

УДК 534.1; 539.3

ПОЛОЖЕНИЯ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ТРУБОПРОВОДА С ВИБРИРУЮЩИМИ ОПОРАМИ

М. А. Ильгамов^{*,**,***}, М. М. Шакирьянов^{*}

^{*} Институт механики Уфимского федерального исследовательского центра РАН, 450054 Уфа, Россия

^{**} Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 101990 Москва, Россия

^{***} Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия

E-mails: ilgamov@anrb.ru, shakmar9@mail.ru

Рассмотрены пространственные колебания трубопровода на двух опорах, вибрирующих в вертикальном направлении с одинаковыми амплитудами и фазами. Движение трубопровода включает вращение (качение) вокруг прямой, проходящей через опоры, и изгибную деформацию. Предполагается, что изгиб происходит в плоскости качения без деформации кручения. Используются нелинейные уравнения изгиба и углового движения трубопровода. Изучено движение трубопровода, в случае когда влияние на изгиб внутреннего давления среды в трубе значительно больше влияния ее веса. По аналогии с маятником Капицы определены значения входных параметров, при которых верхнее и нижнее изогнутые положения трубопровода являются устойчивыми. Проведены численные расчеты для армированной магниевой трубы, заполненной метаном.

Ключевые слова: трубопровод, пространственный изгиб, вибрация опор, положения упругого равновесия.

DOI: 10.15372/PMTF20220318

Введение. Поведение механической системы существенно зависит от вибраций основания, на котором она установлена. Примером такой зависимости является динамика маятника с вибрирующей точкой подвеса [1]. Его перевернутое положение при определенных условиях, в частности при достаточно интенсивных вибрациях точки подвеса, является устойчивым. Нелинейное взаимодействие двух маятниковых часов, висящих симметрично относительно средней точки упругой балки, изучено в работе [2]. В [3] исследована устойчивость вертикально расположенного гибкого стержня на вибрирующей нижней опоре. Изучению динамики трубопроводов посвящено большое количество работ (см., например, [4–14]). Обзор соответствующих исследований приводится в [9].

В настоящей работе исследуются устойчивые изогнутые положения пролета трубопровода между двумя опорами, в случае когда обе опоры совершают вертикальные колебания с одинаковой амплитудой в одной фазе. Насколько известно авторам данной работы, напряженно-деформированное состояние трубопровода в указанной постановке не изучалось.

Постановка задачи. Рассматриваются пространственные колебания двухопорной трубы с заключенной в ней жидкостью или газом относительно горизонтальной оси, проходящей через опоры (рис. 1). Предполагается, что опоры допускают свободное вращение трубы вокруг продольной оси. Труба, изогнутая под действием собственного веса и постоянного внутреннего давления p_0 и в момент времени $t = 0$ отклоненная на угол θ_0 от вертикальной плоскости, освобождается от связей без начальной угловой скорости. С этого момента времени основание, на котором закреплены опоры, начинает совершать вертикальное вибрационное движение. Далее рассматривается установившееся движение.

Деформации трубы, обусловленные ее выходом из плоскости изгиба, считаются малыми, деформация кручения отсутствует, поэтому изогнутая ось трубопровода является плоской кривой. Согласно этим допущениям движение трубопровода рассматривается как совокупность относительных изгибных перемещений $w(x, t)$ в плоскости качения и двух переносных движений: вращения $\theta(t)$ вокруг оси x и поступательного вибрационного перемещения опор $s(t)$. Продольные распределенные нагрузки (продольные силы инерции, трение потока) не учитываются. Расстояние L между концевыми сечениями трубы на опорах остается неизменным.

На рис. 1 показаны элемент длиной dx и его прогиб w . Масса элемента равна $dm = m dx$, где $m = \rho_0 F_0 + \rho F$; $F_0 = \pi R^2$; $F = \pi[(R + h)^2 - R^2]$; R, h, ρ, ρ_0 — внутренний радиус, толщина стенки, плотности материала трубы и заполняющей ее среды. Предполагается, что скоростной напор $\rho_0 V_0^2/2$ мал по сравнению с давлением p_0 (V_0 — скорость движения среды в трубе). В соответствии с принятой моделью деформации прогиб $w(x, t)$ отсчитывается по радиусу в цилиндрической системе координат, а угол $\theta(t)$ — от оси z до плоскости изгиба трубы. Через $\mathbf{g}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\tau, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_V$ обозначены гравитационное, кориолисово, относительное, переносные касательное и нормальное, вибрационное ускорения, $\mathbf{g} dm$ — сила гравитации, $d\Phi_r, d\Phi_\tau, d\Phi_n, d\Phi_V, d\Phi_k$ — относительная, касательная, нормальная, вибрационная силы инерции и сила инерции Кориолиса. Без учета вибраций опор выражения для ускорений выделенного элемента и сил, приложенных к нему, приведены в [10]. В данном случае они записываются в виде

