

Ю. В. Чугуй, Н. А. Яковенко, М. Д. Ялуплин

(Краснодар – Новосибирск)

**МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ РАЗМЕРОВ ОБЪЕКТОВ  
В КОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ  
НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФРЕНЕЛЯ**

Исследуются точностные характеристики оптического метода измерений размеров объектов на основе их дифракционных картин Френеля. Аналитически оценено влияние неравномерного освещения контролируемого объекта на точность определения его границ. Предложен эффективный алгоритм снижения погрешности измерения (вызванной этим фактором), который учитывает значения амплитуды и производной освещающего поля в окрестности границ объекта, что позволяет уменьшить ее уровень в десятки раз.

**Введение.** Тенденция повышения качества изделий, их микроминиатюризация требуют создания бесконтактных средств размерного контроля со все более высокими техническими характеристиками. Измерители должны иметь разрешение от 0,01 мкм до нескольких микрон, высокое быстродействие (более  $10^3$  измер./с), широкий диапазон измерений (от нескольких микрон до десятков миллиметров). Средства измерения должны быть относительно недорогими и компактными, чтобы их можно было встраивать в различные технологические линии. Существующий парк контрольно-измерительных систем и средств не всегда отвечает указанным требованиям.

Большой класс изделий составляют объекты с четкой теневой проекцией, измерение геометрических параметров которых осуществляется в проходящем свете. Для контроля таких объектов используются сканирующие, дифракционные и теневые измерители. Идея первых из них основана на сканировании объекта узким лучом лазера. Реализация этой идеи требует применения дорогостоящих сканеров, специальной  $F\theta$ -оптики и точной калибровки. Такие измерители чувствительны к вибрациям, что затрудняет их применение в промышленных условиях [1].

Для измерения малых размеров (до 50 мкм) наиболее пригодны дифракционные методы, использующие дифракционные картины Фраунгофера – пространственно-частотные спектры объектов. Дифракционные измерители обладают хорошими точностными характеристиками (разрешение 0,1 мкм), но сложны в реализации и требуют применения дорогостоящих фурье-объективов [2].

Важное место среди измерительных систем занимают теневые, объектом измерения для которых является теневое изображение контролируемого изделия, формируемое высококачественной проекционной оптикой. Верхний предел измерения у таких измерителей составляет десятки миллиметров, а

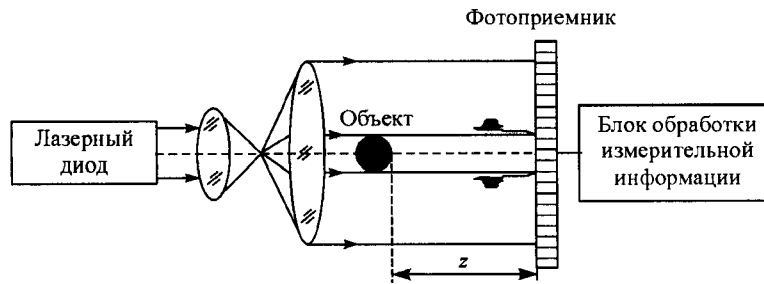


Рис. 1. Блок-схема френелевского измерителя размеров в когерентном свете

нижний – порядка 0,5 мм, при этом погрешность измерения достигает 3–5 мкм и более [3]. Существенно, что приведенные измерители уже не удовлетворяют современным техническим и массогабаритным требованиям, и это стимулирует поиск новых или применение известных явлений для измерения размеров объектов.

Одна из таких возможностей открывается при использовании дифракционных френелевских картин, формируемых на некотором расстоянии от объектов. В этом случае в качестве «оптического элемента» выступает свободное пространство, преобразующее входное изображение объекта в его френелевский образ с более высокой точностью в сравнении с традиционными проекционными системами. Несмотря на широкую известность, возможности применения преобразования Френеля в оптике в измерительных целях изучены крайне недостаточно [4]. Это связано, прежде всего, со сложностью математического аппарата, описывающего дифракционные явления Френеля.

Вместе с тем использование явления дифракции Френеля для контроля геометрических параметров объектов создает предпосылки как радикального улучшения технических характеристик средств измерения, так и создания принципиально новых, например малогабаритных, дешевых и конкурентоспособных, датчиков для решения различных задач. Все это требует тщательных исследований и, прежде всего, анализа точностных характеристик френелевского метода измерений.

Далее изложена суть френелевского метода измерений, аналитически детально исследована одна из основных составляющих погрешности, связанная с неравномерным освещением объекта.

1. **Френелевский метод измерений** геометрических размеров объекта основан на использовании его дифракционной картины Френеля – френелевского изображения (рис. 1). Измеряемый объект с амплитудным пропусканием  $f(x_1, y_1)$ ,  $M$  геометрических параметров  $\{D_i\}$  которого подлежат контролю, освещается плоской монохроматической волной света с амплитудой  $E_0$ . На расстоянии  $z$  от объекта, удовлетворяющем условию  $z \ll D_{\min}^2/\lambda$  (здесь  $D_{\min}$  – минимальный размер объекта), формируется дифракционная картина Френеля в виде амплитудного распределения  $g(x_2, y_2)$ , равного свертке входного распределения  $f(x_1, y_1)$  с импульсным откликом свободного пространства  $h(x_2, y_2)$  [5]:

$$g(x_2, y_2) = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1) h(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dy_1, \quad (1)$$

где

$$h(x_2, y_2) = 1/i\lambda z \exp(ik[x_2^2 + y_2^2]/2z). \quad (2)$$

Полученное распределение интенсивности света  $I(x_2, y_2) = |g(x_2, y_2)|^2$  регистрируется многоэлементным линейным фотоприемником, например, ПЗС-линейкой, сигнал которой поступает в электронный блок обработки измерительной информации. В этом блоке с помощью соответствующих алгоритмов производится вычисление искомых геометрических параметров объекта.

В качестве примера рассмотрим объект в виде одномерной щели шириной  $D$ . На рис. 2 приведена типичная френелевская картина щели, амплитудное пропускание  $f(x_1)$  которой можно представить в виде разности двух ступенчатых функций Хевисайда  $Y(x_1)$ :

$$f(x_1) = \text{rect}(x_1/D) = Y(x_1 + 0,5D) - Y(x_1 - 0,5D), \quad (3)$$

где  $\text{rect}(x_1/D)$  – прямоугольная функция [5].

