

УДК 532.51.013.4:536.24

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

А. В. Родионова, Е. В. Резанова^{*,**}

Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета, 660041 Красноярск, Россия

* Алтайский государственный университет, 656049 Барнаул, Россия

** Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

E-mails: aleva@mail.ru, katerezanova@mail.ru

В рамках приближения Обербека — Буссинеска рассмотрена задача о двухслойном конвективном течении вязких несжимаемых сред в горизонтальном канале с твердыми стенками при наличии процесса испарения, при этом граница раздела сред, представляющая собой термокапиллярную поверхность, не деформируется, в верхнем слое, являющемся смесью газа и паров жидкости, учитывается эффект Дюфура. Изучено влияние продольных градиентов температуры на границах канала, толщины слоев на характер течения и интенсивность процесса испарения в условиях заданного расхода газа и отсутствия потока пара на верхней границе канала. Показано, что длинноволновая асимптотика для декремента определяется по характеристикам течения, возникающие в системе длинноволновые возмущения затухают монотонно и тепловой механизм неустойчивости не является потенциально наиболее опасным.

Ключевые слова: двухслойные течения, уравнения Обербека — Буссинеска, испарение, линейная устойчивость, длинноволновая асимптотика.

DOI: 10.15372/PMTF20160402

Введение. В настоящее время значительно расширился круг задач о конвективном течении двух и более жидких сред при наличии поверхности раздела между ними. Это обусловлено постоянным развитием наукоемких технологий и разработкой новых физических экспериментов, посвященных, в частности, исследованию влияния спутных потоков газа на конвекцию жидкостей, имеющих границы раздела и находящихся в условиях нормальной гравитации или микрогравитации. Как показывают результаты экспериментов [1], от таких параметров, как расход газа, температуры жидкости и газа, толщина слоя жидкости, а также от типа жидкости зависит интенсивность испарения, происходящего под действием потока инертного газа, поэтому требуется тщательное теоретическое исследование этих процессов.

Процессы конвекции, сопровождающиеся испарением или конденсацией на границе раздела, активно изучаются аналитически и численно с использованием математических моделей, построенных на основе длинноволнового приближения исходной системы уравнений и граничных условий [2, 3] и в полной постановке [4–6]. Исследованию устойчивости

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-08-00163).

© Родионова А. В., Резанова Е. В., 2016

различных конфигураций в системах, в которых используются жидкости с поверхностями раздела, также уделяется большое внимание [7], поскольку в технологических процессах реализуются только устойчивые режимы. При этом в основном изучается устойчивость пленочных течений в различных системах, поскольку влияние испарения на характеристики основного состояния является наиболее существенным для тонких слоев жидкости (см., например, работы [2, 8] и библиографию к ним).

В настоящей работе рассматривается задача о длинноволновой устойчивости двухслойного конвективного течения в горизонтальном канале, причем в математической модели учитывается процесс испарения на границе раздела, а в верхнем слое, который является смесью газа и паров жидкости, учитываются процесс диффузии и эффект Дюфура. Точное решение уравнений Обербека — Буссинеска, описывающее конвективное течение с испарением в канале при заданном расходе газа, построено и исследовано в работе [9], а также в [6, 10].

Целью настоящей работы является определение критических значений параметров, при которых однонаправленное течение в плоском слое становится неустойчивым. Эта задача является достаточно сложной и требует проведения предварительных исследований и решения некоторых вспомогательных задач. К таким задачам относятся получение уравнений малых возмущений в рамках линейной теории, переход к соответствующей спектральной задаче и определение длинноволновых асимптотик для собственных значений и собственных функций.

1. Задача о двухслойном течении с испарением. Рассматривается совместное стационарное течение двух вязких несжимаемых сред (жидкость и смесь газа и пара), заполняющих плоский канал и имеющих термокапиллярную границу раздела, которая не деформируется и на которой следует учитывать перенос массы за счет испарения. Система координат (x, y) выбрана таким образом, что вектор силы тяжести \mathbf{g} направлен противоположно оси Oy ($\mathbf{g} = (0, -g)$). Верхняя и нижняя границы области двухслойного течения представляют собой твердые неподвижные стенки, задаваемые уравнениями $y = h_2$, $y = -h_1$ соответственно. В качестве математической модели используются уравнения Обербека — Буссинеска, в которых учитывается эффект Дюфура [11, 12] в верхнем слое [9]:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g(\beta T + \gamma C_s), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \chi \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \delta \left(\frac{\partial^2 C_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_s}{\partial y^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Слагаемые γC_s , $\delta(\partial^2 C_s/\partial x^2 + \partial^2 C_s/\partial y^2)$ учитываются при моделировании течения в верхнем слое. При этом диффузия в газе пара, считающегося пассивной примесью, описывается уравнением

$$u \frac{\partial C_s}{\partial x} + v \frac{\partial C_s}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_s}{\partial y^2} \right). \quad (1.2)$$

В (1.1), (1.2) u , v — проекции вектора скорости на оси Ox и Oy ; p — модифицированное давление; T — температура; C_s — концентрация пара; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; χ — температуропроводность; D , β , γ — коэффициенты диффузии пара

в газе, теплового и концентрационного расширения соответственно. Коэффициент δ характеризует эффект Дюфура.

