УДК 539.3

В. Д. Бондарь

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

Плоская деформация рассматривается в рамках новожиловского варианта нелинейной упругости. Выводятся уравнения в перемещениях и напряжениях, и устанавливается их эллиптический тип. Показывается, что в этом варианте, как и в линейной упругости, характеристики деформирования представляются через два комплексных потенциала, а сама плоская задача упругости сводится к краевой задаче для потенциалов. Однако в отличие от линейной теории упомянутые представления и краевая задача становятся нелинейными. Указывается динамическое условие, при котором линейная теория вытекает из нелинейной. Дается аналитическое решение одной из задач, а также развивается общий метод решения нелинейной краевой задачи.

1. При исследовании многих актуальных механических проблем линейная теория упругости уже не обеспечивает требуемую точность и ее заменяют нелинейной теорией. Нелинейность связывают как с законом механического поведения материала (физическая нелинейность), так и с особенностями деформирования (геометрическая нелинейность). К числу последних относится нелинейная теория упругости, развитая В. В. Новожиловым [1]. В ней полагается, что повороты и удлинения-сдвиги элементов материала малы по сравнению с единицей и что первые из них могут значительно превосходить вторые. Подобная ситуация реализуется в ряде случаев, в частности при деформировании гибких тел: стержней, пластин и оболочек. Принятые допущения позволяют упростить общее нелинейное представление деформаций через удлинения-сдвиги и повороты и придать ему специальный нелинейный вид.

Статическая задача в новожиловском варианте упругости описывается уравнениями равновесия, законом Гука и специальной нелинейной связью деформаций с поворотами и удлинениями-сдвигами, представлениями последних величин через перемещения, а также краевыми условиями, задающими перемещения на одной части Σ_u поверхности деформированного тела и напряжения на другой его части Σ_p:

$$\operatorname{div} P + \mathbf{f} = 0, \tag{1.1}$$

$$P = \lambda\varepsilon_1 G + 2\mu\varepsilon, \quad \varepsilon_1 = \operatorname{tr}\varepsilon, \quad \lambda = \mathrm{const}, \quad \mu = \mathrm{const},$$

$$2\varepsilon = 2e + \omega\cdot\omega, \quad 2e = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^*, \quad 2\omega = \nabla\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})^*;$$

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_u} = \mathbf{h}, \quad P\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_p} = \mathbf{p}. \tag{1.2}$$

Здесь λ, μ — коэффициенты упругости; $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{n}$ — векторы перемещений, плотности объемных сил, граничных перемещений и напряжений и внешней нормали; G, P, ε, e, ω, $\nabla\mathbf{u}$, $(\nabla\mathbf{u})^*$ — метрический тензор и тензоры напряжений, деформаций, удлинений-сдвигов, поворотов, градиент и транспонированный градиент перемещений.

При плоской деформации цилиндрического тела основной является плоская задача, в которой уравнения (1.1) выполняются в плоской области S, а условия (1.2) — на ее границе L. В декартовых координатах x, y деформированного состояния соотношения (1.1), (1.2) (при потенциальных силах с энергией V) имеют вид

$$\frac{\partial (P_{xx} - V)}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial (P_{yy} - V)}{\partial y} = 0, \tag{1.3}$$

$$P_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad P_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy}, \quad P_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy},$$

$$2\varepsilon_{xx} = 2e_{xx} - \omega_{xy}^2, \quad 2\varepsilon_{yy} = 2e_{yy} - \omega_{xy}^2, \quad \varepsilon_{xy} = e_{xy},$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad 2e_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad 2\omega_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y};$$

(1.4)
$$u_x|_{L_u} = h_x(s), \quad u_y|_{L_u} = h_y(s),$$

$$P_{xx}\frac{dy}{ds} - P_{xy}\frac{dx}{ds}\Big|_{L_p} = p_x(s), \quad P_{yx}\frac{dy}{ds} - P_{yy}\frac{dx}{ds}\Big|_{L_p} = p_y(s),$$

где L_u, L_p — части границы L, на которых заданы соответственно перемещения и напряжения; декартовы компоненты векторов и тензоров обозначены теми же символами, что и сами величины, но с буквенными индексами; кроме того, учтено, что компоненты нормали определяются через уравнения контура L $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s — дуга L) формулами $n_x = dy/ds$, $n_y = -dx/ds$.

Плоскую деформацию можно описывать также в комплексных координатах $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ (рассматриваемых в качестве независимых переменных), в которых система (1.3), (1.4) становится более компактной. Для этого следует перейти к дифференцированию по комплексным переменным согласно формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

и использовать, например, контравариантные комплексные компоненты векторов и тензоров (обозначаемые прежними символами с верхними числовыми индексами), которые связаны с декартовыми компонентами соответствующих величин обычными формулами преобразования компонентов, имеющими вид

$$u^1 = \overline{u^2} = u = u_x + iu_y,$$
$$h^1 = \overline{h^2} = h = h_x + ih_y, \quad p^1 = \overline{p^2} = p = p_x + ip_y,$$
$$P^{11} = \overline{P^{22}} = P_{xx} - P_{yy} + 2iP_{xy}, \quad P^{12} = P_{xx} + P_{yy},$$
$$\varepsilon^{11} = \overline{\varepsilon^{22}} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + 2i\varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon^{12} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy},$$
$$e^{11} = \overline{e^{22}} = e_{xx} - e_{yy} + 2ie_{xy}, \quad e^{12} = e_{xx} + e_{yy},$$
$$\omega^{11} = \overline{\omega^{22}} = 0, \quad \omega^{21} = \overline{\omega^{12}} = 2i\omega_{xy}.$$

В итоге соотношения (1.3), (1.4) в комплексных координатах соответственно будут

(1.5)
$$\frac{\partial P^{11}}{\partial z} + \frac{\partial (P^{12} - 2V)}{\partial \bar{z}} = 0, \quad P^{11} = \overline{P^{22}} = 2\mu\varepsilon^{11}, \quad P^{12} = 2(\lambda + \mu)\varepsilon^{12},$$

$$\varepsilon^{11} = \overline{\varepsilon^{22}} = e^{11}, \quad \varepsilon^{12} = e^{12} + \frac{1}{4}(\omega^{21})^2,$$

$$e^{11} = \overline{e^{22}} = 2\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \quad e^{12} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}, \quad \omega^{21} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}};$$

(1.6)
$$u|_{L_u} = h(s), \quad P^{12}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar{z}}{ds}\Big|_{L_p} = 2ip(s).$$

2. Пусть на границе плоской области заданы одни перемещения ($L_u = L$), тогда плоскую задачу удобно решать в перемещениях. Задача в перемещениях в декартовых координатах следует из (1.3), (1.4) после исключения из них других неизвестных величин:

(2.1)
$$\Phi_1 = 2(1 - \nu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \omega_{xy}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (1 - 2\nu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \omega_{xy}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{1 - 2\nu}{\mu}\frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

$$\Phi_2 = 2(1 - \nu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} - \omega_{xy}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + (1 - 2\nu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \omega_{xy}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} - \frac{1 - 2\nu}{\mu}\frac{\partial V}{\partial y} = 0;$$

(2.2)
$$u_x|_L = h_x(s), \quad u_y|_L = h_y(s).$$

Здесь ω_{xy} определяется через перемещения выражением (1.3); $\nu = \lambda / /(2(\lambda + \mu))$ — коэффициент Пуассона. Квазилинейная система (2.1) обобщает систему уравнений Ламе линейной упругости.