Френелевское изображение  $g(x_2)$  такого объекта согласно (1) имеет следующий вид:

$$g(x_2) = E_0[\tilde{Y}(x_2 + 0,5D) - \tilde{Y}(x_2 - 0,5D)], \quad (4)$$

где  $\tilde{Y}(x)$  – френелевский образ функции  $Y(x)$ , определяемый посредством стандартного интеграла Френеля  $F(x) = \int_0^x e^{inx^2/2} dx$  [6] соотношением

$$\tilde{Y}(x) = \frac{e^{-in/4}}{\sqrt{2}} \left[ F(\infty) + F\left(\sqrt{\frac{k}{\pi z}} x\right) \right]. \quad (5)$$

Рассмотрим более детально структуру френелевского изображения щели и связанный с ней алгоритм обработки измерительной информации. С этой целью обратимся к распределению интенсивности  $I(x_2, y_2)$  света в дифрак-

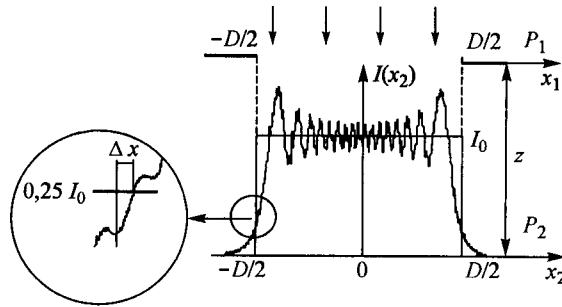


Рис. 2. Френелевская картина щели:  $P_1$  – плоскость объекта,  $P_2$  – плоскость изображения

ционной картине щели, которое согласно (4) может быть представлено следующим соотношением:

$$I(x_2) = |g(x_2)|^2 = I_0 \left[ \left| \tilde{Y}(x_2 + 0,5D) \right|^2 + \left| \tilde{Y}(x_2 - 0,5D) \right|^2 - Z(x_2, D) \right], \quad (6)$$

где

$$Z(x_2, D) = 2 \left| \tilde{Y}(x_2 + 0,5D) \right| \left| \tilde{Y}(x_2 - 0,5D) \right| \cos[\varphi(x_2 + 0,5D) - \varphi(x_2 - 0,5D)]$$

– интерференционный член, соответствующий взаимодействию дифракционных изображений краев;  $\varphi(x_2)$  – аргумент комплексной функции  $\tilde{Y}(x_2)$ . Видно, что френелевская картина объекта напоминает исходное теневое изображение. Действительно, распределение  $I(x_2, y_2)$  имеет освещенные и теневые участки, причем размеры освещенного участка френелевского изображения в целом соответствуют размеру  $D$ . Отличие френелевского изображения от теневого состоит, во-первых, в появлении в пределах освещенной части объекта полос, количество которых  $N$ , например, для щели определяется числом Френеля  $N = D^2 / 4\lambda z$  [7], и, во-вторых, в существовании переходной области между светом и тенью (т. е. граница между ними не является резкой), причем размеры  $\Delta$  этой переходной области порядка зоны Френеля:  $\Delta \sim \sqrt{\lambda z}$ . Более того, вследствие взаимодействия полей от краев объекта его френелевская картина модулирована высокочастотными колебаниями (микроструктура), период которых зависит от параметров  $z$ ,  $\lambda$  и  $D$ . Если теперь параметры  $D$ ,  $z$ ,  $\lambda$  выбраны таким образом, что число Френеля  $N \gg 1$ , то положения границ объекта (координаты  $x_1 = \pm D/2$ ) в френелевском изображении приближенно соответствуют точкам  $x_2$ , в которых интенсивность распределения составляет 0,25 % от интенсивности падающего излучения  $I_0$  [8], т. е.

$$I(x_2 = \pm D/2) = 0,25I_0. \quad (7)$$

Таким образом, определение искомого размера  $D$  в френелевской картине производится путем пороговой обработки распределения  $I(x_2)$  на уровне  $0,25I_0$  (порог) (см. рис. 2).

Предварительные оценки показывают, что такие измерители потенциально могут иметь высокие технические характеристики: расширенный диапазон измерений (от десятков микрометров до десятков миллиметров), высокую точность измерений (погрешность от десятых долей до нескольких микрон). При использовании предлагаемого метода измерения в качестве оптического элемента выступает свободное пространство (параметр  $z$ ), которое в сравнении с проекционными оптическими системами преобразует входное распределение  $f(x_1, y_1)$  во френелевское изображение  $g(x_2, y_2)$  с более высокой точностью. Характеристики такого элемента близки к идеальным. Он не вносит дополнительных искажений при формировании выходного изображения объекта, подлежащего измерению, и таким образом лишен всякого рода aberrаций, присущих даже совершенным линзовым системам. При этом параметр  $z$ , характеризующий дифракционную картину Френеля и определяющий, очевидно, габаритные размеры измерителя, не превышает нескольких десятков миллиметров. Это обстоятельство открывает возмож-

ность создания компактных измерителей с высокими массогабаритными показателями в сравнении с традиционными теневыми измерительными системами.

Однако здесь не учитывается ряд факторов, которые в реальной измерительной системе могут несколько ухудшить упомянутые выше характеристики: непостоянство амплитудной и фазовой компонент освещающего объект волнового фронта в пределах рабочего поля измерителя (неравномерное освещение); влияние протяженных свойств объекта; наличие в переходных областях френелевского изображения объекта микроструктуры в виде высокочастотных колебаний, обусловленных эффектом интерференции (взаимодействием) дифракционных изображений краев (см. рис. 2); искажение оптического сигнала при его регистрации многоэлементным фотоприемником вследствие конечных размеров его пиксел. Среди указанных факторов первый является более существенным, что объясняется пороговым характером определения положения краев. Таким образом, при неравномерном освещении объекта волной  $E(x_1, y_1)$  возникает проблема определения порога. Выбор такого, на первый взгляд эффективного, параметра, как усредненное в пределах ширины щели значение входного распределения  $E(x_1, y_1)$ , т. е.  $\tilde{E}_0 = \langle E(x_1, y_1) \rangle$ , может оказаться неверным. Этот тезис подтверждается известным фактом из френелевской зонной теории формирования изображения  $g(x_2, y_2)$ , а именно основной вклад в поле  $g(x_2, y_2)$  в точке с координатами  $(x_2, y_2)$  дают лишь ближайшие зоны в ее окрестности. Иными словами, операция формирования поля  $g(x_2, y_2)$  носит во многом локальный характер несмотря на неограниченность импульсного отклика (2) по пространству.

Таким образом, нахождение искомого геометрического параметра объекта с высокой точностью по дифракционной картине Френеля в условиях его неравномерного освещения требует проведения тщательных исследований, в результате которых должны быть представлены эффективные способы обработки френелевского изображения с учетом неравномерного фронта на входе.

**2. Влияние неравномерного освещения на структуру френелевского изображения края объекта.** 2.1. *Исходные соотношения.* Анализируя погрешность френелевского метода измерений размеров объектов при их неравномерном освещении, рассмотрим лишь случай, когда объект  $f(x_1)$  в виде полуплоскости (одномерный край) с амплитудным пропусканием  $f(x_1) = Y(x_1)$  расположен в центре рабочего поля.

