным в нем квадратным препятствием исследовались в работе [16]. При этом использовался адаптированный для решения на смещенных сетках МКЭ с контролируемым объемом. Вычисления выполнены для чисел Рейнольдса в диапазоне  $Re = 20 \div 200$  и чисел Ричардсона в диапазоне  $Ri = 0 \div 8$  при фиксированном числе Прандтля  $Pr = 50$  для значений показателя степени в реологическом законе  $n = 0,5; 1,0; 1,4$ .

В работе [17] предложена модель D2Q9 решеточных уравнений Больцмана для моделирования течения неньютоновских жидкостей, вязкость которых увеличивается с увеличением скорости сдвига.

В данной работе численно решается задача о течении неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом в плоском канале, в котором помещен нагретый цилиндр с квадратным поперечным сечением. Проводится сравнение метода решеточных уравнений Больцмана и метода конечных элементов, исследуется влияние на течение чисел Рейнольдса и Нуссельта.

**1. Постановка задачи.** Исследуется обтекание жидкостью нагретого цилиндра с квадратным поперечным сечением при различных значениях отношения  $A/H = 1/8, 1/4, 1/2$  (рис. 1). Предполагается, что цилиндр является изотермическим и нагрет до температуры  $T_H$ . Тепло от цилиндра поступает в окружающую его жидкость, температура которой на входе в цилиндр равна  $T_0$ . На рис. 1 показана также форма пузырей, образующихся за препятствием. Длина пузыря определяет расстояние от задней стенки препятствия до ближайшей центральной линии тока. Жидкость поступает в канал со скоростью  $u_0$ . Число Рейнольдса изменяется в диапазоне  $Re = 100 \div 300$ , число Прандтля является постоянным и равно 0,7. В соответствии с [18] препятствие расположено на расстоянии  $x_u = 10$  от входа в канал. Температура стенки канала предполагается постоянной и равной  $T_w$ . Предполагается, что проскальзывание между стенкой канала и жидкостью отсутствует.

Рассматривается двумерное установившееся ламинарное течение несжимаемой жидкости. Предполагается, что теплофизические свойства рабочей жидкости не зависят от температуры. Не учитывается также влияние диссипации, гравитации, естественной конвекции и теплопереноса вследствие теплового излучения на температуру и скорость потока.

**2. Степенная модель жидкости.** В отличие от ньютоновской жидкости в неньютоновской жидкости напряжения сдвига связаны со скоростями деформаций сдвига нелинейными соотношениями. Наиболее часто используемой моделью неньютоновской жидкости является степенная модель, в которой реологический закон принимается в следующем виде [19]:

$$\nu = \nu_0(\dot{\gamma})^{n-1}.$$

Здесь  $\nu_0$ ,  $n$  — материальные константы жидкости. Коэффициент  $\nu_0$  характеризует вязкость жидкости: чем больше  $\nu_0$ , тем больше кинематическая вязкость. В данной работе принимается  $\nu_0 = u_0^{2-n}(2H)^n / \text{Re}$ . Безразмерный параметр  $n$  содержится в показателе степени в реологическом законе неньютоновской жидкости. Значение  $n = 1$  соответствует ньютоновской жидкости, при  $n < 1$  жидкость является псевдопластической (кинематическая вязкость быстро уменьшается с увеличением скорости деформаций), при  $n > 1$  — дилатантной (кинематическая вязкость быстро увеличивается с увеличением локальной скорости деформаций сдвига  $\dot{\gamma}$  — второго инварианта тензора скоростей  $S_{\alpha'\beta'}$ ) [20]:

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{S_{\alpha'\beta'}S_{\alpha'\beta'}}.$$

Здесь

$$S_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial x_{\beta'}} + \frac{\partial u_{\beta'}}{\partial x_{\alpha'}}.$$

Для этой модели имеется аналитическое решение в случае установившегося течения между параллельными пластинами [21]:

$$\frac{u(y)}{u_0} = \frac{2n+1}{n+1} \left[ 1 - \left( \frac{2|H/2 - y + \delta x|}{H} \right)^{1+1/n} \right].$$

**3. Численные методы.** Ниже рассматриваются численные методы, используемые при решении исследуемой задачи.

3.1. *Метод решеточных уравнений Больцмана для решения уравнений гидродинамики.*

При использовании метода решеточных уравнений Больцмана искомые функции рассматриваются на множестве решеток. Модель D2Q9 этого метода используется для моделирования течения жидкости в канале на равномерной сетке ( $\delta x = \delta y; \mathbf{e}_i$ ) [22], где

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0, 0), & i = 0, \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c, & i = 1, \dots, 4 \\ \sqrt{2}(\cos[(i-5)\pi/2 + \pi/4], \sin[(i-5)\pi/2 + \pi/4])c, & i = 5, \dots, 8, \end{cases}$$

$c$  — скорость движения решетки. В данной работе при моделировании используется значение  $c = 1$ . Решеточное уравнение Больцмана (известное как уравнение Бхатнагара — Гросса — Крука) с одним временем релаксации записывается в виде [23]

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i\delta t, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_\nu} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)], \quad i = 0, 1, \dots, 8,$$

где

$$\tau_\nu = 3\nu \frac{\delta t}{\delta x^2} + 0,5.$$

В модели D2Q9 равновесная функция распределения  $f_i^{eq}$  задается в виде [24]

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left( 1 + 3 \frac{\mathbf{e}_i \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{e}_i \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right), \quad i = 0, 1, \dots, 8,$$

где  $w_0 = 4/9$ ;  $w_i = 1/9$  при  $i = 1, \dots, 4$  и  $w_i = 1/36$  при  $i = 5, \dots, 8$ . В методе решеточных уравнений Больцмана характеризующие свойства жидкости макроскопические величины, такие как плотность  $\rho$  и количество движения  $\rho \mathbf{u}$ , вычисляются с использованием функции распределения  $f_i$ :

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^8 f_i \mathbf{e}_i.$$

3.2. *Метод решеточных уравнений Больцмана для уравнения теплопроводности.* Метод решеточных уравнений Больцмана для уравнения теплопроводности описан в работе [25]. Процесс теплопереноса моделируется с помощью других функций распределения температуры. Например, при моделировании энергии диссипации используется функция  $g$ , а при моделировании конвективного теплопереноса в канале — два набора функции распределения (модель Бхатнагара — Гросса — Крука). В этой модели для описания конвективного переноса тепла в канале используются функции распределения [26]

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_g} [g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)]. \quad (1)$$