В предположении однонаправленности течения вектор скорости имеет вид $\mathbf{u}_j = (u_j, 0)$, где индекс $j = 1$ определяет скорость (и другие характеристики течения) жидкости, заполняющей нижний слой $-h_1 \leq y \leq 0$, а индекс $j = 2$ — характеристики течения в верхнем слое $0 \leq y \leq h_2$. Точное решение уравнений (1.1), (1.2) имеет вид [9]

$$\begin{aligned} u_j(y) &= c_1^j + c_2^j y + c_3^j y^2 + c_4^j y^3 + c_5^j y^4, \\ T_j(x, y) &= (a_1^j + a_2^j y)x + \vartheta_j(y), \quad C_s(x, y) = (b_1 + b_2 y)x + \varphi(y), \\ p_j(x, y) &= (d_1^j + d_2^j y + d_3^j y^2)x + \psi_j(y), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\vartheta_j(y)$, $\varphi(y)$ — полиномы седьмого порядка; $\psi_j(y)$ — многочлен восьмой степени. Значения констант c_k^j ($k = 1, \dots, 5$), a_1^j , a_2^j , b_1 , b_2 , d_k^j ($k = 1, 2, 3$), коэффициентов при y , y^0 полиномов ϑ_j и φ определяются граничными условиями на твердых стенках канала, а также условиями на границе раздела [9]. Заметим, что коэффициенты полиномов $\vartheta_2(y)$, $\varphi(y)$, $\psi_2(y)$ зависят от параметра Дюфура.

На твердых непроницаемых границах канала заданы условия прилипания и линейное относительно продольной координаты распределение температуры, а для концентрации C_s на верхней стенке выполняется условие отсутствия потока пара:

$$\begin{aligned} u_1(-h_1) &= 0, \quad T_1(x, -h_1) = A_1 x + T_{10}, \\ u_2(h_2) &= 0, \quad T_2(x, h_2) = A_2 x + T_{20}, \quad C_{sy}|_{y=h_2} = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

На границе раздела ($y = 0$) выполняются условия непрерывности скорости и температуры

$$u_1 = u_2, \quad T_1 = T_2. \quad (1.5)$$

В силу условия (1.5) $a_1^j = A$ ($j = 1, 2$). С учетом условий, определяющих температурный режим на твердых границах канала и на границе раздела, продольные градиенты температуры связаны следующим образом: $A_2 = A + (A - A_1)(h_2/h_1)(k_1/k_2)$. При известных A , A_1 , A_2 вычисляются a_2^1 и a_2^2 .

Поскольку в данной работе рассматривается стационарная задача и в кинематическом условии перенос массы пара не учитывается, это условие выполняется автоматически. Динамические условия имеют вид

$$p_1 = p_2, \quad \rho_1 \nu_1 u_{1y} = \rho_2 \nu_2 u_{2y} + \varkappa T_x, \quad (1.6)$$

где \varkappa — температурный коэффициент поверхностного натяжения. Полагается, что коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры: $\sigma = \sigma_0 + \varkappa(T - T_0)$, где T_0 — некоторое исходное значение температуры; $\varkappa < 0$. Задача решается при заданном массовом расходе газа в верхнем слое

$$m_2 = \int_0^{h_2} \rho_2 u_2(y) dy.$$

В условии переноса тепла на границе $y = 0$ учитывается диффузионный поток массы пара:

$$k_1 T_{1y} - k_2 T_{2y} - \delta k_2 C_{sy}|_{y=0} = -LM, \quad M = -D \rho_2 C_{sy}|_{y=0}. \quad (1.7)$$

