УДК 539.37

О РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВАХ МОМЕНТНОГО КОНТИНУУМА КОССЕРА

М. П. Варыгина[*], О. В. Садовская[*,**], В. М. Садовский[*,**]

[*] Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
[**] Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск
E-mail: sadov@icm.krasn.ru

С использованием высокоэффективных параллельных вычислений установлено, что в моментной упругой среде существует резонансная частота, соответствующая частоте собственных колебаний вращательного движения частиц и не зависящая от размеров исследуемой области.

Ключевые слова: упругость, моментная среда, параллельный алгоритм, резонансный спектр.

Введение. Математическая модель моментного континуума Коссера [1, 2], учитывающая микроструктуру материала, предназначена для описания напряженно-деформированного состояния композитов, гранулированных, порошкообразных, микроразрушенных и микрополярных сред. Принципиальное отличие данной модели от классической теории упругости состоит в том, что в ней неявно присутствует малый линейный параметр — размер частиц микроструктуры материала. Как следствие для получения корректных численных решений расчеты необходимо выполнять на сетках, размер ячеек которых согласован со значением этого параметра. При решении динамических задач в пространственной постановке оказываются эффективными параллельные алгоритмы, позволяющие распределять вычислительную нагрузку между большим числом узлов кластера и существенно уменьшать размер ячеек расчетной сетки, тем самым повышая точность численного решения.

Вопросы численной реализации модели на многопроцессорных вычислительных системах рассматриваются в [3, 4]. В настоящей работе приводятся результаты анализа колебательных процессов, которые показывают, что в моментной упругой среде существует резонансная частота, зависящая только от инерционных свойств частиц микроструктуры и от параметров упругости материала.

1. Основные уравнения модели. В модели моментной среды кроме поступательного движения, которое характеризуется вектором скорости $\boldsymbol{v}$, рассматриваются независимые повороты частиц с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, а наряду с тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, компоненты которого несимметричны, вводится несимметричный тензор моментных напряжений $\boldsymbol{m}$. Полную систему уравнений модели образуют уравнения движения, кинематические соотношения и обобщенный закон линейной теории упругости:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00148), а также в рамках Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация” и междисциплинарного Интеграционного проекта СО РАН № 40.

$$
\begin{gathered}
\rho\dot{\boldsymbol{v}} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{g}, \qquad j\dot{\boldsymbol{\omega}} = \nabla\cdot\boldsymbol{m} - 2\boldsymbol{\sigma}^a + j\boldsymbol{q}, \qquad \dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{M}} = \nabla\boldsymbol{\omega}, \\
\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\delta} + 2\mu\boldsymbol{\Lambda}^s + 2\alpha\boldsymbol{\Lambda}^a, \qquad \boldsymbol{m} = \beta(\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{M})\boldsymbol{\delta} + 2\gamma\boldsymbol{M}^s + 2\varepsilon\boldsymbol{M}^a.
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь ρ — плотность среды; $\boldsymbol{g}$ — вектор массовых сил; $\boldsymbol{q}$ — вектор моментов; $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{M}$ — тензоры деформаций и кривизн, в естественном (ненапряженном) состоянии среды равные нулю; $\boldsymbol{\delta}$ — метрический тензор; j — инерционный параметр, равный произведению момента инерции частицы относительно оси, проходящей через ее центр тяжести, и числа частиц в единице объема; λ, μ, α, β, γ, ε — коэффициенты упругости изотропного материала. Используются общепринятые обозначения и операции тензорного анализа: двоеточие означает двойную свертку, точка над символом — производную по времени, индекс т — транспонирование, верхние индексы s и a соответствуют симметричной и антисимметричной составляющим тензоров. С антисимметричной составляющей, где это необходимо, отождествляется соответствующий ей вектор. В частности, в уравнения вращательного движения входит вектор тензора $\boldsymbol{\sigma}^a = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{т}})/2$. В декартовой системе координат с антисимметричным тензором

$$
\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}
$$

отождествляется вектор $\boldsymbol{\omega}$, координаты которого равны ω_1, ω_2, ω_3.

Симметричная составляющая $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^s = (\dot{\boldsymbol{\Lambda}} + \dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{т}})/2$ тензора $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}$ представляет собой тензор скоростей деформации среды, а антисимметричная составляющая $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^a = (\dot{\boldsymbol{\Lambda}} - \dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{т}})/2$ характеризует угловую скорость относительного вращения частиц. Известная формула $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{v}/2$ для вычисления вектора угловой скорости частиц безмоментной среды следует из равенства $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^a = 0$.

Для оценки линейного параметра микроструктуры материала справедлива формула $r = \sqrt{5j/(2\rho)}$, основанная на модельном представлении о среде как о плотной упаковке ансамбля шарообразных частиц одинакового радиуса.