Для исследования типа (2.1) положим $x_1 = x$, $x_2 = y$, $w_1 = u_x$, $w_2 = u_y$ и составим, следуя [2], характеристический определитель

$$\Delta_* = \det (A_{\alpha\beta}), \quad A_{\alpha\beta} = \sum_{k_1+k_2=2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \left\{ \dfrac{\partial^2 v_\beta}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right\}} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \tag{2.3}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2).$$

Согласно (2.1) и (2.3), элементы определителя и его величина имеют вид

$$A_{11} = 2(1-\nu)\sigma_1^2 + \omega_{xy}\sigma_1\sigma_2 + (1-2\nu)\sigma_2^2, \quad A_{12} = -\omega_{xy}\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2,$$

$$A_{22} = 2(1-\nu)\sigma_2^2 - \omega_{xy}\sigma_1\sigma_2 + (1-2\nu)\sigma_1^2, \quad A_{21} = \omega_{xy}\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2,$$

$$\Delta_* = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 2(1-\nu)(1-2\nu)(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2.$$

Так как коэффициент Пуассона изменяется в интервале $0 < \nu < 0{,}5$, то $\Delta_* > 0$. Следовательно, характеристическое уравнение $\Delta_* = 0$ не имеет вещественных корней. Тем самым квазилинейная система (2.1) подобно системе Ламе линейной упругости является эллиптической и для нее корректна краевая задача (2.1), (2.2).

Задача в перемещениях в комплексных переменных может быть получена из соотношений (1.5), (1.6) аналогичным путем и имеет вид

$$2(1-2\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar z} + \frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\right)^2 - \frac{1-2\nu}{\mu} V\right] = 0; \tag{2.4}$$

$$u|_L = h(s). \tag{2.5}$$

Уравнение (2.4) допускает полное интегрирование. Действительно, после интегрирования по $\bar z$ оно приводит к выражению, содержащему произвольную функцию $\varphi'(z)$:

$$(3-4\nu)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\right)^2 - \frac{1-2\nu}{\mu} V = 4\frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{\mu}\varphi'(z).$$

Вычитание и сложение этого выражения с комплексно-сопряженным ему равенством дает соотношения

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\right) = 2(1-\nu)\left[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}\right],$$

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\right) = (1-2\nu)\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] - \frac{1-\nu}{2\mu}\left[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}\right]^2 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} V,$$

определяющие производную $\partial u / \partial z$ в виде

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial z} = \varkappa\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} - \alpha\left[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}\right]^2 + \frac{c}{2} V, \tag{2.6}$$

$$\varkappa = 3-4\nu, \quad \alpha = \frac{1-\nu}{2\mu}, \quad c = \frac{1-2\nu}{1-\nu}.$$

Это равенство можно представить как неоднородное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{2\mu u - \varkappa\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \alpha\left[z\overline{\varphi}'^2(\bar z) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \int \varphi'^2(z)\,dz\right]\right\} = \frac{c}{2} V,$$

общим решением которого будет [3]

$$2\mu u = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{c}{2} W(z, \bar z) - \tag{2.7}$$

$$- \alpha\left[z\overline{\varphi}'^2(\bar z) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \int \varphi'^2(z)\,dz\right],$$

где $\psi(z)$ — произвольная функция, а величина W при кусочно-гладком контуре L и гельдеровой функции V определяется выражением [4]

$$W(z,\bar z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_S \frac{V(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\zeta-\bar z}, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{2.8}$$

В случае бесконечной области потенциальная энергия в (2.8) должна обладать свойством

$$V = O(1/|\zeta|^{1+\beta}), \quad \beta > 0 \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty.$$

Для производных функции W справедливы формулы, в которых интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [4]:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = V, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar z} = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_S \frac{V(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{(\zeta-\bar z)^2}. \tag{2.9}$$

Формула (2.7) определяет перемещение через две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — комплексные потенциалы. Подстановка (2.7) в (1.5) приводит к представлениям через потенциалы других характеристик напряженно-деформированного состояния:

$$P^{11} = \bar P^{22} = -2\,[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}] + cW_{\bar z} - 4\alpha\overline{\varphi''(z)}\,[z\overline{\varphi'(z)} - \varphi(z)], \tag{2.10}$$

$$P^{12} = 2\,[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + kW_z + 2\alpha\,[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}]^2, \quad k = 1/(1-\nu);$$

$$\mu e^{11} = \mu\overline{e^{22}} = -z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + \frac{c}{2}W_{\bar z} - 2\alpha\overline{\varphi''(z)}\,[z\overline{\varphi'(z)} - \varphi(z)], \tag{2.11}$$

$$\mu e^{12} = (1-2\nu)\,[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \frac{c}{2}W_z - \alpha\,[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}]^2,$$

$$\mu\omega^{21} = 2(1-\nu)\,[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}],$$

а в условие на контуре (2.5) — к краевой задаче для самих потенциалов:

$$\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \alpha\,[z\bar\varphi'^2(\bar z) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \tag{2.12}$$

$$+ \int \varphi'^2(z)\,dz]\big|_L = h_0(s), \quad h_0(s) = 2\mu h(s) - \frac{c}{2}W(s).$$

Таким образом, в новожиловском варианте нелинейной упругости (как и в линейной теории) перемещения, напряжения, деформации, удлинения-сдвиги и повороты представляются через комплексные потенциалы, определяемые из краевой задачи. Представления (2.7)—(2.12) нелинейны относительно потенциалов. Их структура такова, что наряду с нелинейными членами они содержат также линейные части, совпадающие с соответствующими выражениями в формулах Колосова линейной упругости [5]; тем самым установленные выражения являются обобщением формул Колосова.

Из вида краевого условия (2.12) заключаем, что члены, обусловленные объемными силами, не содержат потенциалов, поэтому наличие объемных сил не меняет типа краевой задачи.

3. Будем считать, что на всей границе области заданы одни напряжения ($L_p = L$), и рассмотрим плоскую задачу в напряжениях и поворотах.

Выражения (1.5) для компонентов напряжений и поворота позволяют выразить градиенты перемещения по формулам

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{2}P^{12} + \mu\omega^{21}\left(1 - \frac{\omega^{21}}{4}\right), \quad 2\mu\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}P^{11}. \tag{3.1}$$

Легко видеть, что условие совместности этой системы дает уравнение совместности напряжений и поворотов. Последнее вместе с уравнением равновесия (1.5) образует замкнутую квазилинейную систему двух комплексных уравнений первого порядка для комплексного и вещественного напряжений P^{11}, P^{12} и чисто мнимого поворота ω^{21}; присоединение к уравнениям силового краевого условия (1.6) и дает краевую задачу для напряжений и поворота:

$$\frac{\partial P^{11}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[(1-2\nu)P^{12} + 2\mu\omega^{21}\left(1-\frac{1}{4}\omega^{21}\right)\right] = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial P^{11}}{\partial z} + \frac{\partial (P^{12}-2V)}{\partial \bar{z}} = 0;$$

$$P^{12}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar{z}}{ds}\Big|_L = 2ip(s). \tag{3.3}$$

Система (3.2) также допускает полное интегрирование. Действительно, исключение из уравнений напряжения P^{11} приводит к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[P^{12} - kV + \frac{1}{2\alpha}\omega^{21}\left(1-\frac{1}{4}\omega^{21}\right)\right] = 0,$$

которое после интегрирования принимает вид

$$P^{12} - kV + \frac{1}{2\alpha}\omega^{21}\left(1-\frac{1}{4}\omega^{21}\right) = 4\varphi'(z), \tag{3.4}$$

где $\varphi'(z)$ — произвольная функция — комплексный потенциал, а параметры k и α определены формулами (2.6) и (2.10). Отделяя в (3.4) действительную и мнимую части, получаем соотношения

$$P^{12} - kV - \frac{1}{8\alpha}(\omega^{21})^2 = 2\,[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad \frac{1}{2\alpha}\omega^{21} = 2\,[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}],$$

которые и определяют вещественное напряжение и чисто мнимый поворот в зависимости от комплексного потенциала

$$P^{12} = 2\,[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + 2\alpha\,[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}]^2 + kV; \tag{3.5}$$

$$\mu\omega^{21} = 2\,(1-\nu)\,[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}]. \tag{3.6}$$

С учетом выражений (2.9) и (3.5) уравнение равновесия (3.2) становится уравнением для комплексного напряжения P^{11}:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\{P^{11} + 2z\overline{\varphi''(z)} + 4\alpha\overline{\varphi''(z)}\,[z\overline{\varphi'(z)} - \varphi(z)] - cW_{\bar{z}}\} = 0$$

и после интегрирования определяет его в виде

$$P^{11} = -2\,[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}] - 4\alpha\overline{\varphi''(z)}\,[z\overline{\varphi'(z)} - \varphi(z)] + cW_{\bar{z}}, \tag{3.7}$$

где $\psi'(z)$ — произвольная функция; параметр c и функция W определены выражениями (2.6) и (2.8). Формулы (3.5)—(3.7) совпадают с формулами (2.10) и (2.11) для напряжений и поворота, полученными ранее другим способом.