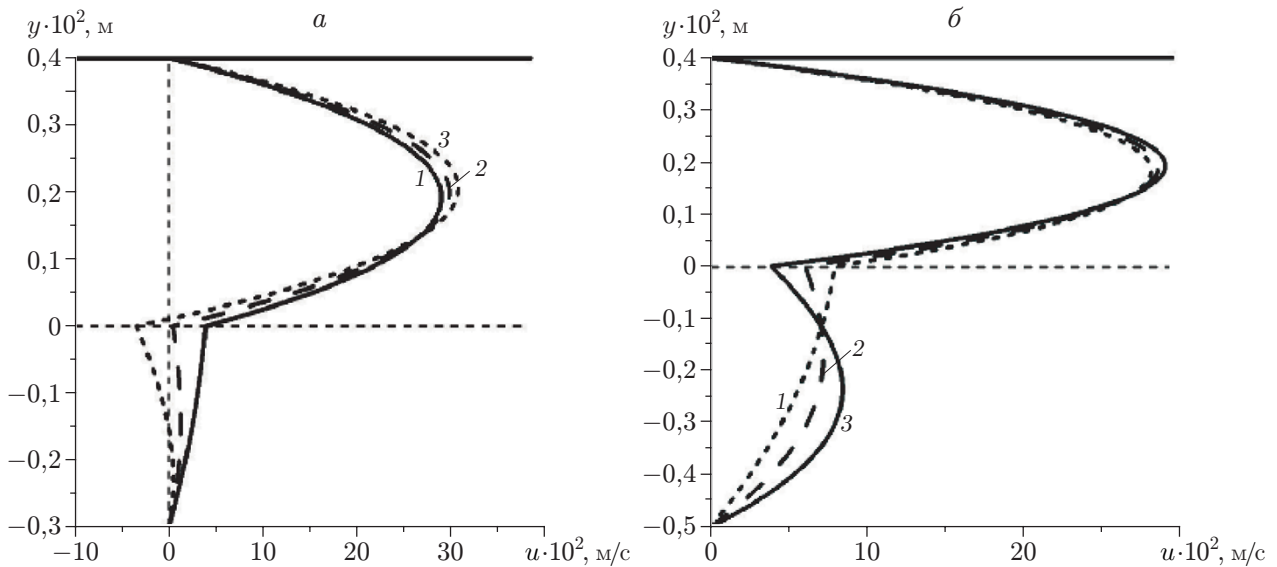


Рис. 1. Профили скорости в системе HFE-7100 — азот при $m_2 = 9,6 \cdot 10^{-4}$ кг/(м·с), $A_1 = 0$ и различных значениях продольного градиента температуры на границе раздела A в условиях нормальной гравитации:

a — $h_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ м (1 — $A_2 = 44,26$ К/м, $A = 10$ К/м, 2 — $A_2 = 442,6$ К/м, $A = 100$ К/м, 3 — $A_2 = 885,2$ К/м, $A = 200$ К/м); b — $h_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м (1 — $A_2 = 30,55$ К/м, $A = 10$ К/м, 2 — $A_2 = 305,5$ К/м, $A = 100$ К/м, 3 — $A_2 = 611$ К/м, $A = 200$ К/м)

Здесь k_j — теплопроводность; L — теплота испарения; M — масса жидкости, испаряющейся с единицы площади поверхности за единицу времени, определяемая из уравнения баланса масс на границе (второе соотношение в (1.7)).

В случае когда нижний слой системы заполнен однокомпонентной средой, полагается что концентрация примеси (пара) в жидкости равна $C_s = 1$. Над поверхностью такой жидкости находится насыщенный пар [10], концентрацию которого можно определить из уравнения Клапейрона — Клаузиуса [6, 8, 9]: $C_s|_{y=0} = C_*[1 + \varepsilon(T_2|_{y=0} - T_0)]$ ($\varepsilon = L\mu_0/(RT_0^2)$); μ_0 — молярная масса испаряющейся жидкости; R — универсальная газовая постоянная; C_* — концентрация насыщенного пара при $T_2 = T_0$).

Рассматривается двухслойная система жидкость — газ типа HFE-7100 (гидрофтор-эфир) — азот, основные физические параметры которой при температуре $T_0 = 20$ °С приведены в работах [1, 13, 14]. Значение концентрации насыщенного пара для жидкости HFE-7100 выбрано равным 0,45 [13], а значение коэффициента Дюфура варьировалось в диапазоне $10^{-6} \div 10^{-4}$ [11, 15].

На рис. 1 приведены профили скорости в системе HFE-7100 — азот при различных значениях продольного градиента температуры A на границе раздела сред. При этом температура нижней твердой стенки $y = -h_1$ постоянна, $A_1 = 0$. Изменение толщины слоя жидкости приводит к качественным изменениям профилей скорости при заданном расходе газа и одних и тех же значениях продольного градиента температуры A , а также к некоторому изменению массы жидкости M , испаряющейся с границы раздела. В случае $h_1 = 3$ мм, $A = 10$ К/м (см. рис. 1,а) скорость на границе $y = 0$ принимает значение $u = 3,95 \cdot 10^{-2}$ м/с, масса испаряющейся жидкости $M = 1,67 \cdot 10^{-4}$ кг/(м²·с). При $A = 100$ К/м значение скорости на границе $u = 0,46 \cdot 10^{-2}$ м/с, масса $M = 1,68 \cdot 10^{-3}$ кг/(м²·с), при $A = 200$ К/м $u = -3,41 \cdot 10^{-2}$ м/с, $M = 3,36 \cdot 10^{-3}$ кг/(м²·с). Таким образом, увеличение продольного градиента температуры на свободной границе является причи-