В пространственном случае система уравнений (1.1) включает 24 уравнения относительно 24 неизвестных функций, и ее можно записать в матричной форме [3]

$$
A\dot{U} = B^1U_{,1} + B^2U_{,2} + B^3U_{,3} + QU + G, \tag{1.2}
$$

где U — вектор-функция, составленная из компонент векторов скорости и угловой скорости, несимметричных тензоров напряжений и моментных напряжений. В декартовой системе координат вектор-функция U принимает вид

$$
\begin{aligned}
U = (&v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \\
&m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{23}, m_{32}, m_{31}, m_{13}, m_{12}, m_{21}).
\end{aligned}
$$

В вектор G входят массовые силы и моменты. Матрицы-коэффициенты A, B^1, B^2, B^3 симметричны, а Q антисимметрична. Матрица A положительно определена, если выполняются следующие условия, ограничивающие допустимые значения параметров среды:

$$
3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad \alpha > 0, \quad 3\beta + 2\gamma > 0, \quad \gamma > 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.3}
$$

При выполнении условий (1.3) выражение для потенциальной энергии упругой деформации представляет собой положительную квадратичную форму, а система уравнений (1.2) является гиперболической по Фридрихсу [5]. Характеристические свойства системы (1.2) описываются уравнением

$$
\det(cA + n_1B^1 + n_2B^2 + n_3B^3) = 0, \qquad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,
$$

положительные корни которого (скорости продольных волн c_p, поперечных волн c_s, волн кручения c_m и волн вращательного движения c_ω) равны

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad c_s = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \qquad c_m = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{j}}, \qquad c_\omega = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{j}}. \tag{1.4}$$

Полную систему левых собственных векторов образуют 12 векторов, соответствующих ненулевым собственным числам $\pm c_p$, $\pm c_s$, $\pm c_m$, $\pm c_\omega$, среди которых $\pm c_s$ и $\pm c_\omega$ являются двукратными, и 12 векторов для $c = 0$.

Система (1.2) обладает обобщенными решениями с ударными волнами, для определения которых служит система уравнений сильного разрыва

$$(cA + n_1 B^1 + n_2 B^2 + n_3 B^3)[U] = 0, \tag{1.5}$$

где $[U]$ — скачок решения при переходе через фронт волны; c — скорость движения фронта в направлении нормального вектора $\boldsymbol{n}$. Из системы (1.5) следует, что в моментной среде ударные волны малой амплитуды могут распространяться только со скоростями (1.4), и на фронтах волн скалярные произведения левых собственных векторов и вектора U остаются непрерывными.

2. Одномерные движения с плоскими волнами. В одномерном случае, когда искомые функции зависят только от времени и одной из пространственных переменных, например x_1, система уравнений (1.1) распадается на четыре независимые подсистемы, описывающие:

— плоские продольные волны:

$$\rho\dot{v}_1 = \sigma_{11,1}, \qquad \dot{\sigma}_{11} = (\lambda + 2\mu)v_{1,1}, \qquad \dot{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{33} = \lambda v_{1,1}; \tag{2.1}$$

— крутильные волны:

$$\begin{gathered} j\dot{\omega}_1 = m_{11,1} + \sigma_{23} - \sigma_{32}, \qquad \dot{\sigma}_{32} = -\dot{\sigma}_{23} = 2\alpha\omega_1, \\ \dot{m}_{11} = (\beta + 2\gamma)\omega_{1,1}, \qquad \dot{m}_{22} = \dot{m}_{33} = \beta\omega_{1,1}; \end{gathered} \tag{2.2}$$

— поперечные волны (волны сдвига) с вращением частиц:

$$\begin{gathered} \rho\dot{v}_2 = \sigma_{12,1}, \qquad \dot{\sigma}_{12} = (\mu + \alpha)v_{2,1} - 2\alpha\omega_3, \qquad \dot{\sigma}_{21} = (\mu - \alpha)v_{2,1} + 2\alpha\omega_3, \\ j\dot{\omega}_3 = m_{13,1} + \sigma_{12} - \sigma_{21}, \qquad \dot{m}_{13} = (\gamma + \varepsilon)\omega_{3,1}, \qquad \dot{m}_{31} = (\gamma - \varepsilon)\omega_{3,1}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Еще одна подсистема получается из (2.3) заменой индексов и также описывает поперечные волны.

Общее решение подсистемы (2.1) выражается формулой Даламбера, в соответствии с которой продольные волны, как и в классической теории упругости, распространяются со скоростями $\pm c_p$ и не обладают дисперсией. Подсистема крутильных волн (2.2) сводится к телеграфному уравнению относительно угловой скорости

$$\ddot{\omega}_1 = c_m^2 \omega_{1,11} - 4\alpha\omega_1/j.$$

Не зависящее от x_1 решение телеграфного уравнения описывает равномерное колебательное вращение частиц среды с периодом колебаний $T = \pi\sqrt{j/\alpha}$. Общее решение можно представить в виде интегральной формулы

$$\omega_1(\xi, \eta) = \int_0^\xi f'(\vartheta) J_0\big(-2\sqrt{(\xi - \vartheta)\eta}\,\big)\, d\vartheta + \int_0^\eta g'(\vartheta) J_0\big(-2\sqrt{\xi(\eta - \vartheta)}\,\big)\, d\vartheta + {} \\ + \big(f(0) + g(0)\big) J_0(-2\sqrt{\xi\eta}\,)$$