При выводе этого уравнения предполагается, что работой сжатия, создаваемой давлением, и диссипацией тепла вследствие наличия вязкости можно пренебречь. Эти предположения можно принять в случае несжимаемой жидкости, в частности при небольших числах Рейнольдса. Величина  $\tau_g$  определяется следующим образом:

$$\tau_g = 3 \frac{k}{(\rho c_p)_f c^2 \delta t} + 0,5.$$

В уравнении (1) равновесную функцию распределения  $g_i^{eq}$  можно представить в виде [27]

$$g_i^{eq} = w_i T \left( 1 + 3 \frac{\mathbf{e}_i \mathbf{u}}{c^2} \right),$$

где  $T$  — макроскопическая температура жидкости [28]:

$$T = \sum_{i=0}^8 g_i, \quad i = 0, 1, \dots, 8.$$

3.3. *Метод конечных элементов.* При решении задачи об установившемся течении несжимаемой жидкости со степенным реологическим законом за цилиндром с квадратным поперечным сечением используются уравнения Навье — Стокса для описания поля скоростей жидкости и уравнение энергии для описания температурного поля. Соответствующая система уравнений в безразмерных переменных записывается следующим образом:

— уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0;$$

— уравнение движения в проекции на ось  $x$  (эффетом плавучести пренебрегается):

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial (v^* u^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\eta}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \left( \varepsilon_{x^* x^*} \frac{\partial \eta}{\partial x^*} + \varepsilon_{y^* x^*} \frac{\partial \eta}{\partial y^*} \right);$$

— уравнение движения в проекции на ось  $y$  (эффетом плавучести пренебрегается):

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u^* v^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial (v^* v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\eta}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \left( \varepsilon_{y^* y^*} \frac{\partial \eta}{\partial y^*} + \varepsilon_{x^* y^*} \frac{\partial \eta}{\partial x^*} \right),$$

где  $\varepsilon_{x^* x^*} = \partial u^* / \partial x^*$ ;  $\varepsilon_{y^* y^*} = \partial v^* / \partial y^*$ ;  $\varepsilon_{x^* y^*} = \varepsilon_{y^* x^*} = (\partial u^* / \partial y^* + \partial v^* / \partial x^*) / 2$ ;  $\tau_{ij} = 2\eta \varepsilon_{ij}$  — безразмерные компоненты тензора напряжений ( $\tau = \tau' / (\eta_0 u_0 / A)$ ) [29];

— уравнение энергии (пренебрегается диссипацией вследствие наличия вязкости и предполагается, что теплофизические свойства жидкости постоянны) [30]:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u^* T^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial (v^* T^*)}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right).$$

Реологический степенной закон принимается в виде

$$\eta = (I_2/2)^{(n-1)/2},$$

где  $\eta = \eta'/\eta_0$  — безразмерная вязкость (кажущаяся вязкость);  $\eta_0$  — характерная вязкость;  $I_2/2$  — безразмерный второй инвариант тензора скоростей деформаций:

$$\frac{I_2}{2} = 2\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)^2.$$

Безразмерная величина  $I_2$  и размерная величина  $I_2'$  связаны соотношением  $I_2 = I_2'/(u_0/A)^2$ .

**4. Краевые условия.** При постановке краевых условий на входе в расчетную область используется модель, предложенная в работе [31], при постановке краевых условий на выходе из этой области — схема экстраполяции, предложенная в [32]. На твердых стенках канала и границах препятствия ставятся условия непроскальзывания. Стандартные краевые условия “отскок назад” (bounce-back) [31, 33] моделируют условия непроскальзывания на твердых стенках и твердых препятствиях. Частица, падающая на твердую стенку, отскакивает в противоположном направлении по той же прямой.

На входе в канал температура жидкости полагается равной нулю ( $T_0 = 0$ ), температура стенок канала и поверхности препятствия считается постоянной ( $T_w = 1$ ). Для реализации в методе решеточных уравнений Больцмана постоянной температуры на стенках применяется процедура, предложенная в работе [27].

Для определения неизвестных функций на выходе из канала в методе решеточных уравнений Больцмана используется следующее уравнение:

$$g_n = T_0(w_n + w_{-n}) - g_{-n}, \quad n = 1, 5, 8.$$

Неизвестные функции распределения  $g_3, g_6, g_7$  можно вычислить с использованием соседних точек решетки:

$$g_n^{Nx} = g_n^{Nx-1}, \quad n = 3, 6, 7.$$

Формулировка краевых условий в МКЭ приведена в работе [34].

**5. Численная реализация.** Сетки, используемые в методе решеточных уравнений Больцмана и МКЭ, показаны на рис. 2. Равномерная прямоугольная сетка с размером ячейки  $\Delta x = \Delta y = 1$ , содержащая  $97 \times 3001$  решеток, применялась в методе решеточных уравнений Больцмана. Точки сетки, лежащие на поверхности препятствия, помечались как “твердые” точки, остальные — как “жидкие” точки. Для того чтобы проверить независимость результатов вычислений от размера сетки, вычисления проводились также на сетке с удвоенным числом решеток при  $Re = 100, 300$ . Максимальное различие результатов, полученных на этих сетках, составляло приблизительно 0,1 %, поэтому в данной работе представлены результаты расчетов на сетке указанного выше размера.

В МКЭ проводилась нерегулярная триангуляция области с измельчением элементов в окрестности препятствия (см. рис. 2, б). В данной работе использовалось 2 049 266 конечных элементов.

Применение неравномерных решеток в методе решеточных уравнений Больцмана представляет определенные трудности [35–37]. Следует отметить, что использование в методе решеточных уравнений Больцмана равномерной сетки является его недостатком, поскольку такая сетка не может быть применена для решения задач в областях сложной геометрии.

При использовании метода решеточных уравнений Больцмана на компьютере Intel(R) core(TM) i7 CPU Q7201.60 GHz требуются объем памяти 101 Мб и 13 % мощности CPU.