Очевидно, что такой фрагмент является базовым элементом объектов с четкой теневой проекцией (см., например, выражение (3)). Отметим, что обобщение полученных результатов при наличии у объекта нескольких границ (если ширина щели удовлетворяет условию  $D \gg \sqrt{\lambda z}$ ) не встречает серьезных трудностей. Во избежание сложностей расчета дифракционного поля моделирование неравномерно освещающей объект волны выполнялось на примере гармонического распределения вида

$$E_{\text{вх}}(x_1) = E_0 [1 + \alpha \cos(\omega x_1 + \varphi)], \quad (8)$$

где  $\omega = 2\pi/T$  – угловая пространственная частота колебаний ( $T$  – период),  $\varphi$  – начальная фаза колебаний, а параметр  $\alpha$  определяет амплитуду «шума», который накладывается на однородное поле  $E_0$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). Первый член в (8) является полезной составляющей в случае равномерного освещения, а вто-

рой – шумовой составляющей, задающей уровень и период неравномерности. Выбором  $\varphi$  можно смещать шумовую составляющую вдоль оси  $x_1$ . Так, например, при  $\varphi = 0$  ( $\varphi = \pi$ ) эта составляющая имеет косинусоидальный вид:

$$E(x_1) = E_0 [1 \pm \alpha \cos \omega x_1],$$

а при  $\varphi = \pi/2$  ( $\varphi = 3\pi/2$ ) – синусоидальный:

$$E(x_1) = E_0 [1 \mp \alpha \sin \omega x_1].$$

Верхний знак соответствует значениям начальной фазы  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ , а нижний – значениям  $\varphi = \pi$  и  $\varphi = 3\pi/2$ . При дальнейших расчетах будем полагать, что параметр  $\alpha \ll 1$  (составляет не более 10–20 % от уровня постоянной составляющей входного поля). Можно ожидать, что влияние неравномерного освещения на френелевское изображение края во многом зависит от соотношения между периодом колебаний  $T$  и размером зоны Френеля, а также от значения параметра  $\varphi$ .

Итак, поле на выходе одномерного края  $Y(x_1)$  при освещении его указанной выше волной (8) имеет вид

$$E_{\text{вх}}(x_1) = E_0 Y(x_1) [1 + \alpha \cos(\omega x_1 + \varphi)]. \quad (9)$$

Если теперь второй член в (9) представить в экспоненциальном виде как совокупность двух плоских наклонных волн  $0,5\alpha e^{i(\omega x_1 + \varphi)}$  и  $0,5\alpha e^{-i(\omega x_1 + \varphi)}$ , то для распределений  $g(x_2)$  и  $I(x_2)$  можно получить следующие выражения:

$$g(x_2) = E_0 \left\{ \tilde{Y}(x_2) + 0,5\alpha e^{-iz\omega^2/2k} [e^{i(\varphi + \omega x_2)} \tilde{Y}(x_2 - \beta) + e^{-i(\varphi + \omega x_2)} \tilde{Y}(x_2 + \beta)] \right\}, \quad (10)$$

$$I(x_2) = |g(x_2)|^2 = \\ = I_0 \left| \tilde{Y}(x_2) + 0,5\alpha e^{-iz\omega^2/2k} [e^{i(\varphi + \omega x_2)} \tilde{Y}(x_2 - \beta) + e^{-i(\varphi + \omega x_2)} \tilde{Y}(x_2 + \beta)] \right|^2, \quad (11)$$

где  $\beta = (z\omega)/k$ .

Видно, что выходное поле (10), кроме полезной составляющей  $\tilde{Y}(x_2)$ , соответствующей дифракционному изображению края при его равномерном освещении, содержит две дополнительные составляющие с амплитудой  $\alpha$ , которые описывают дифракционные изображения края, формируемые при освещении двумя плоскими шумовыми компонентами. Два таких дополнительных дифракционных изображения края смещены относительно центра на величину  $\beta = \pm \lambda z/T$  и имеют дополнительный сдвиг фаз ( $k$  основному члену), равный  $e^{-iz\omega^2/2k}$ . Интерференция этих трех полей и определяет структуру и отличительные особенности дифракционного изображения края объекта при его неравномерном освещении гармонического типа (рис. 3).

Очевидно, что неравномерное освещение объекта должно приводить к смещению его геометрического края при определении параметра  $D$  в френелевской картине по уровню  $0,25I_0$ . Исследуем поведение поля (11) в окрест-



$0,5\alpha e^{-i(\omega x_1 + \varphi)}$ , взаимодействуют с основным френелевским изображением. Видно, что важный вклад в результирующее поле вносит левое френелевское изображение, смещенное на  $-\beta$ , амплитуда которого ( $\alpha$ ) заметно больше амплитуды правого френелевского изображения, уровень которой в  $N^{-1}$  раз меньше левой составляющей. Действительно, при  $T \ll \sqrt{\lambda z}$  фазовой компонентой  $e^{i(\omega x_1 + \varphi)}$  в выражении (10) в силу ее незначительного вклада в результирующее поле в окрестности геометрического края объекта можно пренебречь, т. е. выражение для  $I(x_2)$  при  $x_2/\sqrt{\lambda z} \ll 1$  принимает следующий вид:

$$I(x_2) = I_0 \left| \tilde{Y}(x_2) + 0,5\alpha e^{-i\pi/N^2} e^{-i(\omega x_2 + \varphi)} \tilde{Y}(x_2 + \beta) \right|^2. \quad (12)$$

Воспользуемся далее предложенной в [9] аппроксимацией френелевского изображения края

$$\tilde{Y}(x) = Y(x) - 0,5p \operatorname{sign}(x) \frac{e^{ikx^2/2z}}{|x| + p}, \quad (13)$$

где  $p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{\gamma} e^{\pi/4}$ ,  $\gamma = \pi$  при  $x \gg \sqrt{\lambda z}$  и  $\gamma = 2$  при  $x \ll \sqrt{\lambda z}$ .

Принимая во внимание, что согласно (13)  $\tilde{Y}(x_2) = 0,5 + e^{-i\pi/4} x_2/\sqrt{\lambda z}$ ,  $\tilde{Y}(x_2 + \beta) \approx 1$ , для интенсивности (12) можно получить выражение

$$I(x_2) \approx 0,25 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}x_2}{\sqrt{\lambda z}} + 2\alpha \cos\left(\frac{\pi}{N^2} + \varphi + \omega x_2\right) \right). \quad (14)$$

В (14) мы ограничились линейным членом по  $\alpha$ . Выражение (14) описывает интерференцию двух полей: нормально падающей волны и волны наклонного типа  $e^{-i(\omega x_2 + \varphi)}$ . В результате на полученную составляющую (два первых слагаемых) накладывается шумовая гармоническая составляющая с периодом колебаний  $T$  и амплитудой  $\alpha$ , что приводит к смещению геометрического края объекта  $\Delta x \sim 0,5T$  (см. рис. 4).