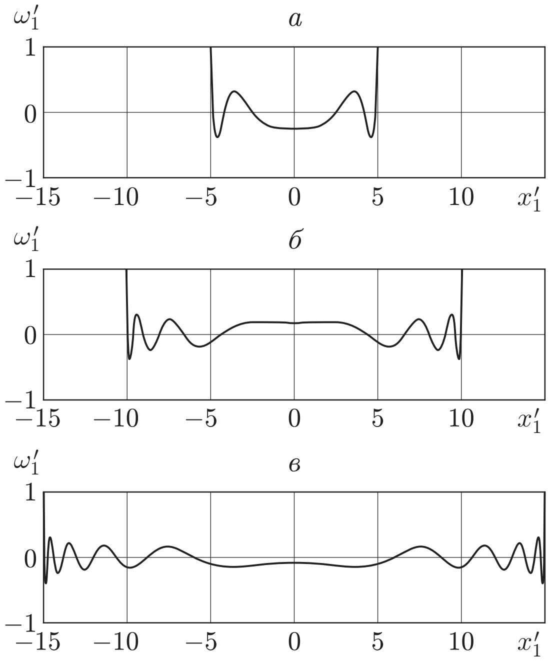

Рис. 1. Решение телеграфного уравнения для различных моментов безразмерного времени:
а — $t' = 5$, *б* — $t' = 10$, *в* — $t' = 15$

(ξ, $\eta = (t \pm x_1/c_m)\pi/T$ — безразмерные переменные; $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $f(\vartheta)$, $g(\vartheta)$ — произвольные функции), которая несколько сложнее формулы Даламбера. На рис. 1 приведено типичное распределение угловой скорости ω_1 в промежутке между фронтами двух ударных волн кручения $x_1 = \pm c_m t$. Используются безразмерные переменные: время $t' = \pi t/T$ и пространственная координата $x'_1 = \pi x_1/(c_m T)$. Амплитуда на фронтах волн считается постоянной в процессе движения (ее безразмерное значение равно единице). Перед каждым фронтом среда находится в невозмущенном состоянии. В начальный момент рассматриваемое решение имеет гладкий, неосциллирующий профиль. С течением времени на фронтах ударных волн возбуждается волнообразное вращательное движение частиц с характерной длиной волны, приблизительно равной $c_m T$.

В работе [6] с использованием разностной схемы Неймана — Рихтмайера выполнен численный анализ уравнений поперечных волн (2.3). Расчеты проводились для задачи об импульсном воздействии на упругую среду периодической системы Λ-образных импульсов касательного напряжения. Результаты расчетов показывают, что при фиксированном времени угловая скорость, а также моментные напряжения представляют собой осциллирующие функции с характерной длиной волны $c_s T$. Максимальное касательное напряжение в импульсе принималось равным единице. На рис. 2 приведены зависимости $\omega'_3(x'_1)$ для момента времени $t = 0{,}68$ мс и длительности импульса, равной 0,45 мс. В расчетах использовались следующие параметры упругости для пенистого полиуретана [7]: $\rho = 340$ кг/м^3, $\lambda = 416$, $\mu = 104$, $\alpha = 4{,}33$ МПа, $\beta = -22{,}8$, $\eta = 40$, $\varepsilon = 5{,}3$ Н. Момент инерции частиц, зависящий от размера микроструктуры, варьировался: $j = 4{,}4 \cdot 10^{-4}$ кг/м (рис. 2,*а*), $j = 1{,}76 \cdot 10^{-3}$ кг/м (рис. 2,*б*). Для данных значений параметра j период собственных колебаний равен $T = 31{,}7$; 63,3 мкс; соответственно меняется число колебаний угловой скорости (см. рис. 2).