$$\begin{aligned} a_r = \ddot{w}, \quad a_\tau = w\ddot{\theta}, \quad a_n = w\dot{\theta}^2, \quad a_k = 2\dot{\theta}\dot{w}, \quad a_V = \ddot{s}, \quad d\Phi_r = a_r dm, \\ d\Phi_\tau = a_\tau dm, \quad d\Phi_n = a_n dm, \quad d\Phi_k = a_k dm, \quad d\Phi_V = a_V dm \end{aligned} \quad (1)$$

(точка обозначает дифференцирование по времени t).

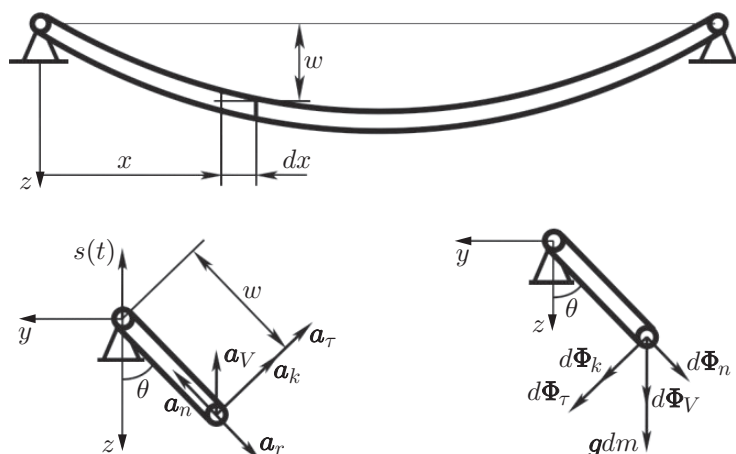


Рис. 1. Расчетная схема трубопровода с двумя опорами

Уравнение вращательного движения трубы относительно оси x имеет вид

$$-\int_{(M)} w \sin \theta (g dm + d\Phi_V) - M_u - \int_{(M)} w d\Phi_\tau - \int_{(M)} w d\Phi_k = 0, \quad (2)$$

$$M_u = J_p \ddot{\theta}, \quad J_p = 2\rho L J, \quad J = \pi[(R+h)^4 - R^4]/4, \quad M = mL.$$

В случае идеальной жидкости или газа в выражение для J_p плотность ρ_0 не входит.

Уравнение изгибных колебаний трубопровода представим следующим образом [9]:

$$d\Phi_r + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx + (F_0 p_0 - T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = d\Phi_n + (g dm + d\Phi_V) \cos \theta, \quad (3)$$

$$T = \frac{EF}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Здесь E — модуль Юнга материала трубы.

С учетом выражений (1) уравнения изгибных (3) и вращательных (2) движений запишем в виде

$$\ddot{w} = (g + \ddot{s}) \cos \theta + w \dot{\theta}^2 - H(w) + \frac{T}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\left(\frac{k^2 L}{2} + \int_0^L w^2 dx \right) \ddot{\theta} + 2\dot{\theta} \int_0^L w \dot{w} dx = -(g + \ddot{s}) \sin \theta \int_0^L w dx, \quad (4)$$

$$H(w) \equiv \frac{1}{m} \left(EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_0 F_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad k^2 = \frac{4\rho J}{m}.$$

Примем, что $s = s_0 \sin(\Omega t)$, где s_0 , Ω — амплитуда и круговая частота колебаний основания. Предполагается, что амплитуда s_0 мала по сравнению с амплитудой W_0 статического прогиба трубопровода, а частота Ω значительно больше частоты упругих колебаний.

Представим угол θ и прогиб w в виде сумм

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \quad w = w_0 + w_1 + w_2, \quad (5)$$

где величины с индексами 0, 1, 2 соответствуют начальному состоянию (без маятниковых качения и движения опор), вращательному движению трубы вокруг оси, проходящей через опоры, и движению, вызванному вибрацией опор. В соответствии с указанной выше моделью изгиба трубы углы θ_0 , $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ отсчитываются в плоскости качения.