Отметим, что эту составляющую погрешности можно заметно снизить путем низкочастотной фильтрации френелевского изображения (14), что имеет место, например, на практике при его фоторегистрации существующими ПЗС-линейками, размер элементов (пиксел) которых составляет 7–14 мкм.

Полученный результат несложно обобщить, если высокочастотное неравномерное освещение более сложного профиля (негармонического типа). Функцию  $E(x_1)$  можно разложить в ряд Фурье по гармоническим функциям и выделить из них компоненты, которые вносят основной вклад в поле в окрестности геометрического края объекта.

**2.3. Неравномерное освещение низкочастотного типа.** Исследуем детально случай, когда период шумовой составляющей, связанной с неравномерным освещением пучка,  $T \gg \sqrt{\lambda z}$ .

Рассмотрим вначале влияние неравномерного освещающего поля на структуру формирования френелевского изображения объекта, когда началь-



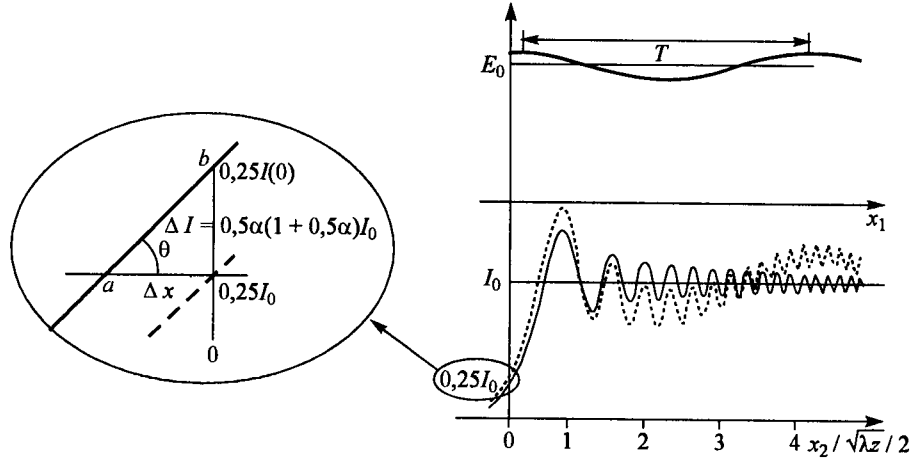


Рис. 5. Френелевское изображение края при неравномерном освещении низкочастотного косинусоидального типа:  $\varphi = 0$ ,  $T = 5\sqrt{\lambda z}$  ( $N = 5$ ) (штриховая кривая – равномерное освещение, сплошная кривая – неравномерное освещение)

ная фаза  $\varphi = 0$  ( $\varphi = \pi$ ) (рис. 5), т. е. при освещении края полем косинусоидального типа  $E(x_1) = E_0 [1 \pm \alpha \cos \omega x_1]$ . С учетом  $\tilde{Y}(-\beta) + \tilde{Y}(\beta) = 1$  интенсивность  $I(x_2)$  в точке  $x_2 = 0$  согласно (11) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 I(0) &= I_0 \left( 0,25 \pm \frac{\alpha}{2} \cos \left( \frac{\pi}{N^2} \right) + \frac{\alpha^2}{4} \right) = \\
 &= 0,25 I_0 \left[ (1 \pm \alpha)^2 \mp \frac{\pi^2 \alpha}{N^2} \right].
 \end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) следует, что слагаемое, зависящее от параметра  $N$ , резко падает с его увеличением и при  $\frac{\pi \alpha}{N^4} \ll \alpha^2$  ( $N^4 > \sqrt{\pi/\alpha}$ ) им можно пренебречь.

В предельном случае ( $T^2/\lambda z \rightarrow \infty$ ) выражение (15) упрощается:

$$I(0) \approx 0,25 I_0 (1 \pm \alpha)^2. \tag{16}$$

Из уравнения (16) видно, что значение интенсивности  $I(0)$  в плоскости наблюдения дифракционной картины при  $N \gg 1$  в заметной степени определяется входным значением интенсивности в месте расположения исходного края, т. е. в точке  $x_1 = 0$ . Значение амплитуды входной освещающей волны при  $N > 5$  в точке  $x_1 = 0$  составляет  $E_{\text{вх}}(0) = E_0 (1 \pm \alpha)$ , а значение интенсивности  $I_{\text{вх}}(0) = I_0 (1 \pm \alpha)^2$ . Таким образом, из (16) следует, что наблюдаемая интенсивность  $I(0)$  френелевского изображения края в месте его расположения ( $x_2 = 0$ ) составляет 25 % от входного значения интенсивности в точке  $x_1 = 0$ :  $I(0) = 0,25 I_{\text{вх}}(0)$ .

Итак, влияние неравномерного освещения на френелевское изображение в окрестности края при  $T > 5\sqrt{\lambda z}$  носит локальный характер, т. е. значение

интенсивности в точке  $x_2 = 0$  определяется лишь значением интенсивности поля в точке расположения края. Иными словами, можно ожидать, что вклад дальних френелевских зон крайне незначителен и им можно пренебречь.

Изучим влияние неравномерного освещения в случае, когда начальная фаза освещающей волны (8)  $\varphi = \pi/2$  ( $\varphi = 3\pi/2$ ) (синусоидальное освещение края), т. е.  $E_{\text{вх}}(x_1) = E_0(1 + \alpha \sin \omega x_1)$  (рис. 6). Из выражения (11) видно, что интенсивность в френелевском изображении края в точке  $x = 0$  определяется выражением

$$I(0) = 0,25I_0(1 \mp \alpha 2\sqrt{2}/N). \quad (17)$$

Согласно (17) влияние неравномерного освещения на дифракционное поле в этом случае в  $N$  раз меньше, чем при  $\varphi = 0$  ( $\varphi = \pi$ ) (см. (11)), т. е. значение  $I_0$  определяется значением производной входного поля  $E(x_1)$  в месте расположения края:  $E'(0) = E_0\omega = 2\pi E_0/T$ . Существенно, что при  $N \rightarrow \infty$  значение интенсивности  $I(0)$  стремится к  $0,25I_0$ .

Особый интерес представляет влияние неравномерного освещения в промежуточном случае, когда начальная фаза, например, равна  $\varphi = \pi/4$ . Распределение интенсивности френелевского изображения края в точке  $x_2 = 0$  имеет вид

$$I(0) = 0,25I_0(1 + \alpha(\sqrt{2} + 8N^{-1})). \quad (18)$$

Из выражения (18) видно, что значение интенсивности  $I(0)$  в плоскости наблюдения определяется входным значением интенсивности в месте расположения края и значениями производной и интенсивности в месте расположения края, когда на периоде колебаний укладывается лишь несколько френелевских зон.