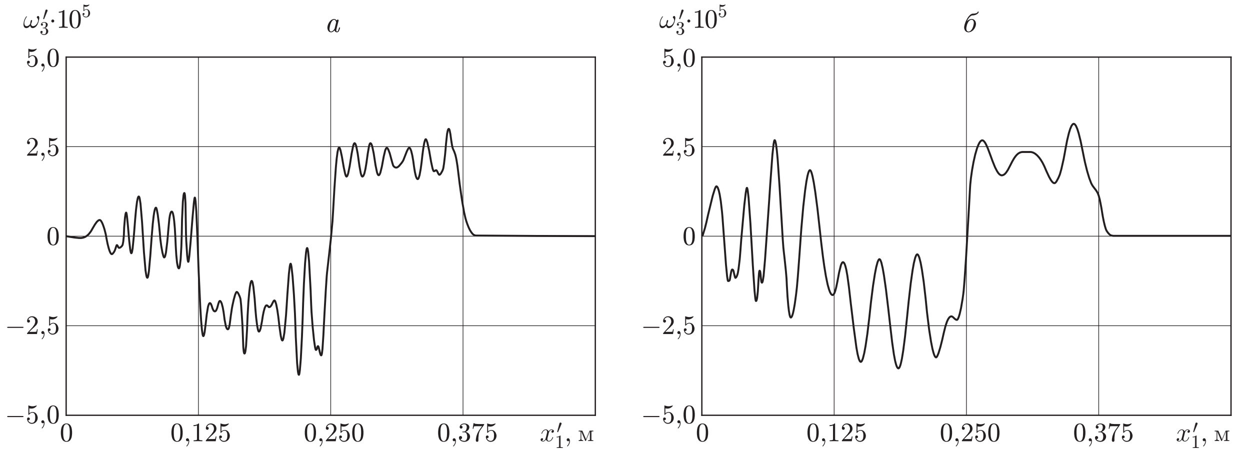

Рис. 2. Собственные колебания угловой скорости при различных размерах частиц микроструктуры материала:
а — $j = 4{,}4 \cdot 10^{-4}$ кг/м, *б* — $j = 1{,}76 \cdot 10^{-3}$ кг/м

3. Резонансные спектры поперечных возмущений. Согласно общей теории гиперболических систем в рамках модели (1.1) возмущения распространяются с конечными скоростями (1.4). При этом возмущения, соответствующие поперечным волнам, автоматически порождают волны вращательного движения, и наоборот, возмущения, соответствующие вращательному движению, приводят к образованию поперечных волн. Как и на крутильных волнах, на поперечных волнах возникают осцилляции решения, что является основным качественным отличием модели моментной среды Коссера от классической линейной теории упругости. Другое отличие заключается в том, что в моментной среде имеется собственная частота акустического резонанса материала, не зависящая от размеров исследуемой области и проявляющаяся только при определенных условиях возмущения. Действительно, в случае однородного напряженного состояния из системы (2.3) вытекает классическое резонансное уравнение

$$j\ddot{\omega}_3 = -4\alpha\omega_3 + 2\alpha\dot{\chi}, \qquad (3.1)$$

из которого следует, что если угол сдвига $\chi(t)$ изменяется по гармоническому закону с частотой $\nu_* = 1/T$, равной частоте собственных колебаний вращательного движения, то амплитуда угловой скорости частиц бесконечно увеличивается.

Уравнение (3.1) описывает поведение бесконечно тонкого плоского упругого слоя, нижняя поверхность которого неподвижна, а верхняя движется по заданному закону. На рис. 3 приведены амплитудно-частотные зависимости для касательного напряжения на нижней поверхности слоя, полученные в результате численного решения задачи о равномерном циклическом сдвиге вязкоупругого слоя конечной толщины H. Решение описывает также крутильные колебания цилиндрического образца заданной высоты, один из торцов которого жестко закреплен. В этом случае касательное напряжение на закрепленном торце линейно зависит от радиуса и, таким образом, пропорционально величине σ_{12}, а линейная скорость на противоположном торце пропорциональна v_2. На рис. 3,*а* представлена зависимость для среды Коссера, на рис. 3,*б* — для безмоментной вязкоупругой среды. Аналогичные зависимости для идеальных невязких сред имеют систему резонансных пиков с бесконечными амплитудами. Вязкость использовалась в качестве сглаживающего параметра. Процесс сдвига описывался уравнениями (2.3), в которых в соответствии с теорией вязкоупругости Больцмана произведения параметров среды и кинематических характеристик деформирования заменялись свертками соответствующих этим параметрам ядер

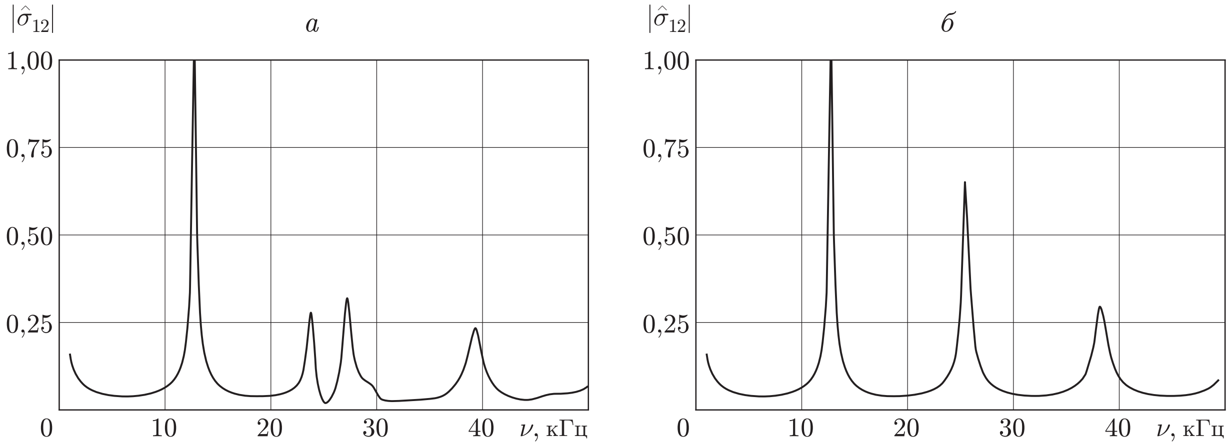

Рис. 3. Спектральные зависимости касательного напряжения для тяжелой нефти в породе:
а — среда Коссера, *б* — безмоментная вязкоупругая среда