С учетом (3.5) и (3.7) краевое условие (3.3) допускает представление

$$\frac{d}{ds}\Big\{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} - \frac{c}{2}W(z,\bar{z}) +$$

$$+ \alpha\,[z\overline{\varphi}'^2(\bar{z}) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \int \varphi'^2(z)\,dz]\Big\}\Big|_L = ip - V\frac{dz}{ds}$$

и после интегрирования вдоль контура дает

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \alpha\,[z\overline{\varphi}'^2(\bar{z}) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \int \varphi'^2(z)\,dz]|_L = g(s), \tag{3.8}$$

$$g(s) = \int_0^s \left(ip - V\frac{dz}{ds}\right) ds + \frac{c}{2}W(s) + \text{const}.$$

Таким образом, при решении задачи в напряжениях и поворотах плоская задача упругости также сводится к нелинейной краевой задаче для комплексных потенциалов. Эта задача аналогична (2.12) при задании граничных перемещений, и ее тип также не зависит от наличия объемных сил. Задача (3.8) только нелинейными членами отличается от соответствующей задачи линейной упругости [4].

Полагая напряжения и поворот определенными формулами (3.5)—(3.7), можем рассматривать (3.1) в качестве уравнений для перемещений. Условия совместности этой системы выполнены — это первое равенство (3.2), поэтому дифференциал перемещения запишется в форме

$$2\mu du = \left[\frac{1-2\nu}{2}P^{12} + \mu\omega^{21}\left(1 - \frac{1}{4}\omega^{21}\right)\right] dz + \frac{1}{2}P^{11}d\bar{z} =$$

$$= d\left\{\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \alpha\,[z\bar{\varphi}'^2(\bar{z}) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \int\varphi'^2(z)\,dz] + \frac{c}{2}W(z,\bar{z})\right\}.$$

Отсюда интегрированием устанавливаем, что само перемещение определяется через потенциалы выражением

(3.9) $$2\mu u = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{c}{2}W(z,\bar{z}) -$$
$$- \alpha\,[z\bar{\varphi}'^2(\bar{z}) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \int\varphi'^2(z)\,dz] + \mathrm{const},$$

которое отличается от (2.7) только несущественной аддитивной постоянной. Таким образом, если граничными напряжениями потенциалы определены, то перемещения определяются ими с точностью до трансляции тела как жесткого целого.

Разновидностью задачи для поворота и напряжений (3.2), (3.3) является задача для поворота и функции напряжений. Если представить напряжения через вещественную функцию напряжений U по формулам

(3.10) $$P^{11} = \overline{P^{22}} = -4\frac{\partial^2 U}{\partial\bar{z}^2}, \quad P^{12} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}} + 2V,$$

то уравнение равновесия удовлетворится тождественно, а остальные соотношения дадут следующую краевую задачу для функции напряжений и поворота:

(3.11) $$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}} + cV + \frac{1}{2\alpha}\omega^{21}\left(1 - \frac{1}{4}\omega^{21}\right)\right] = 0;$$

(3.12) $$2\left.\frac{\partial U}{\partial\bar{z}}\right|_L = 2\left(\frac{\partial U}{\partial\bar{z}}\right)_0 + \int_0^s\left(ip - V\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

Здесь $(U_{\bar{z}})_0$ — значение производной при $s = 0$; параметры α и c определены в (2.6).

Задача (3.11), (3.12) также может быть сведена к краевой задаче для комплексных потенциалов. Действительно, интегрирование уравнения (3.11) приводит к равенству выражения, стоящего в квадратных скобках, произвольной функции $4\varphi'(z)$ и после отделения в нем действительной и мнимой частей дает

(3.13)
$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}} + cV - \frac{1}{8\alpha}(\omega^{21})^2 = 2\,[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad \omega^{21} = 4\alpha\,[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}].$$

Полученная формула для поворота совпадает с (2.11). С учетом выражения для ω^{21}, а также известного [4] представления потенциальной энергии через комплексную и вещественную функции W, K

(3.14) $$V = \frac{\partial W}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial\bar{z}}, \quad K = \frac{1}{\pi}\iint_S V(\xi,\eta)\ln|\zeta - z|\,d\xi d\eta$$

первое равенство (3.13) становится уравнением для функции напряжений

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - c\frac{\partial^2 K}{\partial z \partial \bar{z}} + \alpha\,[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}\,]^2,$$

определяющим ее через потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \int \psi(z)\,dz + \overline{\int \psi(z)\,dz} - cK(z, \bar{z}) + \tag{3.15}$$
$$+ \alpha\,[\bar{z}\int \varphi'^2(z)\,dz + z\int \bar{\varphi}'^2(\bar{z})\,d\bar{z} - 2\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\,].$$

Таким образом, функция напряжений нелинейным образом определяется через комплексные потенциалы. Заметим, что линейная относительно потенциалов часть (3.15) совпадает с выражением функции напряжений в линейной упругости [6]. Легко видеть, что определенные по функции (3.15) напряжения (3.10) совпадают с выражениями (2.10) этих величин, а краевое условие (3.12) — с условием (3.8).

Обобщенные перемещения, повороты и удлинения-сдвиги (2.7), (2.11) $U^\alpha = \mu u^\alpha$, $\Omega^{\alpha\beta} = \mu\omega^{\alpha\beta}$, $\bar{E}^{\alpha\beta} = \mu e^{\alpha\beta}$, подобно напряжениям (2.10), определяются через одни и те же потенциалы и, следовательно, являются конечными величинами. Пусть l_0 и P_0 — характерные длина и напряжение, а $\sigma = P_0/\mu$ — характерное безразмерное напряжение. Сопоставим рассматриваемым величинам соответствующие безразмерные величины, отмечаемые звездочкой, согласно формулам

$$U^\alpha = l_0 P_0 U^\alpha_*, \quad W = l_0 P_0 W_*,$$
$$P^{\alpha\beta} = P_0 P^{\alpha\beta}_*, \quad p^\alpha = P_0 p^\alpha_*, \quad V = P_0 V_*,$$
$$U = l_0^2 P_0 U_*, \quad K = l_0^2 P_0 K_*, \quad \Omega^{\alpha\beta} = P_0 \Omega^{\alpha\beta}_*,$$
$$\varphi' = P_0 \varphi'_*, \quad \psi' = P_0 \psi'_*, \quad z = l_0 z_*, \quad s = l_0 s_*.$$

Тогда соотношения задачи для функции напряжений и поворота (3.10)—(3.12) и представления искомых величин через потенциалы (3.13), (3.14) в безразмерных переменных примут вид

$$P^{11}_* = \overline{P^{22}_*} = -4\frac{\partial^2 U_*}{\partial \bar{z}_*^2}, \quad P^{12}_* = 4\frac{\partial^2 U_*}{\partial z_* \partial \bar{z}_*} + 2V_*, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_*}\left[4\frac{\partial^2 U_*}{\partial z_* \partial \bar{z}_*} + cV_* + \frac{\Omega^{21}_*}{1-\nu}\left(1 - \frac{\sigma}{4}\Omega^{21}_*\right)\right] = 0,$$

$$\left.\frac{\partial U_*}{\partial \bar{z}_*}\right|_L = \left(\frac{\partial U_*}{\partial \bar{z}_*}\right)_0 + \int_0^{s_*}\left(ip_* - V_*\frac{dz_*}{ds_*}\right)ds_*, \quad \Omega^{21}_* = 2(1-\nu)(\varphi'_* - \bar{\varphi}'_*),$$

$$U_* = \operatorname{Re}\left[\bar{z}\varphi_* + \int \psi_* dz_* - \frac{c}{2}K_* + \sigma\frac{1-\nu}{2}\left(\bar{z}_*\int \varphi'^2_* dz_* - \varphi_*\bar{\varphi}_*\right)\right].$$