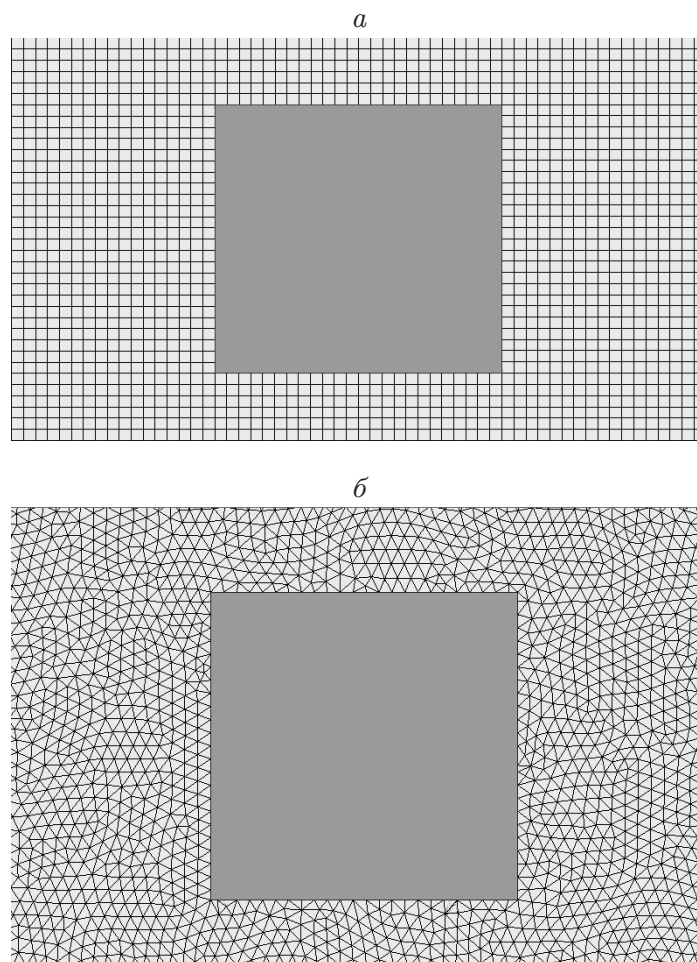


Рис. 2. Прямоугольная (а) и треугольная (б) расчетные сетки в окрестности квадратного препятствия

При использовании МКЭ на том же компьютере требуются объем памяти 1866 Мб и 58 % мощности CPU. Таким образом, при использовании метода решеточных уравнений Больцмана затраты времени, необходимые для проведения расчетов, значительно меньше, чем при использовании МКЭ.

Очевидно, что МКЭ и метод решеточных уравнений Больцмана существенно различаются. В МКЭ течение жидкости моделируется с использованием законов сохранения на макроскопическом уровне, а в методе решеточных уравнений Больцмана — с использованием тех же законов сохранения на мезоуровне. В методе решеточных уравнений Больцмана течение жидкости моделируется дискретными уравнениями эволюции, в то время как в МКЭ проводится дискретизация дифференциальных уравнений законов сохранения. Метод решеточных уравнений Больцмана можно рассматривать как модель уравнений Навье — Стокса, в которой течение описывается закономерностями поведения совокупности молекул, а не отдельно взятой молекулы, сталкивающейся с другими молекулами.

Моделирование физических явлений, обусловленных взаимодействием молекул, проще выполнить с использованием метода решеточных уравнений Больцмана, поскольку уравнения Больцмана являются кинетическими. Метод решеточных уравнений Больцмана имеет ряд преимуществ. В этом методе оператор переноса является линейным, кроме того, уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости можно решать, не ре-

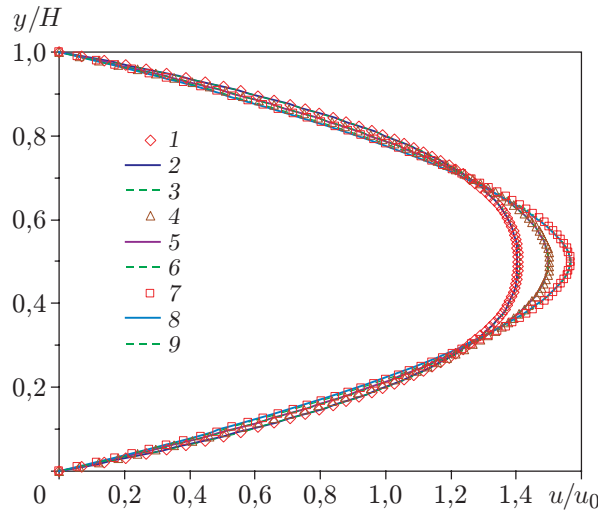


Рис. 3. Распределение скорости по сечению канала при отсутствии в нем препятствия:  
 1–3 —  $n = 0,7$ , 4–6 —  $n = 1,0$ , 7–9 —  $n = 1,3$ ; 1, 4, 7 — метод решеточных уравнений Больцмана, 2, 5, 8 — МКЭ, 3, 6, 9 — аналитическое решение

шая уравнения Пуассона для давления. Обмен данными в методе решеточных уравнений Больцмана является локальным, а давление определяется из уравнения состояния. В этом методе используется одно или два значения модуля вектора скорости и задается несколько направлений движения частицы. Применение данного метода позволяет достаточно просто распараллелить численный алгоритм, реализовать краевые условия и учесть взаимодействие частиц [38]. Также в этом методе легко выполняется сканирование расчетной области.

**6. Проверка работы программы и точности результатов численных расчетов.** Прежде чем перейти к детальному изложению и обсуждению полученных результатов численных расчетов, приведем результаты тестовых расчетов, целью которых являлась проверка точности используемого численного метода и адекватности моделирования с его помощью задач о течении жидкости с указанным выше степенным реологическим законом.

Получены решения задач о течении жидкости в канале в случае отсутствия в нем препятствия и при его наличии (цилиндр с квадратным поперечным сечением). На рис. 3 представлены численные и аналитические решения задачи о течении ньютоновской и неньютоновской жидкостей в канале в случае отсутствия в нем препятствия. Установлено, что различие аналитического и численного решений, полученных с использованием метода решеточных уравнений Больцмана и МКЭ, пренебрежимо мало. Локальное число Нуссельта определялось следующим образом:

$$Nu = -\frac{2H}{T_w - T_b} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

Здесь

$$T_b = \frac{\int_0^H uT \, dy}{\int_0^H u \, dy}.$$

На рис. 4 представлена зависимость локального числа Нуссельта от безразмерной продольной координаты  $(2x/H)/(\text{Re Pr})$  при  $\text{Re} = 100$ . Численное решение задачи о течении



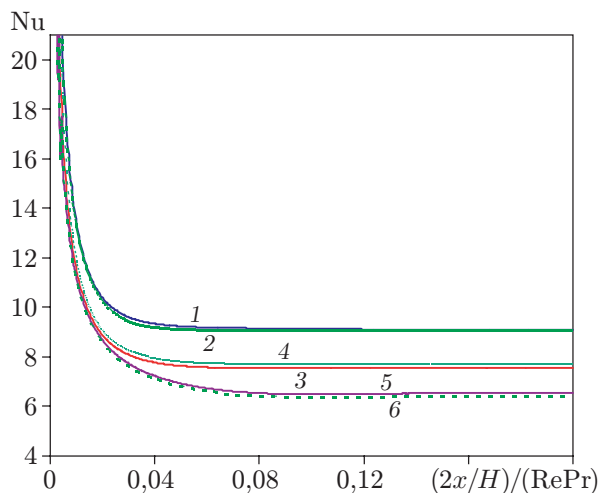


Рис. 4. Распределение локального числа Нуссельта на нижней стенке канала при  $Re = 100$ :

1, 2 —  $n = 0,7$ , 3, 4 —  $n = 1,0$ , 5, 6 —  $n = 1,3$ ; 1, 3, 5 — метод решеточных уравнений Больцмана, 2, 4, 6 — МКЭ

ньютоновской жидкости можно сравнить с точным решением уравнения энергии для случая, когда стенки имеют постоянную температуру [39]. Локальное число Нуссельта в прогретой области равно 7,54 [39]. Погрешность определения числа Нуссельта методом решеточных уравнений Больцмана не превышает 0,053 %. Различие значений числа Нуссельта, полученных методом решеточных уравнений Больцмана и МКЭ, не превышает 2 %.