релаксации на те же характеристики. Граничные условия задачи принимались в виде

$$v_2\big|_{x_1=0} = v_0\,\mathrm{e}^{2\pi i\nu t}, \qquad \omega_3\big|_{x_1=0} = 0, \qquad v_2\big|_{x_1=H} = \omega_3\big|_{x_1=H} = 0 \tag{3.2}$$

(ось x_1 направлена внутрь слоя). Система (2.3) решалась с использованием спектрального метода: после применения преобразования Фурье из системы (2.3) была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд

$$\begin{gathered} 4\pi^2\nu^2\rho\hat v_2 + (\hat\mu+\hat\alpha)\hat v_{2,11} - 2\hat\alpha\hat\omega_{3,1} = 0, \\ 4(\pi^2\nu^2 j - \hat\alpha)\hat\omega_3 + (\hat\gamma+\hat\varepsilon)\hat\omega_{3,11} + 2\hat\alpha\hat v_{2,1} = 0, \end{gathered} \tag{3.3}$$

решение которой строилось в явной форме с учетом граничных условий (3.2). Амплитуда касательного напряжения определялась через решение (3.3) по формуле

$$2\pi i\nu\hat\sigma_{12} = (\hat\mu+\hat\alpha)\hat v_{2,1} - 2\hat\alpha\hat\omega_3.$$

Для проверки достоверности результатов выполнено численное решение задачи на основе аппроксимирующей (3.3) спектрально-разностной схемы

$$\begin{gathered} 4\pi^2\nu^2\rho\hat v_2^k + (\mu+\alpha)\,\frac{\hat v_2^{k+1} - 2\hat v_2^k + \hat v_2^{k-1}}{h^2} - 2\alpha\,\frac{\hat\omega_3^k - \hat\omega_3^{k-1}}{h} = 0, \\ 4(\pi^2\nu^2 j - \hat\alpha)\hat\omega_3^k + (\gamma+\varepsilon)\,\frac{\hat\omega_3^{k+1} - 2\hat\omega_3^k + \hat\omega_3^{k-1}}{h^2} + 2\alpha\,\frac{\hat v_2^{k+1} - \hat v_2^k}{h} = 0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $h = H/N$ — шаг сетки; $k = 1,\ldots,N-1$. Расчеты проводились методом матричной прогонки, и результаты, полученные на достаточно мелких сетках, практически не различались.

Феноменологические параметры среды в расчетах подбирались по экспериментальным данным [8] для тяжелой нефти в породе при достаточно низкой температуре, когда материал находится в твердой фазе ($\rho = 1114$ кг/м^3, $j = 0{,}01$ кг/м, $\mu = 966$, $\alpha = 52{,}2$ МПа, $\gamma+\varepsilon = 12{,}51$ Н, $H = 36{,}4$ мм). В расчетах использовалась теория Кельвина — Фойгта, в соответствии с которой комплексные модули являются линейными функциями частоты, в частности $\hat\mu = \mu + 2\pi i\nu\mu'$. Мнимые части выбирались таким образом, чтобы добиться необходимого сглаживания решения.

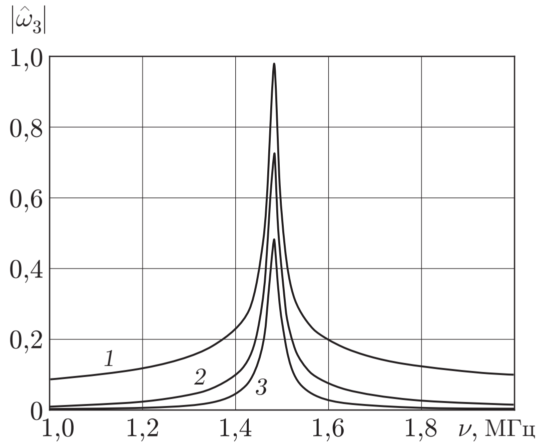

Рис. 4. Спектральная зависимость угловой скорости для синтетического полиуретана при $H = 10$ см и различных расстояниях от поверхности слоя: *1* — $x_1 = 0$, *2* — $x_1 = H/4$, *3* — $x_1 = H/2$

Сравнение рис. 3,*а* и 3,*б* показывает, что моментная среда обладает дополнительной резонансной частотой 23 кГц, близкой к частоте вращательного движения частиц, которая не зависит от толщины слоя. Это подтверждается данными большого количества численных экспериментов для различных толщин. Установлено, что изменение толщины слоя H приводит к смещению периодической системы основных резонансных частот, приблизительно равных $\nu_k = kc_s/(2H)$ $(k = 1, 2, \dots)$, при этом пик, соответствующий частоте ν_*, остается неподвижным.