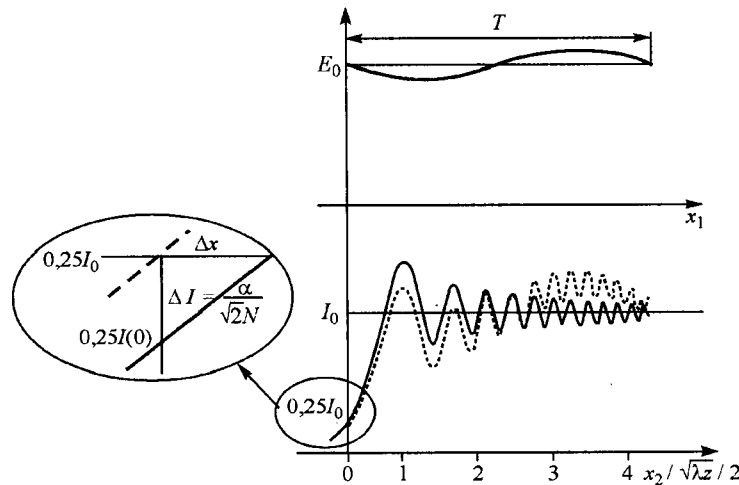


Рис. 6. Френелевское изображение края при неравномерном освещении низкочастотного синусоидального типа:  $\varphi = \pi/2$ ,  $T = 5\sqrt{\lambda z}$  ( $N = 5$ ) (штриховая кривая – равномерное освещение, сплошная кривая – неравномерное освещение)

Очевидно, что неравномерное освещение приводит к смещению геометрического края объекта при определении его на уровне  $0,25I_0$ . Найдем аналитически величину этого смещения  $\Delta x$ . С этой целью воспользуемся выражением (10). Разложив (10) в окрестности точки  $x_2 = 0$  (при  $T \gg \sqrt{\lambda z}$ ) в ряд Тейлора и ограничившись при этом двумя членами разложения, можно показать (см. приложение 2), что выражение для ошибки  $\Delta x$  (смещение геометрического края объекта) имеет следующий вид:

$$\Delta \tilde{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{2\lambda z}} = \frac{\alpha \left[ \cos(\varphi) \cdot \cos(\pi/N^2) - \frac{\sqrt{2}}{N} \sin(\varphi) \cdot \cos(\pi/N^2) + 0,5\alpha \cos^2(\varphi) \right]}{\left( 1 + 2\alpha \cos(\varphi) - \frac{\alpha 2\sqrt{2}\pi}{N} \sin(\varphi) \right)}, \quad (19)$$

где  $N = T/\sqrt{\lambda z}$ .

Исследуем поведение смещения  $\Delta \tilde{x}$  (19) в точке  $x_2 = 0$  ( $T \gg \sqrt{\lambda z}$ ) при различных значениях начальной фазы колебаний. Изучим вначале влияние неравномерности освещающего поля, если начальная фаза  $\varphi = 0$ , т. е. при освещении края полем  $E(x_1) = E_0[1 \pm \alpha \cos \omega x_1]$ . В этом случае выражение для  $\Delta x$  в точке  $x_2 = 0$  запишем как

$$\Delta \tilde{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{2\lambda z}} = -\frac{\alpha [\cos(\pi/N^2) + 0,5\alpha]}{(1 + \alpha (1 + \cos(\pi/N^2)))} \approx -\alpha [\cos(\pi/N^2) - 1,5\alpha]. \quad (20)$$

Видно, что величина  $\Delta x$  пропорциональна размеру зоны Френеля  $\sqrt{\lambda z}$  и параметру  $\alpha$ , характеризующему уровень шумовой составляющей в освещающей объект волне. Например, при выборе  $\lambda = 0,63$  мкм,  $z = 10$  мм и  $\alpha = 10\%$  значение  $\Delta x$  составляет 6 мкм. Следует, однако, отметить, что погрешность  $\Delta x$  при указанном выше условии ( $T \gg \sqrt{\lambda z}$ ) носит методический характер. Ее повышенный уровень связан с неадекватностью выбора порога регистрации френелевского изображения ( $0,25I_0$ ) в условиях, когда освещенность края исследуемого объекта больше, нежели в случае равномерного освещения. Освещенность края в граничной точке  $x_1 = 0$  равна  $I_0(1 + \alpha)^2$ , и вследствие локального характера преобразования Френеля при определении геометрического края ( $x_2 = 0$ ) следует выбирать значение порога  $I_{\text{пор}} = 0,25I_0(1 + \alpha)^2$ . Можно показать, что при выборе порога регистрации  $I_{\text{пор}}$  величина смещения  $\Delta x$  пренебрежимо мала.

Что касается величины смещения края  $\Delta x$  при  $\varphi = \pi/2$ , то представим ее в виде

$$\Delta \tilde{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{2\lambda z}} = \frac{\alpha \sin(\pi/N^2 + \pi/2)}{N(1 + \alpha)} = \alpha \sin(\pi/N^2 + \pi/2)(1 - \alpha)/N. \quad (21)$$

Для оценки точности формулы (19) сравним ее с теоретическими расчетами, полученными прямым вычислением  $\Delta x$  по исходной формуле (11). В качестве примера выберем значение начальной фазы  $\varphi = \pi/2$  (рис. 7).

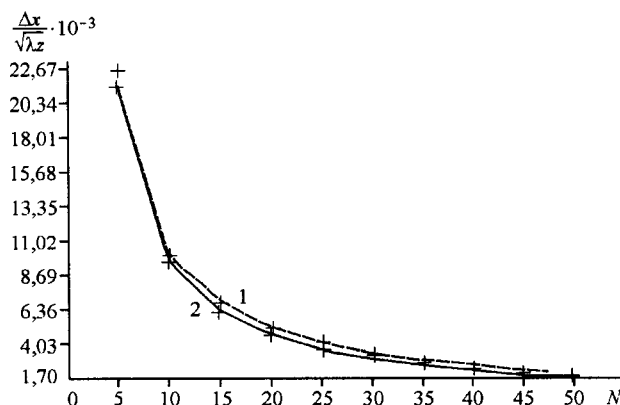


Рис. 7. Сравнение теоретического (кривая 1) и аналитического (кривая 2) расчетов смещения края объекта при синусоидальном освещении ( $\alpha = 0,1$ )

Можно видеть, что несоответствие между аналитической и теоретической кривыми объясняется тем, что при выводе выражения (19) кривая  $ab$  (см. рис. 5) аппроксимирована прямой линией. В действительности отрезок  $ab$  является нелинейной кривой. Из рис. 7 видно, что результаты численных расчетов находятся в согласии с результатами, полученными аналитически при  $T \gg \sqrt{\lambda z}$  (21). При  $\varphi = 0$  положение геометрического края объекта определяется входным значением интенсивности в месте расположения края. Вклад дальних френелевских зон незначителен. При  $\varphi = \pi/2$  смещение определяется производной интенсивности в месте расположения края, значение которой задается тангенсом угла наклона кривой, зависящего от параметра  $T$  (рис. 8).