**7. Результаты исследования и их обсуждение.** В данной работе приведены результаты вычислений характеристик течения и температурного поля при больших числах Нуссельта. Это, в свою очередь, позволило оценить влияние показателя степени в уравнении состояния на характер течения вокруг горячего цилиндра с квадратным поперечным сечением.

На рис. 5 приведены линии тока, полученные методом решеточных уравнений Больцмана при  $Re = 100, 300$ ,  $n = 0,7; 1,3$  и  $A/H = 1/4$ . Во всех случаях четко видны зоны рециркуляции, расположенные за цилиндром.

При  $n = 0,7$ ,  $Re = 100$  безразмерные длина зоны рециркуляции  $L_r/A$  и ширина  $W_r/A$  равны  $L_r/A = 0,33$ ,  $W_r/A = 0,7237$ , при  $n = 1,3$ ,  $Re = 100$   $L_r/A = 1,1802$ ,  $W_r/A = 0,9476$ . Эти значения отличаются от значений, полученных МКЭ, менее чем на 2 %. Из приведенных результатов следует, что псевдопластическая жидкость ( $n < 1$ ) вблизи цилиндра движется быстрее, чем дилатантная жидкость ( $n > 1$ ). По мере удаления от цилиндра различие скоростей этих жидкостей уменьшается. При переходе от жидкости с  $n < 1$  к жидкости с  $n > 1$  с увеличением числа Рейнольдса увеличивается различие размеров зоны рециркуляции.

Можно утверждать, что вследствие наличия очень вязкого слоя, окружающего цилиндр, вблизи цилиндра образуется встречный поток. Поэтому для дилатантной жидкости зона рециркуляции больше, чем для псевдопластической. С увеличением числа Рейнольдса инерционные силы становятся существенно больше сил вязкости [40].

На рис. 6 приведены распределения безразмерной скорости по поперечному сечению канала при  $Re = 100$ ,  $A/H = 1/4$ ,  $n = 0,7; 1,3$  и различных значениях продольной координаты, полученные методом решеточных уравнений Больцмана и МКЭ. Видно, что профили скоростей, полученные методом решеточных уравнений и МКЭ, практически

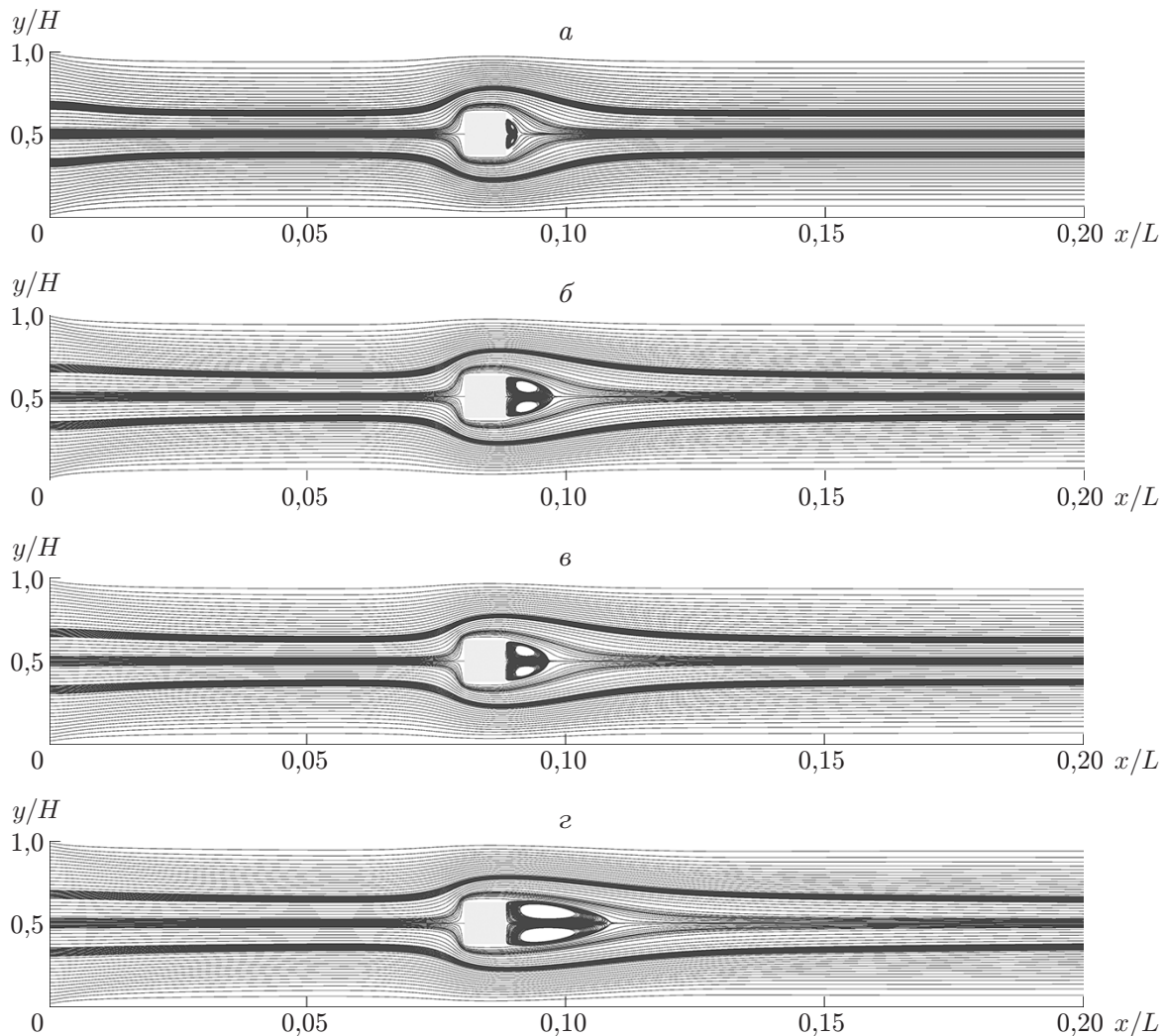


Рис. 5. Линии тока в канале при обтекании квадратного препятствия ( $A/H = 1/4$ ):  
 $a, б$  —  $Re = 100$  ( $a$  —  $n = 0,7$ ,  $б$  —  $n = 1,3$ ),  $в, г$  —  $Re = 300$  ( $в$  —  $n = 0,7$ ,  $г$  —  $n = 1,3$ )

совпадают при обоих значениях показателя  $n$ . С увеличением показателя  $n$  увеличивается максимальное отрицательное значение скорости, с увеличением длины зоны рециркуляции уменьшается скорость обратного потока за цилиндром.