Аналогичные расчеты для пенистого полиуретана не показали столь же значительного на фоне основных частот пика на резонансной частоте этого материала, имеющей тот же порядок значений, что и для тяжелой нефти. Это обусловлено существенно более низкими моментными характеристиками, выраженными значениями параметров j и α. Установлено, что в материалах с низкими моментными характеристиками резонанс вращательного движения частиц можно возбудить, например, за счет периодического изменения вращательного момента на границе слоя. На рис. 4 приведены спектральные кривые для синтетического полиуретана ($\rho = 590$ кг/м^3, $j = 5{,}31 \cdot 10^{-6}$ кг/м, $\lambda = 2{,}195$, $\mu = 1{,}033$, $\alpha = 0{,}115$ ГПа, $\beta = -2{,}34$, $\gamma = 4{,}1$, $\varepsilon = 0{,}13$ Н (см. работу [7])). Результаты получены путем численного решения спектрально-разностным методом (см. (3.4)) системы уравнений (3.3) с граничными условиями

$$\sigma_{12}\big|_{x_1=0} = 0, \qquad m_{13}\big|_{x_1=0} = m_0\,\mathrm{e}^{2\pi i\nu t}, \qquad v_2\big|_{x_1=H} = \omega_3\big|_{x_1=H} = 0. \tag{3.5}$$

Приведенные зависимости получены при $H = 10$ см, однако от толщины слоя они практически не зависят. Анализ рис. 4 показывает, что в рассматриваемом диапазоне амплитуда угловой скорости имеет единственный резонансный пик на частоте $\nu_* = 1{,}48$ МГц, высота которого регулируется мнимой частью параметра $\hat\gamma + \hat\varepsilon$ и при увеличении глубины почти линейно уменьшается.

Качественно подобные результаты в задаче с граничными условиями (3.5) получены в расчетах, выполненных для пенистого полиуретана и тяжелой нефти. Для того чтобы подтвердить численные результаты аналитически, рассмотрим систему уравнений (3.3) при $\nu = \nu_*$ для невязкой моментной среды:

$$(4\alpha\rho/j)\hat v_2 + (\mu + \alpha)\hat v_{2,11} - 2\alpha\hat\omega_{3,1} = 0, \qquad (\gamma + \varepsilon)\hat\omega_{3,11} + 2\alpha\hat v_{2,1} = 0. \tag{3.6}$$

Для этой системы характеристическое уравнение имеет кратный корень, равный нулю, с кратностью два. Фундаментальная система решений состоит из векторов

$$\begin{pmatrix} -i(\gamma+\varepsilon)z \\ 2\alpha \end{pmatrix} \mathrm{e}^{izx_1}, \qquad \begin{pmatrix} i(\gamma+\varepsilon)z \\ 2\alpha \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-izx_1}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} j/(2\rho) \\ x_1 \end{pmatrix},$$

где $z = 2\sqrt{(\alpha\rho(\gamma+\varepsilon)/j+\alpha^2)/((\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon))}$. Общее решение системы (3.6) имеет вид

$$\hat{v}_2 = -i(\gamma+\varepsilon)z\bigl(A\,\mathrm{e}^{izx_1} - B\,\mathrm{e}^{-izx_1}\bigr) + jD/(2\rho),$$
$$\hat{\omega}_3 = 2\alpha\bigl(A\,\mathrm{e}^{izx_1} + B\,\mathrm{e}^{-izx_1}\bigr) + C + Dx_1.$$

В силу граничных условий (3.5) на поверхности $x_1 = 0$ константы A и B выражаются через C и D:

$$A + B = \frac{jC}{2\rho(\gamma+\varepsilon)}, \qquad A - B = \frac{iD}{2\alpha z} + \frac{\pi\nu_* m_0}{\alpha z(\gamma+\varepsilon)}.$$

Из граничных условий на поверхности $x_1 = H$ следует система уравнений

$$\begin{pmatrix} j\alpha z\sin(zH) & \rho(\gamma+\varepsilon)\cos(zH)+j\alpha \\ j\alpha z\cos(zH)+\rho z(\gamma+\varepsilon) & \rho(\gamma+\varepsilon)(zH-\sin(zH)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} =$$
$$= 2\pi i\rho\nu_* m_0 \begin{pmatrix} \cos(zH) \\ -\sin(zH) \end{pmatrix}, \qquad (3.7)$$

позволяющая определить все константы. При $x_1 = 0$ амплитуда угловой скорости находится по формуле

$$\hat{\omega}_3(0) = j\alpha C/(\rho(\gamma+\varepsilon)) + C.$$

Из системы (3.7) следует, что при больших значениях H константа D является величиной порядка $1/H$, а C — величиной порядка $\operatorname{ctg}(zH)$. Следовательно, амплитуда стремится к бесконечности, если zH близко к πk $(k = 1, 2, \dots)$.