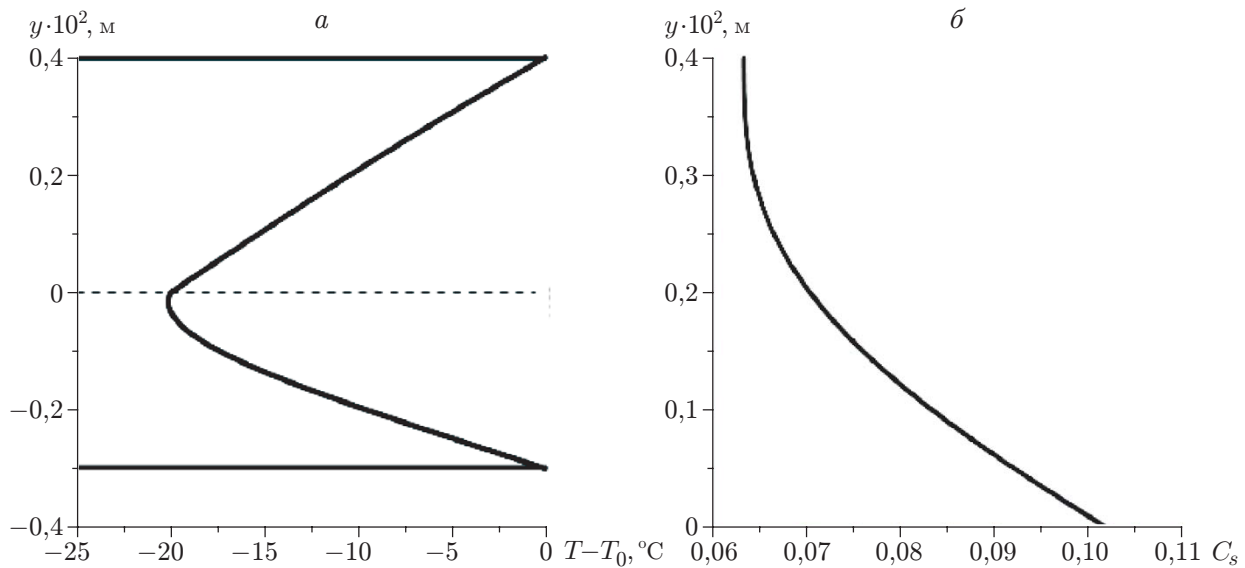


Рис. 2. Профили температуры (а) и концентрации пара в газовой среде (б) в системе HFE-7100 — азот при $A = 10$ К/м в условиях нормальной гравитации при $h_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $m_2 = 9,6 \cdot 10^{-4}$ кг/(м·с), $T_{10} = T_{20} = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 44,26$ К/м

ной возникновения возвратного течения вблизи границы $y = 0$. В случае $h_1 = 5$ мм, $A = 10$ К/м (см. рис. 1,б) скорость на границе раздела $u = 7,95 \cdot 10^{-2}$ м/с, масса испаряющейся жидкости $M = 1,68 \cdot 10^{-4}$ кг/(м²·с). При $A = 100$ К/м $u = 6,04 \cdot 10^{-2}$ м/с, $M = 1,67 \cdot 10^{-3}$ кг/(м²·с), при $A = 200$ К/м граничная скорость и массовая скорость испарения равны $u = 3,93 \cdot 10^{-2}$ м/с, $M = 3,36 \cdot 10^{-3}$ кг/(м²·с). Вследствие процесса испарения на термокапиллярной границе достигаются минимальные значения температуры в канале (рис. 2,а). Функция концентрации пара достигает максимального значения на границе раздела, определяется значением концентрации насыщенного пара и убывает вдоль поперечной координаты (рис. 2,б).

2. Задача об устойчивости основного решения. Рассмотрим задачу об устойчивости течения в системе жидкость — газ.