Полагая, что безразмерные функции конечны по модулю, а параметр σ весьма мал по сравнению с единицей, можем в (3.16) пренебречь слагаемыми, содержащими этот множитель как малыми по модулю величинами по сравнению с другими членами. В итоге получим соотношения в размерной форме

$$P^{11} = \overline{P^{22}} = -4\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}, \quad P^{12} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + 2V,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + cV + \frac{\mu\Omega^{21}}{1-\nu}\right] = 0,$$

$$2\left.\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right|_L = 2\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right)_0 + \int_0^s\left(ip - V\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

$$\Omega^{21} = 2(1-\nu)(\varphi' - \bar{\varphi}'), \quad U = \operatorname{Re}\left(\bar{z}\varphi + \int \psi dz - \frac{c}{2}K\right),$$

совпадающие с известными формулами линейной упругости [5, 6].

Из (2.7) и (2.11) можно установить также, что в выражениях для безразмерных величин U^{α}_{*}, $E^{\alpha\beta}_{*}$ и $\Omega^{\alpha\beta}_{*}$ при весьма малом σ также допустимо пренебречь нелинейными членами, содержащими множитель σ, после чего они принимают тот же вид, что и в линейной упругости. Таким образом, результаты линейной теории вытекают из результатов данной нелинейной модели при весьма малых σ, т. е. при характерных напряжениях, весьма малых по сравнению с упругой постоянной материала.

Будем считать, что S является односвязной конечной (или бесконечной) областью. Отобразим ее конформно на внутренность D (или внешность D') единичного круга с окружностью γ с помощью функции

$$z = w(\zeta), \quad w'(\zeta) \neq 0, \quad \zeta = r\exp(i\theta) \in D. \tag{3.17}$$

Тогда комплексные потенциалы примут вид

$$\varphi(z) = \varphi(\zeta), \quad \Phi(z) = \varphi'(z) = \varphi'(\zeta)/w'(\zeta) = \Phi(\zeta), \quad \Phi'(z) = \varphi''(z) = \Phi'(\zeta)/w'(\zeta),$$
$$\psi(z) = \psi(\zeta), \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \psi'(\zeta)/w'(\zeta) = \Psi(\zeta),$$

а перемещение (2.7), напряжения (2.10), поворот и удлинения-сдвиги (2.11) (при отсутствии объемных сил) соответственно будут

$$2\mu u = \varkappa\varphi(\zeta) - w(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} - \alpha\,[w(\zeta)\,\overline{\Phi}^2(\overline{\zeta}) - \tag{3.18}$$
$$-2\varphi(\zeta)\,\overline{\Phi(\zeta)} + \int \Phi(\zeta)\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta\,],$$
$$P^{11} = \overline{P^{22}} = -\frac{2}{\overline{w'(\zeta)}}\left\{w(\zeta)\,\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\psi'(\zeta)} + 2\alpha\overline{\Phi'(\zeta)}\,[w(\zeta)\,\overline{\Phi(\zeta)} - \varphi(\zeta)\,]\right\},$$
$$P^{12} = 2\,[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\,] + 2\alpha\,[\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)}\,]^2,$$
$$\mu\omega^{21} = 2(1-\nu)\,[\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)}\,],$$
$$2\mu e^{11} = 2\mu\overline{e^{22}} = P^{11}, \quad 2\mu e^{12} = (1-2\nu)\,P^{12} - \mu\,(\omega^{21})^2/2.$$

В силу (3.17) полярные координаты r, θ плоскости ζ — ортогональные криволинейные координаты в плоскости z. Физические компоненты перемещений и напряжений в этих координатах связаны с комплексными компонентами формулами [4]

$$u_r + iu_\theta = \frac{\overline{\zeta}}{|\zeta|}\,\frac{\overline{w'(\zeta)}}{|w'(\zeta)|}\,u, \tag{3.19}$$
$$P_{rr} - P_{\theta\theta} + 2iP_{r\theta} = \frac{\overline{\zeta}}{\zeta}\,\frac{\overline{w'(\zeta)}}{w'(\zeta)}\,P^{11}, \quad P_{rr} + P_{\theta\theta} = P^{12}.$$

При отображении (3.17) краевые задачи для потенциалов при задании граничных перемещений (2.12) или граничных напряжений (3.8) принимают соответственно вид задач на окружности единичного круга:

$$\varkappa\varphi(\tau) - w(\tau)\,\overline{\varphi'(\tau)}/\overline{w'(\tau)} - \overline{\psi(\tau)} - \alpha N(\varphi(\tau), \overline{\varphi(\tau)}) = h_0(\tau); \tag{3.20}$$
$$\varphi(\tau) + w(\tau)\,\overline{\varphi'(\tau)}/\overline{w'(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} + \alpha N(\varphi(\tau), \overline{\varphi(\tau)}) = g_0(\tau).$$

Здесь

$$N(\varphi(\tau), \overline{\varphi(\tau)}) = w(\tau)\,\frac{\overline{\varphi}'^2(\overline{\tau})}{\overline{w}'^2(\overline{\tau})} - 2\varphi(\tau)\,\frac{\overline{\varphi'(\tau)}}{\overline{w'(\tau)}} + \int \varphi'^2(\tau)\,\frac{d\tau}{w'(\tau)}; \tag{3.21}$$
$$\tau = \exp(i\theta) \in \gamma;$$

$h_0(\tau)$ и $g_0(\tau)$ — известные на γ функции; входящая в последнюю из них константа произвольно зафиксирована.

4. Рассмотрим задачу о всестороннем растяжении упругой плоскости с отверстием, имеющим в деформированном состоянии форму эллипса, при отсутствии усилий на контуре отверстия, поворота на бесконечности и объемных сил.

Пусть a и b $(a > b)$ — полуоси эллипса. Совместим декартовы оси с осями эллипса, направив ось абсцисс вдоль большой оси. Тогда уравнение эллипса (контура L) и параметры n, m, характеризующие его размеры и форму, имеют вид

$$(4.1)\qquad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad 0 < n = (a+b)/2 < \infty,$$
$$0 < m = (a-b)/(a+b) < 1.$$

В предельных случаях при $m = 0$ эллипс вырождается в окружность, а при $m = 1$ — в прямолинейную щель.

Обозначим через $P_0 > 0$ растягивающее усилие и учтем, что в соответствии с исходными данными $V = 0$, $W = 0$, $p_x = p_y = 0$. Тогда условия на контуре отверстия (3.8) (при нулевой константе) и на бесконечности примут вид

$$(4.2)\qquad g_x^0 = 0, \quad g_y^0 = 0;$$
$$(4.3)\qquad P_{xx}^\infty = P_{yy}^\infty = P_0, \quad P_{xy}^\infty = 0, \quad \omega_{xy}^\infty = 0.$$

Внешность эллипса отображается конформно на внешность единичного круга посредством функции

$$(4.4)\qquad z = w(\zeta) = n(\zeta + m/\zeta), \quad w'(\zeta) \neq 0, \quad \zeta = r\exp(i\theta) \in D'.$$

Отсюда вытекают формулы

$$(4.5)\qquad x = n(r + m/r)\cos\theta, \quad y = n(r - m/r)\sin\theta;$$
$$(4.6)\qquad x^2/(n(r+m/r))^2 + y^2/(n(r-m/r))^2 = 1,$$
$$x^2/(2n\sqrt{m}\cos\theta)^2 - y^2/(2n\sqrt{m}\sin\theta)^2 = 1,$$

показывающие, что r, θ являются эллиптическими координатами в плоскости деформации и что граничному эллипсу (4.1) соответствует эллипс $r = 1$.