Изменение поля скоростей потока с изменением показателя  $n$  оказывает влияние на поле температуры вблизи цилиндра, а следовательно, и на скорость теплопереноса. На рис. 7 приведены распределения температуры по поперечному сечению канала при  $Re = 100$ ,  $A/H = 1/4$ ,  $n = 0,7; 1,3$  и различных значениях продольной координаты, полученные методом решеточных уравнений и МКЭ. Видно, что чем больше показатель  $n$ , тем быстрее падает температура. В зоне рециркуляции за цилиндром температура и отрицательная скорость достигают максимальных значений.

На рис. 8 представлены зависимости локального числа Нуссельта на нижней стенке канала от продольной координаты при  $A/H = 1/4$  и различных значениях числа Рейнольдса и показателя степени  $n$ . При фиксированном значении показателя  $n$  локальное число Нуссельта увеличивается с увеличением числа Рейнольдса. Увеличение числа Нуссельта вблизи угла цилиндра обусловлено наличием большого градиента температуры

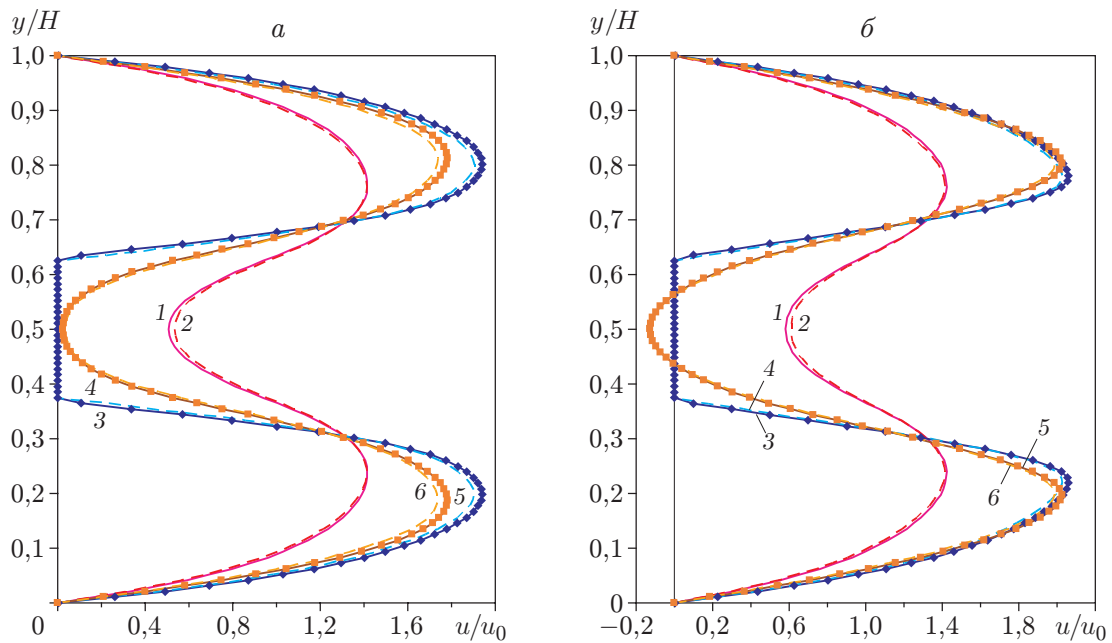


Рис. 6. Распределение безразмерной скорости по поперечному сечению канала при  $Re = 100$ ,  $A/H = 1/4$  и различных значениях продольной координаты:  $a - n = 0,7$ ,  $b - n = 1,3$ ; 1, 2 —  $x/L = 0,07666$ , 3, 4 —  $x/L = 0,08400$ , 5, 6 —  $x/L = 0,09133$ ; 1, 3, 5 — метод решеточных уравнений Больцмана, 2, 4, 6 — МКЭ

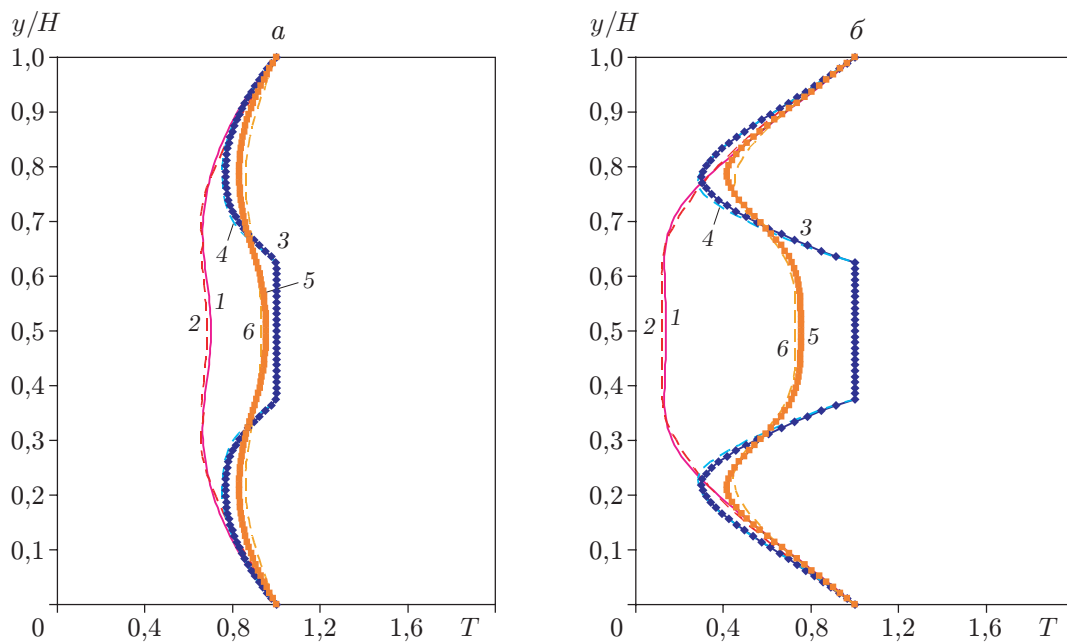


Рис. 7. Распределение температуры по поперечному сечению канала при  $Re = 100$ ,  $A/H = 1/4$  и различных значениях продольной координаты (обозначения те же, что на рис. 6)