Таким образом, без учета вязкости среды в задаче с граничными условиями (3.5) частота ν_* оказывается резонансной только для слоев строго определенной толщины. Приращение толщины резонирующего слоя $\Delta H = \pi/z$ зависит от параметров материала. Для синтетического полиуретана значение $\Delta H = 0{,}42$ мм сравнимо с характерным параметром микроструктуры $r = 0{,}15$ мм. Зависимость модуля амплитуды $\hat{\omega}_3(0)$ от толщины слоя приведена на рис. 5. Видно, что асимптотическая формула для величины ΔH выполняется с высокой точностью.

4. Расчеты пространственного распространения волн. В работах [3, 4] описан алгоритм численной реализации системы уравнений (1.2) на суперкомпьютерах с параллельной архитектурой и дана формулировка граничных условий симметрии для моментной теории упругости изотропной среды, позволяющих уменьшить объем вычислений за счет отсечения части расчетной области. Алгоритм основан на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным и времени второго порядка точности. Полученные в результате расщепления одномерные системы уравнений решаются с помощью явной монотонной ENO-схемы (essentially nonoscillatory) типа предиктор-корректор, представляющей собой обобщение схемы распада разрыва Годунова, с использованием кусочно-линейных сплайнов, разрывных на границах ячеек. Сплайны строятся на основе специальной процедуры предельной реконструкции, позволяющей повысить точность численного решения. Полученная таким образом расчетная схема обладает свойством монотонности, поэтому, в отличие от многих более простых схем, может быть использована для исследования обобщенных решений в задачах об ударных, импульсных и сосредоточенных воздействиях.

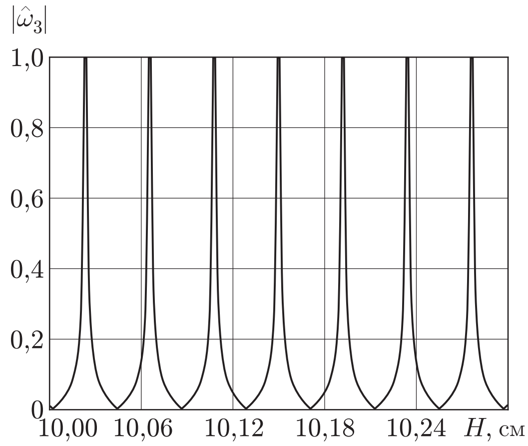

Рис. 5. Зависимость модуля амплитуды угловой скорости от толщины слоя

Программирование вычислений выполнено по широко распространенной в настоящее время технологии SPMD (single program — multiple data) на языке Fortran-95 с использованием библиотеки передачи сообщений MPI (message passing interface). Расчетная область распределяется между вычислительными узлами по принципу равномерной загрузки посредством одно-, дву- или трехмерного разбиения. Распараллеливание вычислений осуществляется на этапе расщепления задачи по пространственным переменным. Тестирование алгоритма и комплекса программ выполнялось путем сопоставления результатов расчетов с точным решением двумерной задачи о распространении поверхностных волн Рэлея в среде Коссера [9], а также с точными решениями, описывающими одномерные движения среды с плоскими волнами. Результаты расчетов собственных колебаний в моментной среде в двумерной постановке на основе разработанного алгоритма приведены в работе [3]. В [4] представлены результаты численного решения пространственной задачи Лэмба о мгновенном действии сосредоточенных сил и моментов на поверхности полупространства. Ниже приводятся результаты численного решения задачи о действии сосредоточенного вращательного момента $m_{12} = -m_0\delta(x)\sin(2\pi\nu_* t)$, изменяющегося периодически во времени с частотой, равной резонансной частоте.

С учетом условий симметрии расчетная область представляет собой 1/4 полупространства. В действительности расчеты проводились на кубе из синтетического полиуретана с длиной стороны 1 см. В расчетах использовалась равномерная разностная сетка размером $200 \times 200 \times 200$ ячеек. На более грубых сетках выполнить расчеты с приемлемой точностью невозможно, поскольку размер ячеек становится сравнимым с параметром микроструктуры среды. На искусственно введенных гранях куба задавались условия симметрии [4] и неотражающие граничные условия, моделирующие беспрепятственное прохождение волн. Расчеты выполнялись на кластере МВС-1000 Института вычислительного моделирования СО РАН. Каждым из 64 вычислительных узлов решалась часть задачи на подсетке с размерностью $50 \times 50 \times 50$ ячеек. Для расчета 200 шагов по времени требуется приблизительно 10 ч машинного времени. На рис. 6,*а,б* приведены сейсмограммы угла поворота частиц вокруг горизонтальной оси вдоль горизонтальной трассы, проходящей через точку приложения нагрузки, для задачи Лэмба и задачи о периодическом воздействии с резонансной частотой ν_*. Результаты обработаны в компьютерной системе SeisView. Сравнивая сейсмограммы по числу колебаний, можно заметить, что соответствующие длины волн практически совпадают.