2.1. *Уравнения малых возмущений.* Для исследования устойчивости основного решения (1.3) относительно возмущений скорости $\mathbf{U}_j = (V_j, W_j)$, температуры $\Theta_j = \Theta_j(\tau, \eta, \xi)$, давления $P_j = P_j(\tau, \eta, \xi)$ и концентрации $C = C(\tau, \eta, \xi)$ перейдем к безразмерным переменным. Выберем в качестве характерного масштаба длины величину h_2 , скорости — ν_2/h_2 , давления — $\rho_2 \nu_2^2/h_2^2$, температуры — T_{20} . Примем в качестве единиц измерения параметров среды величины, характерные для верхнего слоя ($j = 2$). Таким образом, безразмерные переменные принимают вид $\eta = x/h_2$, $\xi = y/h_2$, $\tau = \nu_2 t/h_2^2$, а для любого параметра среды ω_j введен безразмерный аналог $\omega = \omega_1/\omega_2$. Тогда индексу $j = 1$ соответствует область $-h \leq \xi \leq 0$, $j = 2$ — область $0 \leq \xi \leq 1$.

Новыми искомыми функциями задачи (1.1), (1.2), (1.4)–(1.7) являются функции $(\hat{U}_j, \hat{P}_j, \hat{T}_j, \hat{C}) = (\mathbf{u}_j, p_j, T_j, C_s) + (\mathbf{U}_j, P_j, \Theta_j, C)$. Рассмотрим плоские нормальные возмущения, пропорциональные функции $\exp[i(\alpha\eta - \lambda\tau)]$, с комплексным декрементом $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ и волновым числом α вдоль оси η . Линеаризованные уравнения для амплитуд нормальных возмущений принимают вид

$$-i\lambda V_1 + i\alpha u_1 V_1 + u_1' W_1 = -\frac{i\alpha}{\rho} P_1 + \nu(V_1'' - \alpha^2 V_1),$$

$$-i\lambda W_1 + i\alpha u_1 W_1 = -\frac{1}{\rho} P_1' + \nu(W_1'' - \alpha^2 W_1) + \beta \text{Gr} \Theta_1, \quad (2.1)$$

$$i\alpha V_1 + W_1' = 0,$$

$$-i\lambda \Theta_1 + i\alpha u_1 \Theta_1 + V_1 T_{1\eta} + W_1 T_{1\xi} = \frac{\chi}{\text{Pr}} (\Theta_1'' - \alpha^2 \Theta_1),$$

$$-i\lambda V_2 + i\alpha u_2 V_2 + u_2' W_2 = -i\alpha P_2 + V_2'' - \alpha^2 V_2,$$

$$-i\lambda W_2 + i\alpha u_2 W_2 = -P_2' + W_2'' - \alpha^2 W_2 + \text{Gr} \Theta_2 + \gamma \text{Ga} C;$$

$$i\alpha V_2 + W_2' = 0, \quad (2.2)$$

$$-i\lambda \Theta_2 + i\alpha u_2 \Theta_2 + V_2 T_{2\eta} + W_2 T_{2\xi} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\Theta_2'' - \alpha^2 \Theta_2 + \frac{\delta}{T_{20}} (C'' - \alpha^2 C) \right),$$

$$-i\lambda C + i\alpha u_2 C + V_2 C_{s\eta} + W_2 C_{s\xi} = \frac{\text{Le}}{\text{Pr}} (C'' - \alpha^2 C).$$

На твердых стенках для амплитуд возмущений справедливы условия

$$\begin{aligned} V_1(-h) = W_1(-h) = \Theta_1(-h) = 0, \\ V_2(1) = W_2(1) = \Theta_2(1) = C'(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

на границе раздела $\xi = 0$ — условия

$$\begin{aligned} V_1 = V_2, \quad W_1 = W_2 = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \\ \nu\rho V_1' = V_2' + \frac{\text{Ma}}{Q} i\alpha\Theta, \quad P_1 - P_2 = 2(\nu\rho W_1' - W_2'), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$k\Theta_1' - \Theta_2' - \frac{\delta}{T_{20}} C' = \frac{DL\rho_2}{k_2 T_{20}} C'.$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по координате ξ ; $\text{Pr} = \nu_2/\chi_2$, $\text{Gr} = g\beta_2 T_{20} h_2^3/\nu_2^2$, $\text{Ga} = gh_2^3/\nu_2^2$, $\text{Ma} = \kappa Ah_2^2/(\nu_2^2 \rho_2)$, $\text{Le} = D/\chi_2$ — числа Прандтля, Грасгофа, Галилея, Марангони и Льюиса соответственно; $Q = Ah_2/T_{20}$.

При использовании метода нормальных волн возникают дополнительные ограничения. Из условия отсутствия потока пара $b_2 = 0$ следует $a_2^1 = a_2^2 = 0$. Последнее условие выполняется при равенстве градиентов температур на твердых стенках: $A_1 = A_2$, что в безразмерных переменных соответствует условию $T_{1\eta} = T_{2\eta} = Q$. Этот случай исследован ниже.