В окрестности положений динамического равновесия трубопровода скорость $\dot{\theta}_1$ мала по сравнению с $\dot{\theta}_2$ вследствие большой частоты Ω , несмотря на то что угол θ_2 мал по сравнению с θ_1 . Поэтому для указанных положений принимаем приближения

$$\dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1 = 0, \quad \cos \theta = \cos(\theta_0 + \theta_1) - \theta_2 \sin(\theta_0 + \theta_1), \quad (6)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta_0 + \theta_1) + \theta_2 \cos(\theta_0 + \theta_1).$$

С учетом (5), (6) система (4) записывается в виде

$$\frac{T}{m} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - H(w_0) + g \cos \theta_1 = 0,$$

$$\ddot{w}_1 = -H(w_1), \quad \ddot{w}_2 = \ddot{s} \cos \theta_1 + (w_0 + w_1) \dot{\theta}_2^2 - H(w_2), \quad (7)$$

$$\left(\frac{k^2 L}{2} + \int_0^L w^2 dx\right) \ddot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_2 \int_0^L w \dot{w} dx = -(g + \ddot{s})(\sin \theta_1 + \theta_2 \cos \theta_1) \int_0^L w dx.$$

Здесь для упрощения дальнейших преобразований значение угла θ_0 принято равным нулю. Кроме того, произведение $T(\partial^2 w / \partial x^2)$ определено с учетом только составляющей w_0 суммы (5). В третьем уравнении (7) отброшен нелинейный член $w_2 \dot{\theta}_2^2$. Принимаем также допущение, что первые две функции прогиба изменяются по длине трубы одинаково:

$$w_0 = W_0(\theta_1) \sin(\beta x), \quad w_1 = W_1(\theta_1, t) \sin(\beta x), \quad \beta = \pi/L. \quad (8)$$

Вследствие высокой частоты движения опор по длине трубы может возбуждаться не одна, а несколько полуволин прогиба w_2 . Поэтому данную составляющую будем определять суммой

$$w_2 = \sum_{n=1,3,\dots} W_{2n}(\theta_1, t) \sin(n\beta x). \quad (9)$$

Функции (8), (9) удовлетворяют граничным условиям $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ ($x = 0, L$). В силу симметрии граничных условий и поперечной распределенной нагрузки относительно середины пролета число n полуволин в (9) принимает лишь нечетные значения.

Подставляя функции (8), (9) в первые три уравнения системы (7) и применяя метод Бубнова — Галеркина, получаем

$$\begin{aligned} W_0^3 - aW_0 - b \cos \theta_1 &= 0, \quad \ddot{W}_1 - \omega_1^2(p-1)W_1 = 0, \\ \ddot{W}_{21} - [\omega_1^2(p-1) + \dot{\theta}_2^2]W_{21} - (W_0 + W_1)\dot{\theta}_2^2 &= -\frac{4s_0\Omega^2 \cos \theta_1 \sin(\Omega t)}{\pi}, \\ \ddot{W}_{2n} - [\omega_n^2(p-n^2) + \dot{\theta}_2^2]W_{2n} &= -\frac{4s_0\Omega^2 \cos \theta_1 \sin(\Omega t)}{\pi n}, \quad a = \frac{4J}{F}(p-1), \quad b = \frac{4g}{\pi\gamma}, \\ p = \frac{p_0}{p_*}, \quad p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F_0}, \quad \gamma = \frac{\beta^4 EF}{4m}, \quad \omega_1^2 &= \frac{\beta^4 EJ}{m}, \quad \omega_n^2 = n^2\omega_1^2, \quad n = 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь p_* , ω_n — критическое давление и собственные частоты изгибных колебаний трубопровода при нулевом перепаде статического давления. Во втором, третьем и четвертом уравнениях (10) члены, содержащие функцию $\dot{\theta}_1^2$, согласно приближениям (6) отброшены.