Исследуем теперь смещение  $\Delta x$  при  $\varphi = \pi/4$ . Можно ожидать, что величина  $\Delta x$  будет минимальна, когда на периоде колебаний  $T$  укладывается лишь небольшое число зон Френеля. Покажем это, переписав выражение (19):

$$\Delta x = \frac{\sqrt{\lambda z} \alpha (1 - \sqrt{2N}^{-1})}{1 + \alpha (1,7 - 2\pi N^{-1})}. \quad (22)$$

Действительно, значение  $\Delta x$  минимально при максимальном значении производной, т. е. когда на периоде колебаний  $T$  укладывается лишь небольшое число френелевских зон. Так, например, при  $T = 5\sqrt{\lambda z}$  значение  $\Delta x = 2,5 \cdot 10^{-3}$  мкм, а при  $T = 50\sqrt{\lambda z}$  оно составляет  $\Delta x = 3,5 \cdot 10^{-3}$  мкм.

Можно ожидать, что при соответствующем выборе порога  $\tilde{I}_{\text{пор}}$  в виде поправки к стандартному  $I_{\text{пор}} = 0,25I_0$  смещение  $\Delta x$  заметно снизится. С этой целью введем в

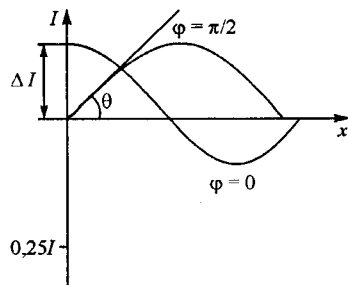


Рис. 8. Смещение  $\Delta I$  в зависимости от значения начальной фазы  $\varphi$

выражение (19) корректирующий параметр  $\mu = \tilde{I}_{\text{пор}} / I_{\text{пор}}$ . В этом случае выражение для ошибки  $\Delta x$  принимает вид

$$\Delta \tilde{x}_{\text{кор}} = \frac{0,25(\mu - 1) - 0,5\alpha \cos \varphi \cdot \cos(\pi/N^2) +}{1 + \alpha(1 + \cos \varphi) - 2\sqrt{2}\pi\alpha N^{-1} \sin \varphi} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ \alpha N^{-1} \sin \varphi \cdot \cos(\pi/N^2) / \sqrt{2} - 0,25\alpha^2 \cos^2 \varphi}{1 + \alpha(1 + \cos \varphi) - 2\sqrt{2}\pi\alpha N^{-1} \sin \varphi}. \quad (23)$$

Очевидно, что при выборе корректирующего параметра

$$\mu = 1 + 2\alpha \cos \varphi \cdot \cos(\pi/N^2) - 2\sqrt{2}\alpha N^{-1} \sin \varphi \cdot \cos(\pi/N^2) + \alpha^2 \cos^2 \varphi \quad (24)$$

оценка ошибки определения положения границы объекта в виде полуплоскости будет близка к нулю:  $\Delta \tilde{x}_{\text{кор}} = 0$ . Существенно, что параметр  $\mu$  учитывает как значение интенсивности поля освещающей волны, так и значение ее производной в месте расположения края. Так, при косинусном освещении ( $\varphi = 0$ ) согласно (24) значение  $\mu = (1 + \alpha)^2$ , а при синусном ( $\varphi = \pi/2$ ) оно составляет  $\mu = 1 - 2\sqrt{2}\alpha N^{-1}$ .

Эффективность действия корректирующего параметра  $\mu$  иллюстрируется рис. 9 и таблицей. На рис. 9 приведены результаты расчетов остаточных нормированных (на  $\sqrt{\lambda z}$ ) погрешностей  $\delta \tilde{x} = \tilde{\Delta x}_{\text{нер}} - \tilde{\Delta x}_{\text{пор}}$  в зависимости от  $N$  при различных значениях уровня неравномерности  $\alpha$  (кривая 1 –  $\alpha = 0,05$ ; 2 – 0,1; 3 – 0,2; 4 – 0,3; 5 – 0,4; 6 – 0,5) для синусоидального типа освещения

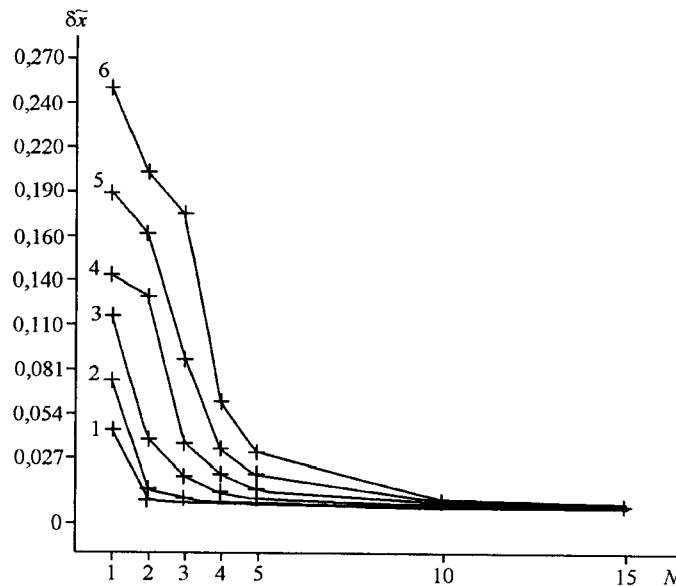


Рис. 9. Зависимость остаточной погрешности  $\delta \tilde{x}$  определения положения границы объекта от  $N = T/\sqrt{\lambda z}$  при различных амплитудах  $\alpha$  ( $\varphi = \pi/2$ )

**Остаточная погрешность определения положения границы объекта  $\delta\tilde{x}$   
при различных значениях  $N$  и  $\alpha$**

$N$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = 0,5$
1	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$
2	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$
3	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$
4	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$
5	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$
10	$8,5 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$8,4 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$

( $\varphi = \pi/2$ ). Видно, что при увеличении  $N$  значение  $\delta\tilde{x}$  резко падает, и, например, при  $\alpha = 0,1$  и  $N = 5$  оно не превышает  $1,3\sqrt{\lambda z}$ , что при  $z = 10$  мм и  $\lambda = 0,63$  мкм составляет 0,1 мкм. Из таблицы следует, что остаточная погрешность  $\delta\tilde{x}$  резко падает также при уменьшении амплитуды неравномерности  $\alpha$  и увеличении параметра  $N$ . Так, при  $\alpha = 0,3$  и  $N = 3$  значение  $\delta\tilde{x} = 3,7 \cdot 10^{-2}$ , а при  $\alpha = 0,1$  и  $N = 10$  погрешность уменьшается более чем в 100 раз и, например, при  $z = 10$  мм и  $\lambda = 0,63$  мкм она составляет 0,02 мкм.