С учетом условий (4.2), имеющих в комплексной форме вид $g_0 = 0$, второе краевое условие для потенциалов (3.20) становится однородным:

$$(4.7)\qquad \varphi(\zeta) + w(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} + \alpha\,[w(\zeta)\overline{\Phi}^2(\bar\zeta) - 2\varphi(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)} +$$
$$+ \int \Phi(\zeta)\varphi'(\zeta)\,d\zeta\,]\Big|_{r=1} = 0.$$

Возьмем потенциал $\varphi(\zeta)$ в виде, обобщающем его выражение в линейном решении этой задачи [4] и содержащем два свободных вещественных параметра A и B, тогда (4.7) определит другой потенциал $\psi(\zeta)$, в итоге

$$(4.8)\qquad \varphi(\zeta) = n\left(A\zeta + \frac{mB}{\zeta}\right), \quad \psi(\zeta) = -n\left[A\frac{1+\alpha A}{\zeta} + \right.$$
$$+ mB(1+\alpha B)\zeta + \left(\frac{1-2\alpha A}{\zeta} + m(1-2\alpha B)\zeta\right)\frac{A\zeta^2 - mB}{\zeta^2 - m} +$$
$$\left. + \alpha\frac{1+m\zeta^2}{\zeta}\left(\frac{A\zeta^2 - mB}{\zeta^2 - m}\right)^2 + \frac{\alpha\sqrt{m}}{2}(A-B)^2\ln\frac{1-\sqrt{m}\zeta}{1+\sqrt{m}\zeta}\right].$$

Потенциалам (4.8) и отображающей функции (4.4) при отсутствии объемных сил отвечают следующие выражения напряжений (3.18):

$$(4.9)\qquad P^{12} = 2\left(\frac{A\zeta^2 - mB}{\zeta^2 - m} + \frac{A\bar\zeta^2 - mB}{\bar\zeta^2 - m}\right) + 2\alpha\left(\frac{A\zeta^2 - mB}{\zeta^2 - m} - \frac{A\bar\zeta^2 - mB}{\bar\zeta^2 - m}\right)^2,$$

$$P^{11} = \frac{2\bar\zeta^2}{\bar\zeta^2 - m}\left\{\frac{2m(A-B)(\zeta\bar\zeta - 1)}{(\bar\zeta^2 - m)^2}\left[\frac{\zeta - m\bar\zeta}{\zeta} + 2\alpha\frac{m(A-B)(\zeta - \bar\zeta^3)}{\zeta(\bar\zeta^2 - m)}\right] + \right.$$
$$+ \frac{m(A+B)(\bar\zeta^4 + 1) - 2(A + m^2B)\bar\zeta^2}{\bar\zeta^2(\bar\zeta^2 - m)} + \alpha\left[\frac{(A - mB\bar\zeta^2)^2}{\bar\zeta^2(m\bar\zeta^2 - 1)} + \right.$$
$$\left.\left. + 2\frac{A - mB\bar\zeta^2}{\bar\zeta^2}\frac{A\bar\zeta^2 - mB}{\bar\zeta^2 - m} + \frac{m\bar\zeta^2 - 1}{\bar\zeta^2}\left(\frac{A\bar\zeta^2 - mB}{\bar\zeta^2 - m}\right)^2\right]\right\}.$$

Распорядимся произволом параметров A и B таким образом, чтобы удовлетворить условиям на бесконечности для напряжений (4.3), имеющим в комплексной форме вид $P^{11}_\infty = 0$, $P^{12}_\infty = 2P_0$. В результате получаем уравнения

$$\alpha (A - B)^2 + A + B = 0, \quad 2A = P_0,$$

определяющие эти параметры:

$$A = \frac{P_0}{2}, \quad B^\pm = P_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\sigma (1 - \nu)}}{\sigma (1 - \nu)} \right), \quad \sigma = \frac{P_0}{\mu}. \tag{4.10}$$

Формулы (4.9), (4.10) дают два решения задачи. Найденные решения сохраняют силу при ограниченных растяжениях, для которых $\sigma \leqslant 1/ /(2 (1 - \nu))$ (при $\sigma = 1/(2 (1 - \nu))$ они совпадают друг с другом), и утрачивают смысл при сильных растяжениях, для которых $\sigma > 1/(2 (1 - \nu))$ и параметры (4.10) становятся комплексными. Ниже показано, что второе решение не отвечает исходным допущениям рассматриваемой модели и должно быть отброшено.

Потенциалам (4.8) при отсутствии сил отвечают следующие повороты и удлинения-сдвиги (3.18):

$$\omega^{21} = 2 \frac{1 - \nu}{\mu} \frac{m (A - B) (\bar\zeta^2 - \zeta^2)}{(\zeta^2 - m) (\bar\zeta^2 - m)}, \tag{4.11}$$

$$e^{12} = \frac{1 - 2\nu}{\mu} \frac{2 (A\zeta^2\bar\zeta^2 + m^2 B) - m (A + B) (\zeta^2 + \bar\zeta^2)}{(\zeta^2 - m) (\bar\zeta^2 - m)} - \frac{1 - \nu}{2\mu^2} \frac{m (A - B)^2 (\bar\zeta^2 - \zeta^2)^2}{(\zeta^2 - m)^2 (\bar\zeta^2 - m)^2},$$

$$e^{11} = \frac{\bar\zeta^2}{\bar\zeta^2 - m} \left\{ \frac{2m (A - B) (\zeta\bar\zeta - 1)}{\mu (\bar\zeta^2 - m)^2} \left[\frac{\zeta - m\bar\zeta}{\zeta} + \frac{1 - \nu}{\mu} \frac{m (A - B) (\zeta - \bar\zeta^3)}{\zeta (\bar\zeta^2 - m)} \right] + \right.$$

$$+ \frac{m (A + B) (\bar\zeta^4 + 1) - 2 (A + m^2 B) \zeta^2}{\mu\bar\zeta^2 (\bar\zeta^2 - m)} + \frac{1 - \nu}{2\mu^2} \left[\frac{(A - mB\bar\zeta^2)^2}{\bar\zeta^2 (m\bar\zeta^2 - 1)} + \right.$$

$$\left. \left. + 2 \frac{A - mB\bar\zeta^2}{\bar\zeta^2} \frac{A\bar\zeta^2 - mB}{\bar\zeta^2 - m} + \frac{m\bar\zeta^2 - 1}{\bar\zeta^2} \left(\frac{A\bar\zeta^2 - mB}{\bar\zeta^2 - m} \right)^2 \right] \right\}.$$

Здесь параметры A и B определяются формулами (4.10). Отсюда видно, что $\omega^{21}_\infty = 0$, т. е. условие на бесконечности для поворота (4.3) выполнено.