Приближенное аналитическое решение. Для оценки влияния внутреннего давления и веса на значение статического прогиба W_0 при $p > 1$, когда необходимо учитывать член W_0^3 в первом уравнении (10), рассмотрим приближенное решение данного уравнения. Для этого выражение для W_0 представим в виде $W_0 = W_p + W_g \cos \theta_1$, где W_p , W_g — прогибы, обусловленные внутренним давлением и весом трубы. Исследуем случай, когда влияние давления в трубе на значение прогиба существенно больше влияния ее веса. В приближенном решении величину W_g^2 будем считать пренебрежимо малой по сравнению с W_p^2 . Это справедливо, если $b^2/(4a^3) \ll 1$. Подставляя указанную сумму в (10), получаем уравнения $W_p(W_p^2 - a) = 0$, $(3W_p^2 - a)W_g - b = 0$. В первом из этих уравнений корень $W_p = \sqrt{a}$ имеет физический смысл. Тогда

$$W_g = \frac{b}{2a}, \quad W_0 = \sqrt{a} + \frac{b}{2a} \cos \theta_1. \quad (11)$$

При $g = 0$ приближенное решение (11) совпадает с точным решением кубического уравнения (10). Таким образом, в случае слабой гравитации и преобладающего влияния внутреннего давления статический прогиб, выраженный через входные параметры, равен

$$W_0 \approx W_p = R\sqrt{(p-1)[(1+h/R)^2 + 1]}. \quad (12)$$

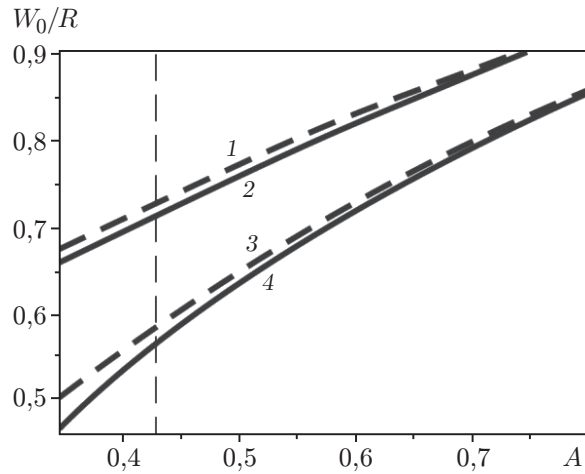


Рис. 2. Зависимость относительного прогиба W_0/R от безразмерного параметра внутреннего давления A :

1, 3 — приближенное аналитическое решение (11), 2, 4 — численное решение первого уравнения (10); 1, 2 — нижняя точка притяжения трубы ($\theta_1 = 0$), 3, 4 — верхняя точка притяжения трубы ($\theta_1 = \pi$); вертикальная штриховая линия — $a/R^2 = 0,426$

Для труб размером $R/h \geq 10$ можно принять значение $W_0/R \approx \sqrt{2(p-1)}$. Будем считать, что наибольшее значение W_0 есть величина порядка диаметра трубы: $W_0/(2R) \sim \sqrt{(p-1)/2}$.

На рис. 2 приведена зависимость относительного прогиба W_0/R от безразмерного параметра внутреннего давления $A = a/R^2$. Расчеты проводились для трубы, имеющей следующие размеры: $L = 2$ м, $R = 0,02$ м, $h = 0,0005$ м, материал трубы — магниевый сплав, армированный проволокой из инструментальной стали ($E = 0,64 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 2400$ кг/м³). Труба заполнена метаном ($p_0 = 1,98$ МПа, $\rho_0 = 64,8$ кг/м³), кольцевые напряжения равны $\sigma_\theta = p_0 R/h = 79,2$ МПа, предел прочности материала $\sigma_s = 600$ МПа. Значения коэффициентов кубического уравнения (10) для рассматриваемого случая равны $a/R^2 = 0,426$, $b/R^3 = 0,059$. Из рис. 2 следует, что приближенное решение (11) удовлетворительно описывает деформацию трубы.

Представляет интерес оценка величин k^2 и W_0^2 , характеризующих влияние на общее движение вращения трубопровода вокруг своей оси и вокруг прямой, проходящей через опоры. При этом значения статической составляющей прогиба W_0 могут быть определены по формулам (11) или (12). В первом случае отношение k^2/W_0^2 , выраженное через входные параметры, имеет громоздкий вид, поэтому в данной работе не приводится. Во втором случае с учетом (2), (4), (12) имеем

$$\frac{k^2}{W_0^2} = \frac{\rho h(2R + h)}{(p-1)[\rho_0 R^2 + \rho h(2R + h)]}. \quad (13)$$