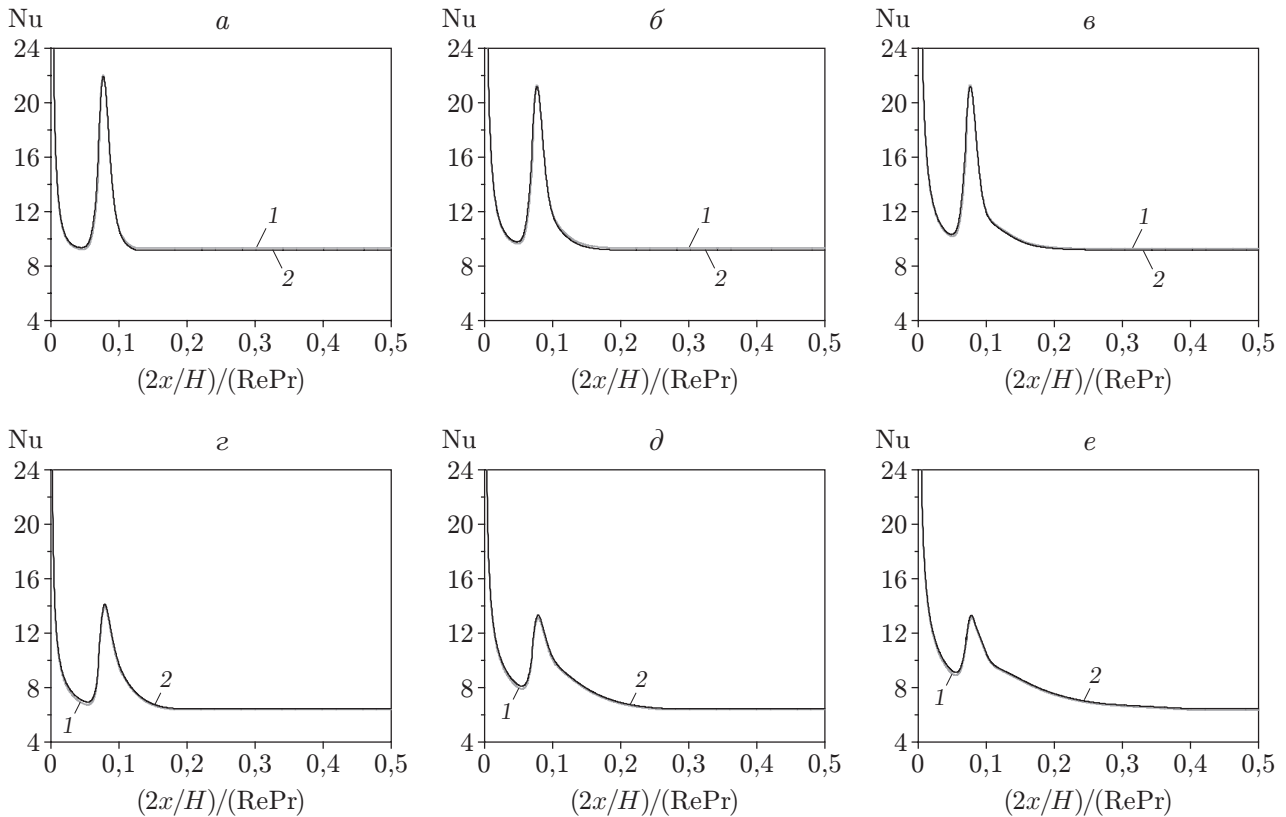


Рис. 8. Зависимость числа Нуссельта на нижней стенке канала от продольной координаты при  $A/H = 1/4$ :  
 а-в —  $n = 0,7$  (а —  $Re = 100$ , б —  $Re = 200$ , в —  $Re = 300$ ), г-е —  $n = 1,3$  (г —  $Re = 100$ , д —  $Re = 200$ , е —  $Re = 300$ ); 1 — МКЭ, 2 — метод решеточных уравнений Больцмана

вблизи поверхности препятствия. При фиксированном значении числа Рейнольдса локальное число Нуссельта уменьшается с увеличением показателя  $n$ . Результаты, полученные методом решеточных уравнений Больцмана и МКЭ, хорошо согласуются (максимальное различие не превышает 1,5 %).

На рис. 9 приведены зависимости числа Нуссельта, осредненного по интервалу  $x/L \in (0,0470; 0,1216)$ , от числа Рейнольдса при  $A/H = 1/4$  и различных значениях показателя  $n$ , полученные методом решеточных уравнений Больцмана и МКЭ. Осредненное число Нуссельта увеличивается с увеличением числа Рейнольдса. Различие значений числа Нуссельта, полученных методом решеточных уравнений Больцмана и методом конечных элементов, не превышает 2 %. Аналогичные зависимости получены при  $A/H = 1/8, 1/2$ .

Проведено также сравнение результатов, полученных методом решеточных уравнений Больцмана, с данными работы [40].

На рис. 10 представлены зависимости отношения осредненного числа Нуссельта в потоке жидкости со степенным реологическим законом к осредненному числу Нуссельта в потоке ньютоновской жидкости от показателя степени  $n$ , полученные при решении двумерной задачи об обтекании потоком жидкости цилиндра с квадратным поперечным сечением в канале со свободными входной и выходной границами при  $Re = 40$ . Препятствие расположено на расстоянии  $x_u = 6$  от входа в канал,  $A/L = 1/15, Pr = 1$ . На входе в канал скорость потока  $u_0 = 1$ , температура потока  $T_0 = 0$ . На поверхности препятствия

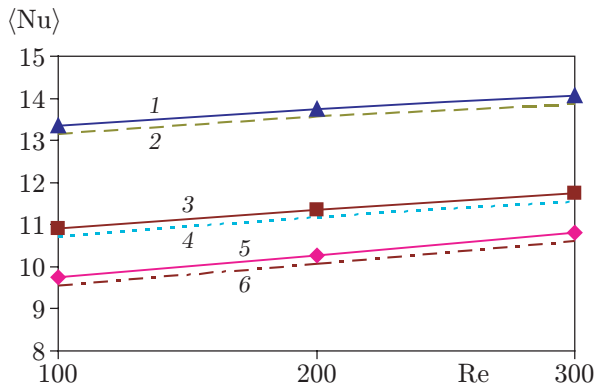


Рис. 9

Рис. 9. Зависимость осредненного числа Нуссельта от числа Рейнольдса при  $A/H = 1/4$ :