Из (4.11) видно также, что для реализации первого исходного допущения модели $|e^{\alpha\beta}| \ll 1$, $|\omega^{\alpha\beta}| \ll 1$ следует принять

$$|A|/\mu \ll 1, \quad |B|/\mu \ll 1. \tag{4.12}$$

Из первого условия (4.12) с учетом (4.10) вытекает, что характерное безразмерное напряжение должно быть малой по сравнению с единицей величиной

$$|A|/\mu = \sigma/2 \ll 1, \quad \sigma = P_0/\mu \ll 1. \tag{4.13}$$

Заметим, что коэффициент Пуассона ν и величина $1/(2 (1 - \nu))$ для упругих материалов изменяются в пределах

$$0 < \nu < 0{,}5, \quad 0{,}5 < 1/(2 (1 - \nu)) < 1,$$

поэтому случай совпадающих решений, в котором $\sigma = 1/(2 (1 - \nu))$, не согласуется с (4.13), и его надо отбросить. В дальнейшем будем рассматривать только слабое растяжение, когда, согласно (4.13), $\sigma \ll 1$. В этом случае выражения $B^\pm/\mu$ допустимо линеаризировать по σ и представить в форме

$$\frac{B^+}{\mu} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{1 - \nu} (-1 + \sqrt{1 - 2\sigma (1 - \nu)}) \approx - \frac{1}{2} \sigma, \tag{4.14}$$

$$\frac{B^-}{\mu} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{1-\nu}\left(1 + \sqrt{1 - 2\sigma(1-\nu)}\right) \approx -\frac{2}{1-\nu} + \frac{3}{2}\sigma.$$

Из (4.14) и (4.13) легко видеть, что второе условие (4.12) выполняется на первом решении и не выполняется на втором. Таким образом, обоим требованиям (4.12) при слабом растяжении отвечает только первое решение, в котором следует принять

$$\sigma \ll 1, \quad A = P_0/2, \quad B = -P_0/2. \tag{4.15}$$

При значениях параметров (4.15) для поворота и удлинений-сдвигов (4.11) в эллиптических координатах (4.5), (4.6) получаем выражения

$$\omega^{21} = -i\sigma \frac{4m(1-\nu) r^2 \sin 2\theta}{r^4 - 2mr^2 \cos 2\theta + m^2}, \tag{4.16}$$

$$e^{12} = 2\sigma \frac{(1-2\nu)(r^4 - m^2) + \sigma(1-\nu) m^2 r^4 \sin^2 2\theta}{r^4 - 2mr^2 \cos 2\theta + m^2},$$

$$e^{11} = \frac{\sigma r^2 e^{-2i\theta}}{r^2 e^{-2i\theta} - m} \left\{ \frac{2m(r^2 - 1)}{(r^2 e^{-2i\theta} - m)^2} \left[1 - me^{-2i\theta} + \sigma \frac{m(1-\nu)(1 - r^2 e^{-2i\theta})}{r^2 e^{-2i\theta} - m} \right] - \frac{1 - m^2}{r^2 e^{-2i\theta} - m} + \right.$$

$$\left. + \sigma \frac{1-\nu}{8} \left[\frac{(1 + mr^2 e^{-2i\theta})^2}{r^2 e^{-2i\theta}(mr^2 e^{-2i\theta} - 1)} + \frac{r^2 e^{-2i\theta} - m}{r^2 e^{-2i\theta}} \frac{3m(r^4 e^{-4i\theta} - 1) + (1-m) r^2 e^{-2i\theta}}{(r^2 e^{-2i\theta} - m)^2} \right] \right\}.$$

Из (4.16) с учетом соотношения

$$r^4 - m^2 = (r^2 + m)\left[(r+1)(r-1) + (1-m)\right]$$

можно заключить, что при условиях

$$r - 1 \sim \sigma, \quad 1 - m \sim \sigma, \quad 2\theta \neq 0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi$$

имеем $|e^{\alpha\beta}| \sim |\omega^{21}|^2$, т. е. будет выполняться и другое исходное допущение модели. Таким образом, при слабом растяжении плоскости с вытянутым эллиптическим отверстием существует область, имеющая форму полосы, охватывающей контур эллипса, исключая окрестности концов его осей симметрии, в которой малые повороты существенно превышают малые удлинения-сдвиги. Тем самым оправдано решение задачи в рамках рассматриваемой нелинейной модели.

Физические компоненты напряжений в эллиптических координатах P_{rr}, $P_{r\theta}$, $P_{\theta\theta}$ связаны с комплексными компонентами формулами (3.19). Если подставить в них отображение (4.4), комплексные напряжения (4.9) и параметры (4.15), то решение задачи, отвечающее исходным допущениям нелинейной модели, определится выражениями

$$P_{rr} + P_{\theta\theta} = \frac{2P_0(r^4 - m^2)}{(r^2 e^{2i\theta} - m)(r^2 e^{-2i\theta} - m)} + \sigma \frac{P_0(1-\nu) m^2 r^4 (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})^2}{(r^2 e^{2i\theta} - m)^2 (r^2 e^{-2i\theta} - m)^2}, \tag{4.17}$$

$$P_{rr} - P_{\theta\theta} + 2iP_{r\theta} = \frac{2P_0 r^2}{r^2 e^{2i\theta} - m} \left\{ \frac{2m(r^2 - 1)}{(r^2 e^{-2i\theta} - m)^2} \left[1 - me^{-2i\theta} + \sigma m(1-\nu) \frac{1 - r^2 e^{-4i\theta}}{r^2 e^{-2i\theta} - m} \right] - \right.$$

$$- \frac{1 - m^2}{r^2 e^{-2i\theta} - m} - \sigma e^{2i\theta} \frac{1-\nu}{8r^2} \left[\frac{(1 + mr^2 e^{-2i\theta})^2}{1 - mr^2 e^{-2i\theta}} - 2(1 + mr^2 e^{-2i\theta}) \frac{r^2 e^{-2i\theta} + m}{r^2 e^{-2i\theta} - m} + \right.$$

$$\left. \left. + (1 - mr^2 e^{-2i\theta}) \left(\frac{r^2 e^{-2i\theta} + m}{r^2 e^{-2i\theta} - m} \right)^2 \right] \right\}.$$

Для напряжений P^1_{rr}, $P^1_{r\theta}$, $P^1_{\theta\theta}$ на граничном эллипсе $r = 1$ формулы (4.17) дают выражения

$$P^1_{rr} = P^1_{r\theta} = 0, \quad P^1_{\theta\theta} = \frac{2P_0(1 - m^2)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} - \sigma \frac{4P_0 m(1-\nu) \sin^2 2\theta}{(1 - 2m \cos 2\theta + m^2)^2}. \tag{4.18}$$

Исследуем поведение напряжения $P^1_{\theta\theta}$ на границе отверстия. Экстремальные точки определяются уравнением $dP^1_{\theta\theta}/d2\theta = 0$, которое выполняется при одном из условий

$$\sin 2\theta = 0, \quad \cos 2\theta = v_1/v_2,$$

где

$$v_1 = 1 - m^4 - 4m^2\sigma(1-\nu); \quad v_2 = 2m\,[1 - m^2 - \sigma(1-\nu)(1+m^2)].$$

В интервале $0 \leqslant 2\theta \leqslant 4\pi$ эти уравнения имеют корни

$$2\theta = 0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi,$$

$$2\theta = \pm\arccos v_1/v_2; \quad 2\pi \pm \arccos v_1/v_2,$$

из которых последние реализуются при $|v_2| > |v_1|$, т. е. при

$$v_2 > 0, \quad -v_2 < v_1 < v_2$$

или при

$$v_2 < 0, \quad v_2 < v_1 < -v_2.$$

Эти системы неравенств, будучи записанными с учетом выражений v_1, v_2 и разрешенными относительно величины $\sigma(1-\nu)$, согласуются между собою соответственно при

(4.19) $$\sigma(1-\nu) < -\frac{1-m^2}{2m}, \quad \sigma(1-\nu) > \frac{1-m^2}{2m}.$$

Поскольку $\sigma(1-\nu) > 0$, то из них имеет смысл только второе. Разрешая его относительно m с учетом условий $m > 0$ и $\sigma \ll 1$, в линейном по σ приближении получим $m > 1 - \sigma(1-\nu)$. Стандартный анализ показывает, что ненулевое напряжение (4.18) для одного вида отверстий

$$0 < m \leqslant 1 - \sigma(1-\nu)$$

имеет экстремумы

(4.20) $$\text{при } 2\theta = 0;\ 2\pi \quad P^1_{\theta\theta} = (P^1_{\theta\theta})_{\max} = 2P_0\frac{1+m}{1-m} > 0,$$

$$\text{при } 2\theta = \pi;\ 3\pi \quad P^1_{\theta\theta} = (P^1_{\theta\theta})_{\min} = 2P_0\frac{1-m}{1+m} > 0,$$

т. е. слабо и умеренно вытянутые эллиптические отверстия растянуты. Растяжения, как и в линейном решении [4], экстремальны в точках эллипса, принадлежащих его осям симметрии, причем в точках большой оси реализуются максимумы, а в точках малой оси — минимумы. Из (4.20), в частности, следует, что при вырождении эллипса в окружность ($m = 0$) экстремумы совпадают между собою по величине и вдвое превосходят растяжение на бесконечности.