На рис. 3 представлена зависимость параметра k^2/W_0^2 от отношения p внутреннего и критического давлений. Видно, что с увеличением внутреннего давления значение k^2/W_0^2 уменьшается. Такая закономерность наблюдается как при $\theta_1 = 0$ (кривая 1), так и при $\theta_1 = \pi$ (кривая 3), а также в случае расчета по формуле (13). Более того, при достижении значения $p \approx 1,5$ кривые 1–3 практически сливаются и стремятся к горизонтальной асимптоте. При $p < 1,8$ рассматриваемая система является скорее физическим маятником, чем математическим. При этом вклад вращения вокруг собственной оси трубы в общий

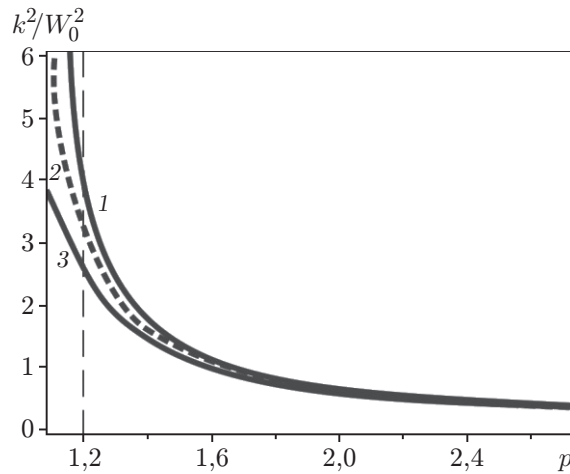


Рис. 3. Зависимость параметра k^2/W_0^2 от отношения p внутреннего и критического давлений:

1, 3 — приближенное аналитическое решение (11) (1 — верхнее положение трубопровода, 3 — нижнее положение трубопровода), 2 — расчет по формуле (13); вертикальная штриховая линия — $p_0 = 1,98$ МПа

момент инерции в четвертом уравнении (7) становится больше вклада вращения трубы относительно прямой, проходящей через опоры $\left(k^2 L > 2 \int_0^L w^2 dx, \text{ т. е. } k > W_0\right)$.

Представляет интерес исследование возможности одновременного выполнения условия $p > 1$ и условия прочности трубопровода по кольцевым напряжениям σ_θ . Согласно (11) данные условия определяются неравенствами $p_0 > p_* = \beta^2 EJ/F_0$, $\sigma_\theta = pp_* R/h < \sigma_s$, где σ_s — предел прочности материала трубы. Из этих неравенств с учетом принятых выше обозначений получаем

$$p < \frac{4\sigma_s h L^2}{\pi^2 E R^3} \left[\left(1 + \frac{h}{R}\right)^4 - 1 \right]^{-1}. \quad (14)$$

Согласно (14) для трубы с указанными выше геометрическими и механическими характеристиками наибольшее значение давления $p \approx 9,15$. Таким образом, в соответствии с данным критерием внутреннее давление p_0 может превышать критическое давление p_* в девять раз.

Решением второго уравнения системы (10) является сумма гиперболических функций синуса и косинуса (при $p > 1$). При нулевых начальных условиях это решение тривиальное:

$$W_1 = 0. \quad (15)$$

При установившихся вынужденных колебаниях

$$\dot{W}_{2n} = \Omega W_{2n}, \quad \ddot{W}_{2n} = \Omega^2 W_{2n}, \quad \dot{\theta}_2 = \Omega \theta_2, \quad \ddot{\theta}_2 = \Omega^2 \theta_2. \quad (16)$$

Так как $\theta_2 \ll 1$, то в третьем и четвертом уравнениях системы (10) членами, содержащими функции $\dot{\theta}_2^2$, можно пренебречь. Исключив из рассмотрения резонансные режимы, согласно (15), (16) имеем

$$\pi n (\ddot{W}_{2n} + k_n^2 W_{2n}) = -4s_0 \Omega^2 \cos \theta_1 \sin(\Omega t), \quad \pi \ddot{W}_{21} = -4s_0 \Omega^2 \cos \theta_1 \sin(\Omega t), \quad (17)$$