На рис. 7,*а,б* показаны поверхности уровня угловой скорости ω_2 для нерезонансной частоты $\nu = 1{,}5\nu_*$ и резонансной частоты ν_* соответственно. Расчеты показывают, что

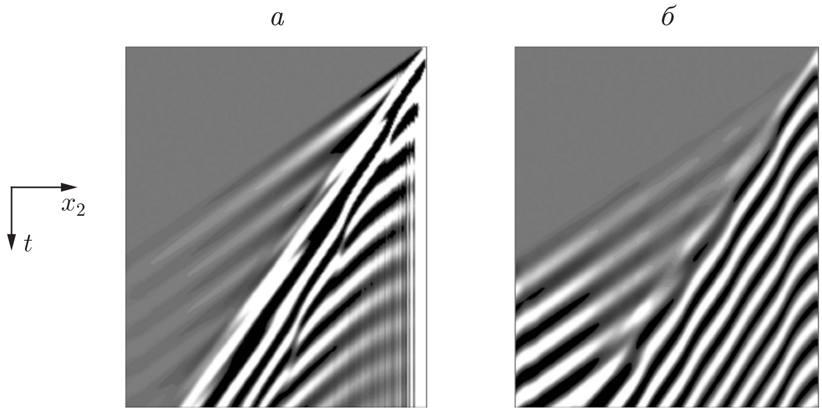

Рис. 6. Сейсмограммы падающих волн в случае импульсного (*а*) и периодического (*б*) воздействий

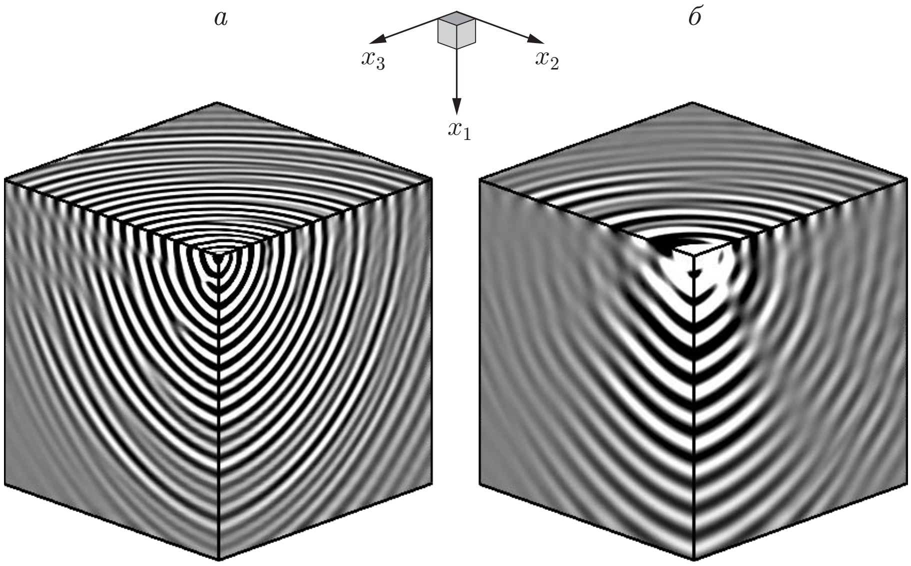

Рис. 7. Поверхности уровня угловой скорости для нерезонансной (*а*) и резонансной (*б*) частот

при частоте внешнего воздействия $\nu = \nu_*$ происходит увеличение амплитуды со временем и более медленное затухание колебаний с увеличением расстояния, характерное для акустического резонанса.

Результаты расчетов могут служить методической основой при планировании экспериментов по определению феноменологических параметров континуума Коссера (проблема, в настоящее время практически не решенная).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cosserat E., Cosserat F.** Theorie des corps deformables // Chwolson's Traité Physique: 2-me ed. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. P. 953–1173.
2. **Пальмов В. А.** Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 3. С. 401–408.
3. **Садовская О. В.** Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский. М.: Физматлит, 2008.

4. **Садовская О. В.** Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 2. С. 313–322.
5. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
6. **Sadovskaya O. V., Sadovsky V. M.** Numerical analysis of elastic waves propagation in Cosserat continuum // Proc. of the 8th Intern. conf. on mathematical and numerical aspects of wave propagation "Waves 2007", University of Reading, England, 23–27 July 2007. Paris: INRIA, 2007. P. 327–329.
7. **Lakes R.** Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure / Ed. by H. Mühlhaus, J. Wiley. N. Y.: J. Wiley and sons, Ltd., 1995. Ch. 1. P. 1–22.
8. **Behura J., Batzle M., Hofmann R., Dorgan J.** Heavy oils: Their shear story // Geophys. 2007. V. 72, N 5. P. E175–E183.
9. **Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н.** О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Докл. АН. 2006. Т. 405, № 2. С. 196–198.

Поступила в редакцию 9/IV 2009 г.