Для другого вида отверстий

$$1 - \sigma(1-\nu) < m < 1$$

получим

(4.21) $$\text{при } 2\theta = 0;\ 2\pi \quad P^1_{\theta\theta} = (P^1_{\theta\theta})_{\max} = 2P_0\frac{1+m}{1-m} > 0,$$

$$\text{при } 2\theta = \pi;\ 3\pi \quad P^1_{\theta\theta} = (P^1_{\theta\theta})_{\max} = 2P_0\frac{1-m}{1+m} > 0,$$

$$\text{при } 2\theta = \pm\arccos\frac{v_1}{v_2}; \quad 2\pi \pm \arccos\frac{v_1}{v_2}$$

$$P^1_{\theta\theta} = (P^1_{\theta\theta})_{\min} = -\frac{P_0}{\sigma(1-\nu)}(\tau - 1/m)(\tau - m),$$

где в силу второго неравенства (4.19)

$$\tau = 2m\sigma(1-\nu)/(1-m^2) > 1, \ \tau - m > 0.$$

Отсюда ясно, что

$$\text{при} \quad \tau < 1/m \quad (P^1_{\theta\theta})_{\min} > 0,$$

$$\text{при} \quad \tau > 1/m \quad (P^1_{\theta\theta})_{\min} < 0,$$

$$\text{при} \quad \tau = 1/m, \quad \tau = m \quad (P^1_{\theta\theta})_{\min} = 0.$$

Таким образом, на контурах сильно вытянутых эллиптических отверстий свойства граничного напряжения более многообразны. В этом случае в точках эллипса — концах его осей симметрии — достигаются максимумы напряжений, при этом абсолютные максимумы реализуются в точках большой оси. В окрестности этих точек контур растянут.

Минимумы напряжений, одинаковые по величине, достигаются в точках, занимающих промежуточные положения между точками максимумов. В окрестностях этих точек в зависимости от значений параметров контур может быть растянут, сжат или находиться в нейтральном состоянии. В частности, из (4.21) видно, что при вырождении эллипса в прямолинейный разрез ($m = 1$) абсолютный максимум напряжений неограниченно возрастает, а их минимум неограниченно убывает, причем эти экстремумы достигаются в одних и тех же точках — концах разреза. Тем самым в концах разреза напряжения становятся неопределенными. Что касается напряжений в середине разреза, то они будут равны нулю.

5. Будем полагать, что объемные силы отсутствуют, а упругая плоскость имеет отверстие произвольной формы, и рассмотрим краевую задачу для потенциалов (3.8) при напряжениях, ограниченных на бесконечности и имеющих на границе отверстия значения общего вида.

В односвязной бесконечной области (не содержащей начала отсчета) комплексные потенциалы, вообще говоря, не однозначны. Однако требование однозначности напряжений и поворота налагает на них определенные ограничения.

Обозначим через $[\chi]_l$ приращение гладкой функции $\chi(z, \bar{z})$ при положительном обходе контура l, содержащего отверстие. Известно [6], что для гладкой функции операцию вычисления приращения вдоль замкнутого контура можно переставлять с операцией дифференцирования:

$$(5.1) \qquad \frac{\partial}{\partial z}[\chi]_l = \left[\frac{\partial\chi}{\partial z}\right]_l, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\chi]_l = \left[\frac{\partial\chi}{\partial \bar{z}}\right]_l.$$

Когда объемные силы отсутствуют ($V = 0$), то условия однозначности напряжений и поворота (3.4) и (3.7) имеют вид

$$(5.2) \qquad 0 = \left[P^{12} + \frac{1}{2\alpha}\,\omega^{21}\left(1 - \frac{1}{4}\,\omega^{21}\right)\right]_l = 4\,[\varphi'(z)]_l;$$

$$(5.3) \quad 0 = [P^{11}]_l = -2\,[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} + 2\alpha\overline{\varphi''(z)}\,(z\overline{\varphi'(z)} - \varphi(z))]_l.$$

Из (5.2) и (5.1) вытекает

$$(5.4) \qquad [\varphi'(z)]_l = 0, \quad [\varphi''(z)]_l = 0.$$

Следствием же (5.3) и (5.4) будет соотношение

$$[\overline{\psi'(z)}]_l - 2\alpha\overline{\varphi''(z)}\,[\varphi(z)]_l = 0,$$

определяющее приращения функций в форме

$$(5.5) \qquad [\varphi(z)]_l = 0, \quad [\psi'(z)]_l = 0.$$

С учетом выражений (5.4), (5.5) комплексные потенциалы можно представить через однозначные в бесконечной области функции φ^* и ψ^*:

$$(5.6) \qquad \varphi(z) = \varphi^*(z), \quad \psi(z) = B\ln z + \psi^*(z), \quad B = \text{const}.$$

Разложив однозначные функции в ряды Лорана, найдем, что ограниченность в бесконечной области напряжений и поворота (3.4), (3.7) требует, чтобы потенциалы (5.6) имели вид

$$(5.7)\qquad \varphi(z) = a_1 z + \varphi_*(z), \quad \psi(z) = B \ln z + b_1 z + \psi_*(z),$$

$$\varphi_*(z) = \sum_0^\infty a_{-n} z^{-n}, \quad \psi_*(z) = \sum_0^\infty b_{-n} z^{-n},$$

где коэффициенты a_1 и b_1 определяются условиями на бесконечности в форме

$$(5.8)\qquad a_1 = \frac{1}{4}\left[P_\infty^{12} + \frac{1}{2\alpha}\omega_\infty^{21}\left(1 - \frac{1}{4}\omega_\infty^{21}\right)\right], \quad b_1 = -\frac{1}{2}P_\infty^{22}.$$

Коэффициент B также может быть представлен через механическую величину. С этой целью рассмотрим расположенную в области S дугу $\widetilde{A_0A}$ и будем считать, что в каждой ее точке определен вектор напряжений. Тогда компоненты главного вектора и главного момента распределенных по дуге сил определяются с учетом (3.3) выражениями

$$F = F_x + iF_y = \int_0^s (p_x + ip_y)\, ds = \int_0^s p\, ds = \frac{1}{2i}\int_0^s \left(P^{12}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar z}{ds}\right) ds,$$

$$M = M_z = \int_0^s \left(xp_y - yp_x\right) ds = \operatorname{Re}\left\{-i\int_0^s \bar z p\, ds\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2}\int_0^s \bar z\left(P^{12}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar z}{ds}\right) ds\right\}.$$

Используя представления напряжений (3.5) и (3.7) при отсутствии объемных сил, найдем подынтегральные выражения

$$\frac{1}{2}\left(P^{12}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar z}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\Big\{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} +$$

$$+ \alpha\left[z\bar\varphi'^2(\bar z) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \int \varphi'^2(z)\, dz\right]\Big\},$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\bar z}{2}\left(P^{12}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar z}{ds}\right)\right\} = \operatorname{Re}\frac{d}{ds}\Big\{z\bar z\varphi'(z) + z\psi(z) -$$

$$- \int \psi(z)\, dz + \alpha\left(z\bar z\varphi'^2(z) - 2z\overline{\varphi(z)}\varphi'(z) + \varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right)\Big\},$$