$$k_n^2 = \omega_n^2 (n^2 - p).$$

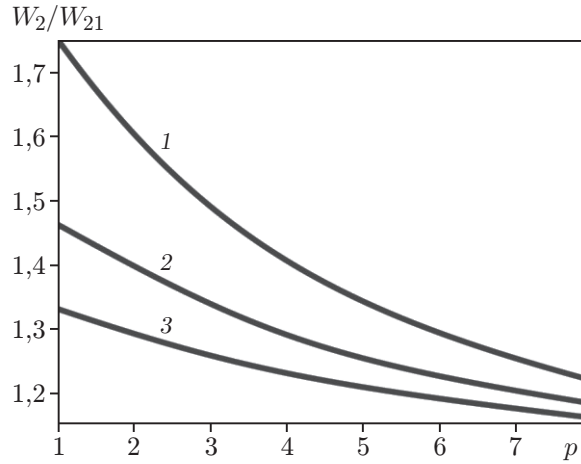


Рис. 4. Зависимость величины W_2/W_{21} от параметра p при $\omega_1 = 147,4$ рад/с:
 1 — $\Omega = 4000$ рад/с, 2 — $\Omega = 4200$ рад/с, 3 — $\Omega = 4400$ рад/с

Решения уравнений (17) имеют вид

$$W_{21} = \frac{4s_0 \cos \theta_1}{\pi} \sin(\Omega t), \quad W_{2n} = \frac{\Omega^2 W_{21}}{n(\Omega^2 - k_n^2)} + V_n(\theta_1, t), \quad (18)$$

где V_n — общие решения однородных уравнений (17), зависящие от начальных условий. Решения (18) описывают собственные колебания с частотами k_n , затухающие со временем при наличии трения. Поэтому далее величина V_n не учитывается.

В середине пролета отношение W_2/W_{21} согласно (18) представляется в виде суммы

$$\frac{W_2}{W_{21}} = 1 + \sum_{n=3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2} \Omega^2}{n[\Omega^2 - n^2(n^2 - p)\omega_1^2]}. \quad (19)$$

На рис. 4 представлена зависимость (19) от параметра p внутреннего давления при $\omega_1 \approx 147,4$ рад/с. В (19) учтены слагаемые с номерами $n = 3, 5, 7$. Из (19) следует, что амплитуда W_2 суммарного прогиба имеет порядок амплитуды W_{21} .

Преобразуем четвертое уравнение системы (7). Используя (8), (9), (18), вычисляем интегралы

$$J_1 = \int_0^L w dx = \frac{2L}{\pi} [W_0 + W_{21}(1 + S_1)], \quad S_1 = \sum_{n=3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n(1 - f(n))},$$

$$J_2 = \int_0^L \dot{w} w dx = \frac{2Ls_0\Omega \cos \theta_1 \cos(\Omega t)}{\pi} [W_0 + W_{21}(1 + S_2)], \quad f(n) = \frac{n^2(n^2 - p)\omega_1^2}{\Omega^2}, \quad (20)$$

$$J_3 = \int_0^L w^2 dx = \frac{L}{2} [W_0^2 + 2W_0W_{21} + W_{21}^2(1 + S_2)], \quad S_2 = \sum_{n=3,5,\dots} \frac{1}{n^2(1 - f(n))^2}.$$

Поскольку образованные в (20) ряды S_1, S_2 сходящиеся и $s_0/W_0 \ll 1, W_{21}/W_0 \ll 1$, имеем

$$\pi J_1 \approx 2LW_0, \quad \pi J_2 \approx 2LW_0s_0\Omega \cos \theta_1 \cos(\Omega t), \quad 2J_3 \approx LW_0^2. \quad (21)$$

Таким образом, в выражении $W = W_0 + W_1 + \sum_{n=1,3,\dots} W_{2n}$ в соответствии с (15) $W_1 = 0$, сумма мала по сравнению с W_0 . Поэтому в (7) при вычислении члена $T(\partial^2 w / \partial x^2)$ сумму w можно заменить ее составляющей w_0 .

Подставляя (20), (21) в последнее уравнение (7) и пренебрегая в силу (16) вторым членом в его левой части, получаем

$$\pi(k^2 + W_0^2)\ddot{\theta}_2 = 4W_0(\Omega^2 s_0 \sin(\Omega t) - g)(\sin \theta_1 + \theta_2 \cos \theta_1). \quad (22)$$

Применение метода Капицы. Следуя работе [1], уравнение (22) разбиваем на два уравнения

$$\pi(k^2 + W_0^2)\ddot{\theta}_2 = 4W_0(s_0\Omega^2 \sin \theta_1 \sin(\Omega t) - g\theta_2 \cos \theta_1); \quad (23)$$

$$-4W_0(s_0\Omega^2 \cos \theta_1 \langle \theta_2 \sin(\Omega t) \rangle - g \sin \theta_1) = 0, \quad (24)$$

где угловые скобки обозначают операцию осреднения по времени за период $2\pi/\Omega$.