Анализируя эффективность введенного в данной работе корректирующего параметра  $\mu$  в случае  $\varphi = \pi/2$ ,  $\alpha = 0,1$  и  $N = 10$  и сравнивая полученные результаты (см. рис. 7, 9 и таблицу), видим, что ошибка определения положения края  $\Delta x_{\text{нер}}$  снижается более чем в 40 раз.

Существенно, что в случае косинусоидального освещения ( $\varphi = 0$ ), когда производная освещающего поля в точке расположения края равна нулю, остаточное смещение  $\delta\tilde{x}$ , как показывают расчеты, с большой степенью точности можно считать также равным нулю.

**3. Алгоритм выбора порога в случае слабого неравномерного освещения.** Часто на практике имеет место случай, когда неравномерность освещающего объект волнового фронта в пределах рабочего поля составляет 1–5 %. Покажем, как, используя полученные выше результаты, следует задавать порог  $I_{\text{пор}}$  при точном определении положения края с учетом реальных параметров и характеристического параметра  $\sqrt{\lambda z}$  френелевского изображения объекта. С этой целью осветим объект в виде полуплоскости  $Y(x)$  волной (9) с  $\alpha = 1$ , максимум которой (рис. 10) отстоит на расстоянии  $B$  от края объекта:

$$E_{\text{вх}}(x_1) = E_0 [1 + \cos \omega(x_1 - B)] Y(x_1). \quad (25a)$$

Слабое неравномерное освещение реализуется при выборе  $T$ , удовлетворяющем условию  $B/T \ll 1$ . В результате (25a) можно представить как

$$E_{\text{вх}}(x_1) = 2E_0 [1 - \pi^2(x_1 - B)^2/T^2] Y(x_1). \quad (25b)$$

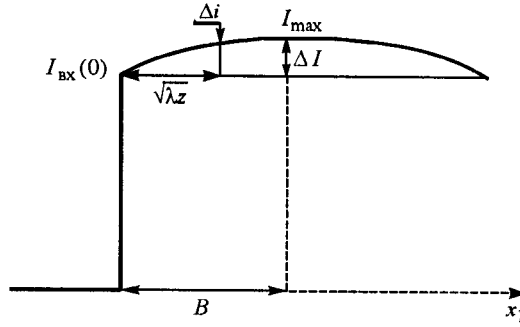


Рис. 10. Определение выбора порога при слабой неравномерности освещающего пучка

Очевидно, что значение интенсивности в месте расположения края ( $x_1 = 0$ ) составляет

$$I_{\text{вх}}(0) = I_{\text{max}}(1 - 2\pi^2 B^2 / T^2) = I_{\text{max}}(1 - \Delta I / I_{\text{max}}), \quad (26)$$

где  $I_{\text{max}} = 4I_0$ . Параметр  $\Delta I = 2\pi^2 B^2 / T^2$  характеризует степень неравномерности освещающего объект пучка на размере  $B$ . Найдем значение интенсивности света в френелевской картине в точке  $x_2 = 0$ . Согласно (11)

$$I_{\text{вых}}(0) = 0,25I_0((1 + \cos \varphi)^2 - 2\sqrt{2}N^{-1} \sin \varphi). \quad (27a)$$

С учетом  $\varphi = -2\pi B/T \ll \pi$  имеем

$$I_{\text{вых}}(0) = 0,25I_{\text{max}} \left( 1 - \frac{2\pi^2 B^2}{T^2} - \frac{2\sqrt{2}\pi B \sqrt{\lambda z}}{T^2} \right). \quad (27b)$$

Введем параметр  $\Delta i$  ( $\Delta i = I'(0)\sqrt{\lambda z}$ ), описывающий степень неравномерности в пределах зоны Френеля, где параметр  $I'(0) = I_{\text{max}} 4\pi^2 B/T^2$ .

С учетом полученных выражений для распределения интенсивности (27b) окончательно получим

$$I_{\text{вых}}(0) = I_{\text{вх}}(0) \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{\Delta i}{I_{\text{вх}}(0)} \right]. \quad (28)$$

Из этого выражения видно, что для определения положения границы объекта с высокой точностью в условиях освещения его пучком со слабой неравномерностью значение порога при обработке френелевского изображения края необходимо выбирать

$$I_{\text{пор}} = 0,25I_{\text{вх}}(0) \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{\Delta i}{I_{\text{вх}}(0)} \right]. \quad (29)$$

Очевидно, что влияние неравномерного освещения на структуру френелевского изображения края носит локальный характер. Более того, это влияние определяется степенью неравномерности освещения объекта в пределах зоны Френеля.

Таким образом, алгоритм выбора порога  $I_{\text{пор}}$  сводится к нахождению двух параметров входного поля: интенсивности поля в месте расположения края  $I_{\text{вх}}(0)$  и степени его неравномерного освещения  $\Delta i/I_{\text{вх}}(0)$  в пределах зоны Френеля, размер которой определяется известными параметрами системы  $\lambda$  и  $z$ .

**Заключение.** Исследованы точностные характеристики френелевского метода измерения размеров объекта, в котором в качестве оптического элемента выступает свободное пространство, преобразующее с высокой точностью входное изображение объекта в его френелевский образ. Аналитически оценено влияние неравномерности (по пространству) освещающего объект волнового фронта на формирование его френелевского изображения при моделировании ее распределением гармонического типа различной частоты, фазы и амплитуды.

Установлено, что влияние параметров освещающего пучка на френелевскую картину объекта определяется соотношением между периодом колебаний  $T$  этого распределения и размером зоны Френеля  $\sqrt{\lambda z}$ . Так, при неравномерном освещении высокочастотного типа ( $T \ll \sqrt{\lambda z}$ ) имеет место смещение  $\Delta x_{\text{нер}}$  геометрического края объекта, не превышающее величину  $\Delta x_{\text{нер}} \sim \sim 0,5T$ . Эту составляющую погрешности можно заметно снизить, используя частично когерентное освещение, а также низкочастотную фильтрацию френелевского изображения ПЗС-линейкой при соответствующем выборе соотношений между периодом  $T$  и размером пиксела фотоприемника.