и, следовательно, компоненты главного вектора и главного момента контурных сил определятся через потенциалы формулами

$$(5.9)\qquad iF = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \alpha\left[z\bar\varphi'^2(\bar z) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} +\right.$$

$$\left. + \int \varphi'^2(z)\, dz\right]\Big|_{z(s)} + \text{const},$$

$$M = -\operatorname{Re}\Big\{z\bar z\varphi'(z) + z\psi(z) - \int \psi(z)\, dz +$$

$$+ \alpha\left(z\bar z\varphi'^2(z) - 2z\overline{\varphi(z)}\varphi'(z) + \varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right)\Big\}\Big|_{z(s)} + \text{const}.$$

Применив первую из формул (5.9) к замкнутому контуру L, обходимому в положительном направлении (т. е. по часовой стрелке), и используя вытекающие из (5.7) выражения

$$[\psi(z)]_L = 2\pi i B, \quad \left[\int \varphi'^2(z)\, dz\right]_L = 0,$$

найдем, что постоянная B определяется через главный вектор в виде

$$(5.10)\qquad B = \bar F/2\pi.$$

Потенциалам (5.7) соответствуют следующие перемещения (3.9):

$$2\mu u = R\left((\varkappa a_1 - \bar{a}_1)\, e^{i\sigma} - b_1 e^{-i\sigma}\right) - B\ln R + \varkappa a_0 + i\bar{B}\sigma + O(1/R), \quad z = Re^{i\sigma}.$$

Здесь через $O(1/R)$ обозначены члены, имеющие вне L порядок $1/R$. Отсюда видно, что при ограниченных напряжениях и поворотах перемещения, вообще говоря, неограниченно возрастают на бесконечности. Чтобы они оставались ограниченными, должны быть соблюдены условия

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad B = 0. \tag{5.11}$$

Первые два из них ввиду (5.8) требуют, чтобы на бесконечности исчезали напряжения и поворот, а последнее в силу (5.10) — чтобы обращался в нуль главный вектор контурных сил. В случае (5.11) потенциалы (5.7) будут голоморфными в бесконечной области функциями, а перемещение примет на бесконечности значение, определяемое коэффициентом a_0:

$$\varphi(z) = \varphi_*(z) = \sum_0^\infty a_{-n} z^{-n}, \quad \psi(z) = \psi_*(z) = \sum_0^\infty b_{-n} z^{-n}, \quad 2\mu u_\infty = \varkappa a_0. \tag{5.12}$$

Итак, для ограниченных в бесконечной области напряжений, поворотов и перемещений потенциалы однозначны, имеют вид (5.12) и определяются из краевого условия (3.8), где следует положить $V = 0$, $W = 0$, $\mathrm{const} = 0$.

Если же при ограниченных напряжениях и поворотах допустимы неограниченные на бесконечности перемещения, то потенциалы неоднозначны и определяются формулами (5.7). В этом случае можно рассматривать краевую задачу для однозначных потенциалов φ_* и ψ_*, которая вытекает из задачи (3.8) и имеет тот же тип:

$$A_*\varphi_*(z) + \bar{A}_* z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi_*(z)} + \alpha N(\varphi_*, \bar{\varphi}_*)\big|_L = g_*(s).$$

Здесь

$$A_* = 1 + 2\alpha(a_1 - \bar{a}_1); \quad N(\varphi_*, \bar{\varphi}_*) = z\bar{\varphi}_*'^2(\bar{z}) - 2\varphi_*(z)\overline{\varphi_*'(z)} + \int \varphi_*'^2(z)\, dz;$$

$$g_*(s) = g(s) - [a_1 + \bar{a}_1 + \alpha(a_1 - \bar{a}_1)^2]\, z(s) - \bar{B}\ln\bar{z}(s) - b_1\bar{z}(s);$$

g_* — известная однозначная на L функция; поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением задачи (3.8).

Бесконечную односвязную область можно конформно отобразить на единичный круг D (с окружностью γ) функцией [4]

$$z = w(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + w_0(\zeta), \quad \zeta \in D,$$

где c — постоянная; w_0 — голоморфная в круге функция. Тогда потенциалы (5.7) определятся равенствами

$$\varphi(\zeta) = \frac{a_1 c}{\zeta} + \varphi_0(\zeta), \quad \psi(\zeta) = -B\ln\zeta + \frac{b_1 c}{\zeta} + \psi_0(\zeta)$$

($\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ — голоморфные внутри круга функции), напряжения и поворот — формулами (3.18), а краевое условие для потенциалов при условиях (5.11) — вторым выражением в (3.20).

Будем отыскивать из условия (3.20) потенциалы $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, которые вместе со своими производными непрерывны в замкнутой области и удовлетворяют условию $\psi(0) = 0$ (не влияющему на вид напряжений и поворотов). Умножим само условие (3.20) и комплексно-сопряженное ему равенство на $1/(2\pi i(\tau - \zeta))$ и, проинтегрировав каждое из них вдоль контура γ с использованием свойств голоморфной функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{v(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta} = v(\zeta), \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{v(\tau)}\, d\tau}{\tau - \zeta} = \overline{v(0)},$$

получим выражения потенциалов через граничные значения одного из них и его производной:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\varphi'(\tau)}}{\overline{w'(\tau)}}\frac{w(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} - \frac{\alpha}{2\pi i}\int_\gamma \frac{N(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}; \tag{5.13}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{g(\tau)}\,d\tau}{\tau-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi'(\tau)}{w'(\tau)}\frac{w(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} - \frac{\alpha}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{N(\tau)}\,d\tau}{\tau-\zeta} - \overline{\varphi(0)}$$

($N(\tau)$ определяется выражением (3.21)). Первое соотношение (5.13), представленное в форме

$$P(\varphi(\zeta), \alpha) = \Pi(\varphi(\zeta)) + \alpha R(\varphi(\zeta)) = 0,$$

где

$$\Pi(\varphi(\zeta)) = \varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K(\zeta, \tau)\,\overline{\varphi'(\tau)}\,d\tau - A(\zeta),$$

$$R(\varphi(\zeta)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K(\zeta, \tau)\frac{\overline{\varphi}'^2(\tau)}{w'(\tau)}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\varphi'(\tau)}}{\overline{w'(\tau)}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\zeta)}{\tau-\zeta}\,d\tau + \int \frac{\varphi'^2(\zeta)}{w'(\zeta)}\,d\zeta,$$

$$K(\zeta, \tau) = \frac{1}{\overline{w'(\tau)}}\frac{w_0(\tau)-w_0(\zeta)}{\tau-\zeta}, \quad A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta},$$

после устремления ζ к произвольной точке σ граничной окружности приводит к нелинейному функциональному уравнению для искомой функции $\varphi(\sigma)$, содержащему перед нелинейными членами множителем параметр α:

$$P(\varphi(\sigma), \alpha) = \Pi(\varphi(\sigma)) + \alpha R(\varphi(\sigma)) = 0 \tag{5.14}$$

($\Pi(\varphi)$ — оператор линейной упругости).

К уравнению (5.14) применим развитый в [7] модифицированный метод Ньютона. В соответствии с ним решение отыскивается в виде последовательности

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - [\Pi'(\varphi_0)]^{-1}(P(\varphi_n)) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{5.15}$$

в которой в качестве нулевого приближения берется решение φ_0 линейной задачи $\Pi(\varphi_0) = 0$. Процесс (5.15) имеет то достоинство, что в нем используется обратный оператор, соответствующий нулевому приближению. Для сходимости последовательности (5.15) требуется, чтобы параметр не превосходил некоторого числа, определяемого видом операторов, представленных в уравнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958.
2. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными.— М.: ГИФМЛ, 1961.
3. **Бондарь В. Д.** Плоская задача одного варианта геометрически нелинейной упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1969.— Вып. 2.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
5. **Колосов Г. В.** Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости.— Юрьев, 1909.
6. **Снеддон И. Н., Берри П. С.** Классическая теория упругости.— М.: ГИФМЛ, 1961.
7. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.

г. Новосибирск *Поступила 26/IV 1993 г.*