Вследствие большой частоты возбуждения Ω из (23) получаем приближенное дифференциальное уравнение и его решение

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{4W_0 s_0 \Omega^2 \sin \theta_1}{\pi(k^2 + W_0^2)} \sin(\Omega t), \quad \theta_2 = -\frac{4W_0 s_0 \sin \theta_1}{\pi(k^2 + W_0^2)} \sin(\Omega t). \quad (25)$$

Далее можно оценить члены, отброшенные при определении W_2 и θ_2 . Эти оценки, которые в данной работе не приводятся вследствие их громоздкости, подтверждают приемлемость принятых приближений.

Для того чтобы получить решение в окрестности положений динамического равновесия, подставим (25) в (24). В результате находим

$$\sin \theta_1 [\pi g(k^2 + W_0^2) + 2W_0(s_0\Omega)^2 \cos \theta_1] = 0. \quad (26)$$

Из равенства $\sin \theta_1 = 0$ получаем корни 0 и π , которые представляют собой нижнюю и верхнюю точки притяжения. При $\sin \theta_1 \neq 0$ из равенства нулю выражения в квадратных скобках в (26) с учетом значения W_0 в (11) следует

$$\cos \theta_1 = -\frac{\pi g(W_p + W_g \cos \theta_1)}{2(s_0\Omega)^2} \left(1 + \frac{k^2}{(W_p + W_g \cos \theta_1)^2}\right). \quad (27)$$

Уравнение (27) определяет значение угла θ_1 , при превышении которого изогнутый вверх трубопровод медленно приближается к вертикальному положению (к верхней точке $\theta_1 = \pi$). При меньших значениях θ_1 изогнутый трубопровод приближается к естественному нижнему положению ($\theta_1 = 0$). Применение формулы (27) обосновано при условии $W_p > W_g$, которое было использовано при получении решения (11).

В случае сильной вибрации опор и относительно малой гравитации правая часть (27) существенно меньше единицы и угол θ_1 близок к значению $\pi/2$. Приняв в этом случае $W_p + W_g \cos \theta_1 \approx W_p$ и $\theta_1 = \pi/2 + \varepsilon$, $\varepsilon^2 \ll \pi/2$, $\cos(\pi/2 + \varepsilon) = -\sin \varepsilon \approx -\varepsilon$, из уравнения $\sin \varepsilon = \varepsilon$ находим значение ε . Тогда

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi g W_p}{2(s_0\Omega)^2} \left(1 + \frac{k^2}{W_p^2}\right). \quad (28)$$

Данный случай реализуется, в частности, для вертикального трубопровода при сохранении направления вибрации опор перпендикулярно его оси. При этом области притяжения к точкам 0 и π являются одинаковыми ($0 < \theta_1 < \pi/2$, $\pi/2 < \theta_1 < \pi$).

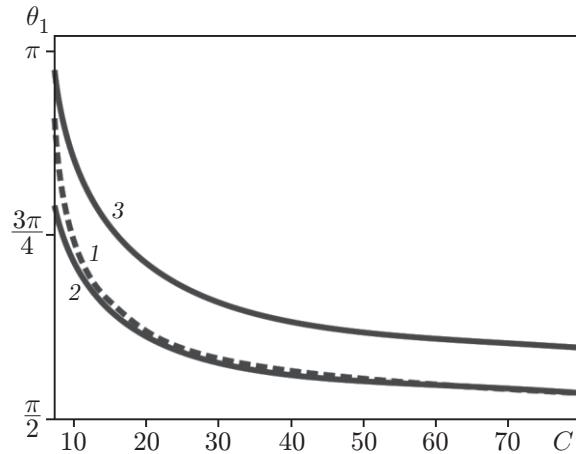


Рис. 5. Зависимость положения трубопровода θ_1 в случае относительно малой гравитации от параметра $C = (s_0\Omega)^2/(gW_p)$, характеризующего деформацию трубопровода и интенсивность колебаний опор:

1 — результаты вычислений по уравнению (27), 2, 3 — результаты вычислений по приближенным формулам (2 — расчет по формуле (28), 3 — расчет по формуле (29))