Итак, краевая задача (2.1)–(2.4) представляет собой задачу на собственные значения относительно комплексного декремента λ , а собственными функциями являются соответствующие амплитуды. Для устойчивости основного течения (1.3) необходимо и достаточно, чтобы у всех собственных значений λ мнимая часть λ_j была отрицательной.

2.2. *Длинноволновые возмущения.* Решение системы (2.1), (2.2) будем искать в виде нормальных волн с длиной волны, равной $2\pi/\alpha$. С учетом уравнения неразрывности функции V_j , W_j , P_j , Θ_j , C и декремент λ при $\alpha \rightarrow 0$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_j = V_{j0} + \alpha V_{j1} + \dots, \quad W_j = \alpha W_{j1} + \alpha^2 W_{j2} + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \alpha \lambda_1 + \dots, \\ \Theta_j = \Theta_{j0} + \alpha \Theta_{j1} + \dots, \quad P_j = P_{j0} + \alpha P_{j1} + \dots, \quad C = C_0 + \alpha C_1 + \dots \end{aligned}$$

После подстановки последнего разложения в систему (2.1), (2.2) задача для $V_{j0}(\xi)$, $W_{j1}(\xi)$ и λ_0 имеет вид

$$\begin{aligned} -i\lambda_0 V_{10} &= \nu V_{10}'' & iV_{10} + W_{11}' &= 0, & -h < \xi < 0, \\ -i\lambda_0 V_{20} &= V_{20}'' & iV_{20} + W_{21}' &= 0, & 0 < \xi < 1; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} V_{10}(-h) &= V_{20}(1) = 0, & V_{10}(0) &= V_{20}(0), & \nu\rho V_{10}'(0) &= V_{20}'(0), \\ W_{11}(-h) &= W_{21}(1) = 0, & W_{11}(0) &= W_{21}(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Умножая первые уравнения из (2.5) на комплексно-сопряженные величины V_{10}^* , V_{20}^* и интегрируя на отрезках $[-h; 0]$, $[0; 1]$ соответственно, находим

$$-i\lambda_0 \int_{-h}^0 |V_{10}|^2 d\xi = \nu \int_{-h}^0 V_{10}'' V_{10}^* d\xi, \quad -i\lambda_0 \int_0^1 |V_{20}|^2 d\xi = \int_0^1 V_{20}'' V_{20}^* d\xi. \quad (2.7)$$

Интегрируя по частям выражения в правых частях уравнений (2.7), с учетом граничных условий (2.6) получаем

$$i\lambda_0 \left(\rho \int_{-h}^0 |V_{10}|^2 d\xi + \int_0^1 |V_{20}|^2 d\xi \right) = \rho\nu \int_{-h}^0 |V_{10}'|^2 d\xi + \int_0^1 |V_{20}'|^2 d\xi. \quad (2.8)$$

Поскольку правая часть равенства (2.8) представляет собой сумму интегралов от положительных функций, имеем

$$i\lambda_0 \left(\rho \int_{-h}^0 |V_{10}|^2 d\xi + \int_0^1 |V_{20}|^2 d\xi \right) > 0. \quad (2.9)$$

Подынтегральные функции в (2.9) положительные. В силу положительности параметра ρ $i\lambda_0 > 0$, следовательно, величина λ_0 является мнимой, причем $\lambda_0 = \text{Im } \lambda_0 < 0$. Таким образом, декремент затухания волны есть чисто мнимое число с отрицательной мнимой частью, а значит, доказана устойчивость в случае длинноволновых возмущений. При этом в силу того, что знак комплексного декремента определяется по характеристикам течения, можно утверждать, что потенциально наиболее опасными являются гидродинамические возмущения.

С точностью до мультипликативной постоянной находятся соответствующие собственные функции

$$\begin{aligned} V_{10}(\xi) &= \sin(\mu\xi), & V_{20}(\xi) &= \rho\sqrt{\nu} \sin(\mu\sqrt{\nu}\xi), \\ W_{11}(\xi) &= \frac{i}{\mu} [\cos(\mu\xi) - 1], & W_{21}(\xi) &= \frac{i\rho}{\mu} [\cos(\mu\sqrt{\nu}\xi) - 1], \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\mu = \mu_k = 2\pi k/h$, $k = 1, 2, \dots$

В силу граничных условий (2.6) для функций (2.10) $\cos(\mu\sqrt{\nu}) = 1$, т. е. на физические величины h , ν накладывается ограничение $\sqrt{\nu}/h = n/k$ ($n = 1, 2, \dots$). Данное условие не является сильным ограничением, поскольку имеется счетное число значений n/k . В случае реальных жидкостей (при фиксированном значении безразмерной величины ν) возможен подбор толщины верхнего или нижнего слоя для выполнения указанного условия. Таким образом, имеется счетное число значений μ_k и $\lambda_0 = \lambda_{0k} = -i\nu\mu_k^2$.