1, 2 —  $n = 0,7$ , 3, 4 —  $n = 1,0$ , 5, 6 —  $n = 1,3$ ; 1, 3, 5 — метод решеточных уравнений Больцмана, 2, 4, 6 — МКЭ

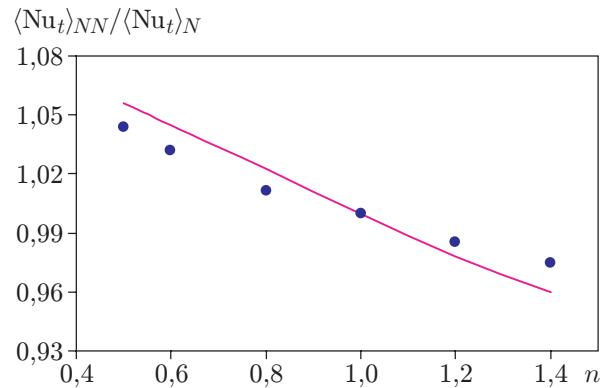


Рис. 10

Рис. 10. Зависимость осредненного числа Нуссельта от показателя степени  $n$  при  $Re = 40$ :

точки — данные настоящей работы, линия — данные работы [40]

Осредненное число Нуссельта при различных значениях числа Рейнольдса и параметра  $A/H$

$A/H$	Re	$\langle Nu \rangle$			
		$n = 0,7$		$n = 1,3$	
		Метод решеточных уравнений Больцмана	МКЭ	Метод решеточных уравнений Больцмана	МКЭ
1/8	100	11,6451	11,4451	8,4050	8,2150
	200	11,9671	11,7771	8,9446	8,7648
	300	12,2056	12,0106	9,6585	9,4625
1/4	100	13,3551	13,1542	9,7475	9,5475
	200	13,7463	13,5563	10,2529	10,0729
	300	14,0549	13,8599	10,7947	10,5987
1/2	100	18,9015	18,7015	14,1856	13,9956
	200	19,5317	19,3417	15,0976	14,9176
	300	20,4662	20,2712	15,6417	15,4457

выполняется условие прилипания, на стенках канала — условие свободного скольжения. Температура поверхности препятствия  $T_H = 1$  постоянна.

В таблице приведены значения осредненного числа Нуссельта при различных значениях параметра  $A/H$ , числа Рейнольдса и показателя степени  $n$ . С увеличением отношения  $A/H$  существенно увеличивается скорость теплообмена. Максимальное значение осредненного числа Нуссельта достигается при  $A/H = 1/2$  и  $n = 0,7$ . Скорость теплообмена линейно возрастает с увеличением параметра  $A/H$  и числа Рейнольдса и убывает с увеличением показателя  $n$ . Различие значений числа Нуссельта, полученных методом решеточных уравнений Больцмана и МКЭ, не превышает 2 % при всех значениях параметра  $A/H$ .

Следует отметить, что расчет с использованием МКЭ вызывает значительные затруднения при решении задач со сложной геометрией расчетной области и на недостаточно

мелкой сетке приводит к значительным ошибкам при определении поля скоростей и температурного поля. При решении приведенных выше задач методом решеточных уравнений Больцмана требуется объем памяти, в пять раз меньший, чем при решении МКЭ. Более того, реализация метода решеточных уравнений Больцмана существенно проще реализации метода конечных элементов. В настоящее время на основе МКЭ созданы различные пакеты программ, предназначенные для решения задач гидродинамики, в то время как метод решеточных уравнений Больцмана находится на стадии разработки. Однако метод решеточных уравнений Больцмана более эффективен, чем МКЭ. В частности, затраты времени, необходимые для решения задачи методом решеточных уравнений Больцмана, существенно меньше. В методе решеточных уравнений Больцмана используется простая процедура распараллеливания [41], в то время как в МКЭ эта процедура достаточно сложна, особенно в случае использования неявных схем.

Метод конечных элементов давно применяется для решения задач о теплопереносе и течении неньютоновских жидкостей, в то время как метод решеточных уравнений Больцмана начал использоваться для решения таких задач сравнительно недавно [25, 26].

Метод решеточных уравнений Больцмана целесообразно применять при решении задач о течении сложных, например пористых, сред. Как отмечено выше, для моделирования динамики жидкости можно использовать и МКЭ, и метод решеточных уравнений Больцмана. Однако в последнее время метод решеточных уравнений Больцмана более интенсивно развивается и применяется для решения различных задач динамики жидкости.

**Заключение.** В работе решена задача об обтекании препятствия, расположенного между двумя параллельными пластинами, неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом ( $n = 0,7; 1,3$ ) при различных значениях числа Рейнольдса. Задача решена методом конечных элементов и методом решеточных уравнений. Различие результатов, полученных с использованием этих двух методов, пренебрежимо мало. Метод решеточных уравнений Больцмана является альтернативой методу конечных элементов при решении задач о течении жидкостей в областях со сложной геометрией. При использовании этого метода требуется меньший объем оперативной памяти (приблизительно  $1/18$  объема оперативной памяти, необходимого при использовании МКЭ), а на решение задачи затрачивается меньше времени.

Из полученных результатов следует, что вблизи препятствия скорость течения псевдопластической жидкости ( $n < 1$ ) больше скорости течения дилатантной жидкости ( $n > 1$ ). Это обусловлено наличием зависимости вязкости жидкости от скорости сдвига.

При больших числах Рейнольдса зона возвратного течения за препятствием в случае дилатантной жидкости увеличивается более существенно, чем в случае псевдопластической жидкости. Скорость теплопереноса линейно возрастает с увеличением параметра  $A/H$  и уменьшается с увеличением показателя степени в реологическом законе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ashby M. F., Verrall R. A.** Micromechanisms of flow and fracture, and their relevance to the rheology of the upper mantle // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1977. V. 288. P. 59–95.
2. **Federico V. D.** Non-Newtonian flow in a variable aperture fracture // *Transport Porous Med.* 1998. V. 30. P. 75–86.
3. **Bird R. B., West J. M.** Constitutive equations for polymeric liquids // *Annual Rev. Fluid Mech.* 1995. V. 27. P. 169–193.
4. **Nichols W. M.** McDonald's blood flow in arteries: Theoretical, experimental and clinical principles. 5th ed. / W. M. Nichols, M. F. O'Rourke. N. Y.: Oxford Univ. Press, 2005.