При относительно слабой вибрации величина θ_1 стремится к верхней точке ($\theta_1 = \pi$) притяжения. Полагая $\theta_1 = \pi - \varepsilon$ и $W_p + W_g \cos \theta_1 \approx W_p - W_g$, $\cos(\pi - \varepsilon) = -\cos \varepsilon \approx -1 + \varepsilon^2/2$, получаем приближение

$$\theta_1 = \pi - \sqrt{2} \left[1 - \frac{\pi g(W_p - W_g)}{(s_0\Omega)^2} \left(1 + \frac{k^2}{(W_p - W_g)^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (29)$$

На рис. 5 приведены зависимости, полученные по формулам (27)–(29). Из этих зависимостей следует, что они удовлетворительно описывают деформацию трубопровода.

Закключение. Процесс изгибания вверх пролета трубопровода между вибрирующими опорами аналогичен движению маятника Капицы. В рассмотренном случае картина осложняется изменением общего прогиба, соответствующего длине маятника, в зависимости от сил гравитации и внутреннего давления, угла качения пролета вокруг оси, проходящей через опоры. Поэтому анализ исследуемого процесса проводится только с помощью простейшей модели.

При вертикальных колебаниях опор рассмотрен случай преобладающего влияния на изгиб внутреннего давления. Предполагалось, что вибрации опор происходят с малой амплитудой по сравнению со статическим прогибом и с собственной частотой, превышающей частоту его изгибных колебаний. В этих условиях общий прогиб в принятом приближении определяется из нелинейного уравнения статического изгиба.

Условие равенства момента распределенных по длине трубопровода сил гравитации и момента сил вибрации опор определяет границу областей притяжения к нижнему и верхнему положениям. Вблизи этой границы влияние на изгиб центробежных и кориолисовых сил незначительно. В рамках принятых приближений высшие формы изгибных колебаний трубопровода не оказывают влияния на положение границы областей притяжения. Предельные размеры областей притяжения имеют место при малой гравитации и сильной вибрации опор или при большой гравитации и слабой вибрации. В случае преобладания веса над распределенной силой, обусловленной внутренним давлением, возможно только нижнее положение равновесия трубопровода. Существенное влияние на поведение системы оказывает критическое значение внутреннего давления, при достижении которого труба между опорами испытывает выпучивание (согласно линейной теории). Необходимым, но

не достаточным условием существования верхнего положения динамического равновесия является превышение внутреннего давления над критическим давлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Капица П. Л.** Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1951. Т. 21. С. 588–597.
2. **Канунников А. Ю., Лампер Р. Е.** Синхронизация хода маятниковых часов, подвешенных на упругой балке // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 5. С. 177–181.
3. **Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П.** Устойчивость вертикального стержня на вибрирующей опоре // Докл. АН. 2018. Т. 482. С. 155–159.
4. **Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H.** Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. Fluids Structures. 1994. V. 8. P. 139–156.
5. **Tang D. M., Ilgamov M. A., Dowell E. H.** Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. Appl. Mech. 1995. V. 62, N 3. P. 595–600.
6. **Panda L. N., Kar R. C.** Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances // J. Sound Vibrat. 2008. V. 309. P. 375–406.
7. **Chen L. Q., Zhang Y. L., Zhang G. C., Ding H.** Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // Intern. J. Nonlinear Mech. 2014. V. 58. P. 11–21.
8. **Li S., Karney B. W., Liu G.** FSI research in pipeline systems: A review of the literature // J. Fluids Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.
9. **Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М.** Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.
10. **Luczko J., Czerwinski A.** Nonlinear three-dimensional dynamics of flexible pipes conveying fluids // J. Fluids Structures. 2017. V. 70. P. 235–260.
11. **Yan H., Dai H., Ni Q., et al.** Nonlinear dynamics of a sliding pipe conveying fluid // J. Fluids Structures. 2018. V. 81. P. 36–57.
12. **Латифов Ф. С., Мехтиева М. А.** Нелинейные параметрические колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с наполнителем // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 4. С. 195–203.
13. **Ильгамов М. А., Шакирьянов М. М.** Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний трубопровода // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 6. С. 66–69.
14. **Lu Z. Q., Zhang K. K., Ding H., Chen L. Q.** Nonlinear vibration effects on the fatigue life of fluid-conveying pipes composed of axially functionally graded materials // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 100, N 2. P. 1091–1104.

*Поступила в редакцию 27/V 2021 г.,
после доработки — 24/VIII 2021 г.
Принята к публикации 25/X 2021 г.*