Установлено, что влияние неравномерного низкочастотного освещения ( $T \gg \sqrt{\lambda z}$ ) на структуру френелевского изображения в окрестности геометрического края объекта носит локальный характер и определяется поведением поля и его производной в месте расположения границ объекта. Показано, что при слабом неравномерном освещении нахождение порога  $I_{\text{пор}}$ , соответствующего истинному положению геометрического края, сводится к определению двух параметров этого поля: интенсивности поля в месте расположения края  $I_{\text{вх}}(0)$  и степени его неравномерного освещения  $\Delta i/I_{\text{вх}}(0)$  в пределах зоны Френеля. Применение предложенного алгоритма позволяет в десятки раз уменьшить составляющую погрешности, обусловленной неравномерным освещением объекта. Для оценки общей погрешности измерения необходимо учитывать остальные ее составляющие (см. разд. 1).

Полученные результаты могут быть использованы при разработке измерителей нового поколения, основанных на применении френелевских дифракционных изображений исследуемого объекта.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

*Расчет распределения поля  $I(x_2)$  (см. выражение (11)). Френелевское распределение амплитуды поля на выходе системы согласно (1), (2) и (9) можно представить в следующем виде:*

$$g(x_2) = E_0(i\lambda z)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x_1) \exp(ik(x_2 - x_1)^2/2z) [1 + \alpha \cos(\omega x_1 + \varphi)] dx_1. \quad (\text{П1})$$



Представим выражение (П1) в экспоненциальной форме:

$$g(x_2) = g_1(x_2) + g_2(x_2) = E_0(i\lambda z)^{-1/2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Y(x_1) e^{ik(x_2 - x_1)^2/2z} dx_1 + \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x_1) (e^{i(\omega x_1 + \varphi)} + e^{-i(\omega x_1 + \varphi)}) \exp\left(\frac{ik(x_2 - x_1)^2}{2z}\right) dx_1 \right]. \quad (\text{П2})$$

Здесь  $g_1(x_2)$  – преобразование Френеля от ступенчатой функции (края). Что касается второго интеграла  $g_2(x_2)$ , то он допускает вычисление (после несложных преобразований) в классе френелевских функций:

$$g_2(x_2) = 0,5\alpha E_0(i\lambda z)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x_1) [e^{i(\varphi - \omega x_2 - z\omega^2/2k)} e^{(ik/2z)(x_1 - (x_2 + \beta))^2} + e^{i(x_2\omega - \varphi - z\omega^2/2k)} e^{(ik/2z)(x_1 - (x_2 - \beta))^2}] dx_1 = \\ = 0,5\alpha E_0(i\lambda z)^{-1/2} e^{-i(z\omega^2/2k)} [e^{i(\varphi - \omega x_2)} \tilde{Y}[(x_2 + \beta)] + e^{i(x_2\omega - \varphi)} \tilde{Y}[(x_2 - \beta)]]], \quad (\text{П3})$$

где  $\beta = z\omega/k$ .

В результате для распределения интенсивности получаем

$$I(x_2) = |g(x_2)|^2 = \\ = I_0 \left| \tilde{Y}(x_2) + \frac{\alpha}{2} e^{-iz\omega^2/2k} [e^{i(\varphi + x_2\omega)} \tilde{Y}(x_2 - \beta) + e^{-i(\varphi + x_2\omega)} \tilde{Y}(x_2 + \beta)] \right|^2. \quad (\text{П4})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

*Расчет смещения  $\Delta x$  геометрического края объекта при его неравномерном освещении.* Для нахождения параметра  $\Delta x$  воспользуемся известными разложениями френелевских функций

$$\tilde{Y}(x_2) = 0,5 + \frac{x_2}{\sqrt{\lambda z}} e^{-i\pi/4}, \quad (\text{П5})$$

$$\tilde{Y}(x_2 - \beta) = \tilde{Y}(-\beta) + \frac{e^{i(k\beta^2/2z)}}{\sqrt{\lambda z}} x_2 e^{-i\pi/4}. \quad (\text{П6})$$

Подставляя выражения (П5) и (П6) в формулу (П4) (см. приложение 1) при условии  $\omega x \ll 2\pi$  ( $e^{ix\omega} \approx 1 + ix\omega$ ), распределение интенсивности на выхо-

де можно переписать в виде

$$I(x_2) = \left| 0,5 + \frac{x_2}{\sqrt{\lambda z}} e^{-i\pi/4} + \frac{\alpha}{2} e^{-iz\omega^2/2k} \left[ e^{i\varphi} (1 + ix_2\omega) \left( \tilde{Y}(-\beta) + \frac{e^{ik\beta^2/2z} x_2 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\lambda z}} \right) + e^{-i\varphi} (1 - ix_2\omega) \left( \tilde{Y}(\beta) + \frac{e^{ik\beta^2/2z} x_2 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\lambda z}} \right) \right] \right|^2. \quad (\text{П7})$$

Для нахождения смещения геометрического края объекта  $\Delta x$  вычислим распределение интенсивности света на выходе  $I(x_2)$ , а затем приравняем его к уровню  $0,25I_0$ , соответствующему геометрическому краю объекта при его равномерном освещении на входе. После несложных преобразований для параметра  $\Delta x$  получаем выражение

$$\Delta x = \frac{\alpha \sqrt{2\lambda z} \left[ \cos \varphi \cdot \cos(\pi/N^2) - \frac{\sqrt{2}}{N} \sin \varphi \cdot \cos(\pi/N^2) + 0,5 \alpha \cos^2 \varphi \right]}{\left( 1 + 2\alpha \cos \varphi - \frac{\alpha 2\sqrt{2}\pi}{N} \sin \varphi \right)}. \quad (\text{П8})$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jablonski R. New Measuring Tools in Mechatronics. Warsaw: Mechatronics, 2000. Vol. 1. P. 26.
2. Крылов К. И., Прокопенко В. Т. Применение лазеров в машиностроении и приборостроении. М: Машиностроение, 1978.
3. Богомолов Е. Н., Василец Н. В., Кривенков Б. Е. и др. Фотодиодный оптико-электронный измеритель размеров «Сенсор» // Автометрия. 1989. № 5. С. 83.
4. Fischer J., Radil T. // Proc. Workshop 2002. Prague, 2002. P. 474.
5. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
7. Ахманов С. А., Никитин С. Ю. Физическая оптика. М.: МГУ, 1998.
8. Горелик Г. С. Колебания и волны. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.
9. Chugui Yu., Krivenkov B. Fraunhofer diffraction by volumetric bodies of constant thickness // JOSA. 1989. A6, N 5. P. 618.

Конструкторско-технологический институт  
научного приборостроения СО РАН,  
Кубанский государственный университет,  
E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru

Поступила в редакцию  
20 апреля 2004 г.