2.3. Длинноволновая асимптотика в случае нейтральных возмущений. Рассмотрим нейтральные возмущения при $\lambda = 0$. В этом случае характеристики устойчивости определяются одним из критериев подобия. Поскольку в рассматриваемой задаче наибольший

интерес представляет исследование влияния термокапиллярного механизма на возникновение неустойчивости, в качестве определяющего параметра выбирается число Марангони.

Рассмотрим разложение

$$\text{Ma} = \frac{1}{\alpha} \text{Ma}_{-1} + \text{Ma}_0 + \alpha \text{Ma}_1 + \dots \quad (2.11)$$

при $\alpha \rightarrow 0$. С учетом уравнения неразрывности функции $V_j, W_j, P_j, \Theta_j, C$ также раскладываются в ряды по степеням волнового числа α :

$$\begin{aligned} V_j &= V_{j0} + \alpha V_{j1} + \dots, & W_j &= \alpha W_{j1} + \alpha^2 W_{j2} + \dots, \\ \Theta_j &= \Theta_{j0} + \alpha \Theta_{j1} + \dots, & P_j &= P_{j0} + \alpha P_{j1} + \dots, & C &= C_0 + \alpha C_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поскольку ряды (2.12) для функций амплитуд скорости V_j и температур Θ_j содержат нулевые приближения, целесообразно начинать разложение числа Марангони со степени -1 .

Подставляя разложение (2.12) в (2.1), (2.2) с учетом $\lambda = 0$, краевую задачу для $V_{10}(\xi), V_{20}(\xi)$ запишем в виде

$$V_{10}'' = 0, \quad -h < \xi < 0, \quad V_{20}'' = 0, \quad 0 < \xi < 1; \quad (2.13)$$

$$V_{10}(-h) = V_{20}(1) = 0, \quad V_{10}(0) = V_{20}(0), \quad \int_0^1 V_{20} d\xi = m_{20}, \quad (2.14)$$

где m_{20} — возмущение расхода жидкости в верхнем слое системы, которое при $\alpha \rightarrow 0$ можно считать малым и постоянным.

Согласно (2.13) нулевые приближения для возмущений скорости являются линейными функциями. С учетом краевых условий (2.14) функции V_{j0} принимают вид

$$V_{10} = 2m_{20} \left(\frac{\xi}{h} + 1 \right), \quad -h < \xi < 0, \quad V_{20} = -2m_{20}(\xi - 1), \quad 0 < \xi < 1. \quad (2.15)$$

С учетом (2.12) краевая задача для нулевых приближений функций возмущений температур Θ_{j0} имеет вид

$$\frac{\chi}{\text{Pr}} \Theta_{10}'' = QV_{10}, \quad -h < \xi < 0, \quad \frac{1}{\text{Pr}} \Theta_{20}'' + \frac{\delta}{T_{20}} C_0'' = QV_{20}, \quad 0 < \xi < 1; \quad (2.16)$$

$$\Theta_{10}(-h) = \Theta_{20}(1) = 0, \quad \Theta_{10}(0) = \Theta_{20}(0), \quad k\Theta_{10}'(0) - \Theta_{20}'(0) = \left(\frac{\delta}{T_{20}} + \frac{DL\rho_2}{k_2 T_{20}} \right) C_0'(0), \quad (2.17)$$

где $C_0'(\xi) = -m_{20}b_1 \text{Pr}(\xi^2 - 2\xi + 1)/\text{Le}$ — решение краевой задачи для возмущения концентрации в нулевом приближении: $C_0'' = (\text{Pr}/\text{Le})b_1 V_{20}$, $0 < \xi < 1$; $C_0'(1) = 0$.

Решение задачи (2.16), (2.17) для функций Θ_{j0} ($j = 1, 2$) имеет вид $\Theta_{j0} = t_{j3}\xi^3 + t_{j2}\xi^2 + t_{j1}\xi + t_{j0}$, где t_{ji} ($i = 0, \dots, 3$) — постоянные, которые определяются по формулам

$$\begin{aligned} t_{10} &= t_{13}h^3 - t_{12}h^2 + t_{11}h, & t_{20} &= -t_{23} - t_{22} - t_{21}, \\ t_{11} &= \frac{1}{k+h} \left[-(t_{13}h^3 + t_{23}) + (t_{12}h^2 - t_{22}) - m_{20}b_1 \frac{\text{Pr}}{\text{Le}} \left(\frac{\delta}{T_{20}} + \frac{DL\rho_2}{k_2 T_{20}} \right) \right], \\ t_{21} &= -(t_{13}h^3 + t_{23}) + (t_{12}h^2 - t_{22}) - t_{11}h, \\ t_{12} &= D_1/2, & t_{22} &= -D_2/2, & t_{13} &= D_1/(6h), & t_{23} &= D_2/6, \\ D_1 &= 2m_{20} \frac{Q \text{Pr}}{\chi}, & D_2 &= 2 \text{Pr} m_{20} \left(b_1 \frac{\delta \text{Pr}}{T_{20} \text{Le}} - Q \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Учитывая асимптотическое выражение (2.11), энергетическое условие при $\xi = 0$ запишем в виде

$$\nu\rho V'_{10}(0) = V'_{20}(0) + i \frac{\text{Ma}_{-1}}{Q} \Theta_{10}(0). \quad (2.19)$$