5. **Gupta A. K., Sharma A., Chhabra R.P., Eswaran V.** Two-dimensional steady flow of a power law fluid past a square cylinder in a plane channel: momentum and heat transfer characteristics // *Indust. Engng Chem. Res.* 2003. V. 42. P. 5674–5686.
6. **Nitin S., Chhabra R. P.** Non-isothermal flow of a power law fluid past a rectangular obstacle (of aspect ratio  $1 \times 2$ ) in a channel: drag and heat transfer // *Intern. J. Engng Sci.* 2005. V. 43. P. 707–720.
7. **Chhabra R. P., Richardson J. F.** *Non-Newtonian flow in the process industries.* Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999.
8. **Chhabra R. P.** *Hydrodynamics of non-spherical particles in non-Newtonian fluids.* N. Y.: Marcel Dekker, 1996. (Handbook of applied polymer processing technology; Chap. 1).
9. **Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J.** Stiffness and deflection analysis of complex structures // *J. Aeronaut. Sci.* 1956. V. 23. P. 805–823.
10. **McNamara G. R., Zanetti G.** Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata // *Phys. Rev. Lett.* 1988. V. 61. P. 2332–2335.
11. **Guo Z. L.** *Lattice Boltzmann method for hydrodynamics* / Z. L. Guo, C. G. Zheng. Wuhan: Hubei Sci. and Technol. Publ., 2002.
12. **Aharonov E., Rothman D. H.** Non-Newtonian flow (through porous-media): a lattice Boltzmann method // *Geophys. Res. Lett.* 1993. V. 20. P. 679–682.
13. **Gabbanelli S., Drazer G., Koplik J.** Lattice Boltzmann method for non-Newtonian (power law) fluids // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 72. 046312.
14. **Boyd J., Buick J., Green S.** A second-order accurate lattice Boltzmann non-Newtonian flow model // *J. Phys. A.* 2006. V. 39. P. 14241–14247.
15. **Dhiman A. K.** Heat transfer to power law dilatant fluids in a channel with a built-in square cylinder // *Intern. J. Thermal Sci.* 2009. V. 48. P. 1552–1563.
16. **Bouaziz M., Kessentini S., Turki S.** Numerical prediction of flow and heat transfer of power law fluids in a plane channel with a built-in heated square cylinder // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2010. V. 53. P. 5420–5429.
17. **Wang C. H., Ho J. R.** A lattice Boltzmann approach for the non-Newtonian effect in the blood flow // *Comput. Math. Appl.* 2011. V. 62. P. 75–86.
18. **Sohankar A., Norberg C., Davidson L.** Low-Reynolds number flow around a square obstacle at incidence: Study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 1998. V. 26. P. 39–56.
19. **Quarteroni A., Veneziani T. M.** *Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods* // *Comput. Visual Sci.* 2000. V. 2. P. 163–197.
20. **Bird R. B.** *Dynamics of polymeric liquids.* 2nd ed. V. 1. Fluid mechanics. N. Y.: John Wiley and Sons, 1987.
21. **Byron Bird R.** *Transport phenomena* / R. Byron Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot. N. Y.: John Wiley and Sons, 1960.
22. **Peng Y., Shu C., Chew Y. T.** Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flows // *Phys. Rev. E.* 2003. V. 68. 026701.
23. **Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M.** A model for collision processes in gases. 1. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // *Phys. Rev.* 1954. V. 94, N 3. P. 511–525.
24. **Qian Y. H., d’Humières D., Lallemand D. P.** Lattice BGK models for Navier — Stokes equation // *Europhys. Lett.* 1992. V. 17. P. 479–484.
25. **He X. Y., Chen S. Y., Doolen G. D.** A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit // *J. Comput. Phys.* 1998. V. 146. P. 282–300.

26. **Yan Y. Y., Zu Y. Q.** Numerical simulation of heat transfer and fluid flow past a rotating isothermal cylinder — a LBM approach // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 2519–2536.
27. **Mohamad A. A.** Applied lattice Boltzmann method for transport phenomena, momentum, heat and mass transfer. Calgary: Univ. of Calgary, 2007.
28. **Wang J. K., Wang M. R., Li Z. X.** A lattice Boltzmann algorithm for fluid-solid conjugate heat transfer // Intern. J. Thermal Sci. 2007. V. 46. P. 228–234.
29. **Dhiman A. K., Chhabra R. P., Eswaran V.** Steady flow across a confined square cylinder: effects of power-law index and blockage ratio // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2008. V. 148. P. 141–150.
30. **Dhiman A. K., Chhabra R. P., Eswaran V.** Heat transfer to power-law fluids from a heated square cylinder // Numer. Heat Transfer. A. 2007. V. 52. P. 185–201.
31. **Zou Q. S., He X. Y.** On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model // Phys. Fluids. 1997. V. 9, N 6. P. 1591–1598.
32. **Mei R., Luo L. S., Shyy W.** An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method // J. Comput. Phys. 1999. V. 155. P. 307–330.
33. **Inamuro T., Yoshino M., Ogino F.** A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations // Phys. Fluids. 1995. V. 7, N 12. P. 2928–2930.
34. **Zienkiewicz O. C.** Finite element method for fluid dynamics. 6th ed. / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Nithiarasu. Amsterdam: Elsevier, 2005.
35. **Nannelli F., Succi S.** The lattice-Boltzmann equation on irregular lattices // J. Statist. Phys. 1992. V. 68. P. 401–407.
36. **Cao N., Chen S., Jin S., Martinez D.** Physical symmetry and lattice symmetry in the lattice-Boltzmann method // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 21–24.
37. **He X., Luo L. S., Dembo M.** Some progress in lattice-Boltzmann methods. 1. Nonuniform mesh grids // J. Comput. Phys. 1996. V. 129. P. 357–363.
38. **Chen S., Doolen G. D.** Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annual Rev. Fluid Mech. 1998. V. 30. P. 329–364.
39. **Cengel Y. A.** Heat and mass transfer. 3rd ed. Singapore: Mc Graw Hill, 2006.
40. **Paliwal B., Atul Sharma, Chhabra R. P., Eswaran V.** Power law fluid flow past a square cylinder: momentum and heat transfer characteristics // J. Chem. Engng Sci. 2003. V. 58. P. 5315–5329.
41. **Kandhai D., Koponen A., Hoekstra A., et al.** Lattice-Boltzmann hydrodynamics on parallel systems // Comput. Phys. Comm. 1998. V. 111. P. 14–26.

*Поступила в редакцию 29/X 2012 г.,  
в окончательном варианте — 24/XII 2013 г.*

---