С учетом (2.15), (2.18), (2.19) находим $\text{Ma}_{-1} = -2iQm_{20}/(ht_{10})(\nu\rho + h)$. Полученный результат свидетельствует о монотонном затухании всех возникающих в системе длинноволновых возмущений.

Заключение. В работе исследовано точное решение сопряженной задачи для уравнений конвекции, описывающее двухслойное конвективное течение в горизонтальном канале. Проведено моделирование двухслойных течений в канале с испарением на границе раздела в случае заданного расхода газа и отсутствия потока пара на верхней твердой границе канала. Рассмотрены примеры стационарных течений и построены характерные профили скорости для системы жидкость — газ типа НФЕ-7100 — азот при различных значениях продольного градиента температуры на границе раздела сред. С помощью точных решений исследовано влияние продольных градиентов температуры, поддерживаемых на границах канала, и толщины слоя газа и жидкости на характер двухслойных течений, а также на интенсивность процесса испарения. Анализ влияния различных параметров задачи на характеристики течения показывает, что в системе возможно “расслаивание” течения вблизи поверхности раздела.

В рамках линейной теории получены уравнения малых возмущений основного решения и рассмотрена задача об устойчивости течения относительно малых нормальных длинноволновых возмущений. Найдены аналитические представления для нулевых приближений собственных чисел и амплитуд возмущений скорости соответствующей спектральной задачи в случае плоских возмущений. Показано, что длинноволновая асимптотика для декремента определяется по характеристикам движения. Для нейтральных возмущений получен точный вид первого члена асимптотики числа Марангони. Это позволяет утверждать, что все возникающие в системе длинноволновые возмущения затухают монотонно и тепловой механизм неустойчивости не является потенциально наиболее опасным.

Авторы выражают благодарность О. Н. Гончаровой и В. Б. Бекежановой за полезные дискуссии и помощь при подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lyulin Y., Kabov O.** Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear-stress gas flow // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 70. P. 599–609.
2. **Shklyaev O. E., Fried E.** Stability of an evaporating thin liquid film // J. Fluid Mech. 2007. V. 584. P. 157–183.
3. **Kabova Yu., Kuznetsov V. V., Kabov O., et al.** Evaporation of a thin viscous liquid film sheared by gas in a microchannel // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 68. P. 527–541.
4. **Iorio C. S., Goncharova O. N., Kabov O. A.** Heat and mass transfer control by evaporative thermal patterning of thin liquid layers // Comput. Thermal Sci. 2011. N 3. P. 333–342.
5. **Гончарова О. Н.** Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Изв. Алт. гос. ун-та. 2012. № 73. С. 12–18.
6. **Goncharova O. N., Hennenberg M., Rezanova E. V., Kabov O. A.** Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems // Interfacial Phenomena Heat Transfer. 2013. V. 1, N 4. P. 317–338.

7. **Андреев В. К.** Устойчивость неизотермических жидкостей / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2010.
8. **Haut В., Colinet Р.** Surface-tension-driven instability of a liquid layer evaporating into an inert gas // J. Colloid Interface Sci. 2005. V. 285. P. 296–305.
9. **Гончарова О. Н., Резанова Е. В.** Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 68–79.
10. **Шлиомис М. И., Якушин В. И.** Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Учен. зап. Перм. гос. ун-та. Сер. Гидродинамика. 1972. № 4. С. 129–140.
11. **Де Грот С.** Неравновесная термодинамика / С. Де Грот, П. Мазур. М.: Мир, 1964.
12. **Гебхарт Б.** Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджа, Б. Саммакия. М.: Мир, 1991.
13. **Lyulin Y., Kabov O., Iorio C. S., et al.** Liquids-candidates for CIMEX-1 experiments on ISS // Manuscript of CIMEX meeting, Bruxelles, 15 May 2009. Bruxelles: Microgravity Res. Centre, 2009.
14. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
15. **Андреев В. К.** Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. В. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев. М.: Физматлит, 2008.

*Поступила в редакцию 18/XI 2014 г.,
в окончательном варианте — 1/VII 2015 г.*
