6. Карпов В. А. Теплообмен в критической точке и ее окрестности при обтекании тел турбулентным потоком // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1975.— № 4.
7. Осипцов А. Н. Пограничный слой на затупленном теле в потоке запыленного газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 5.
8. Holden M. S., Gustafson G. Q., Duryea G. R., Hudack L. T. An experimental study of particle-induced convective heating augmentation. — N. Y., 1976.— (Pap./AIAA; N 76—320).
9. Edney B. E. Effects of shock impingement on the heat transfer around blunt bodies // AIAA J.— 1968.— V. 6, N 1.
10. Чжен П. Отрывные течения.— М.: Мир, 1973.— Т. 2.
11. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений.— М.: ИЛ, 1962.
12. Fay J. A., Riddell F. R. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air // J. Aeronaut. Sci.— 1958.—V. 25, N 2.
13. Полежаев Ю. В., Романчиков В. П., Чирков И. В., Шебеко В. Н. Расчетная модель процесса эрозионного разрушения композиционного материала // ИФЖ.— 1979.— Т. 37, № 3.
14. Бойсон Дж. К., Кертис Х. А. Экспериментальные исследования градиента скорости на затупленном теле // Механика.— М.: ИЛ, 1960.— № 1.
15. Магомедов К. М. О сверхзвуковом обтекании тупых тел с известной звуковой точкой // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1963.— № 1.
16. Phinney R. E. Mechanism for heat transfer to a rough blunt body // Lett. Heat and Mass Transfer.— 1974.— V. 1, N 2.

г. Москва *Поступила 27/VII 1992 г.*

УДК 539.3:517.958

Н. И. Остросаблин

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Известны [1—11] многочисленные попытки представить напряжения или смещения через произвольные независимые функции (например, гармонические и бигармонические) таким образом, чтобы уравнения теории упругости удовлетворялись тождественно. Такие представления называют общими решениями. Но единого подхода к построению общих решений до сих пор не было. В настоящей работе предлагается способ, позволяющий систему дифференциальных уравнений (линейной теории упругости) с постоянными коэффициентами в некоторых случаях свести к более простой, в частности диагональной, системе. При этом обратное преобразование к исходной системе задается транспонированной или сопряженной матрицей. Найдены также формулы производства новых решений (операторы симметрий в смысле группового анализа) исходя из какого-то конкретного решения. Идея метода кратко изложена в [12]. Приведены явные формулы для изотропного и трансверсально-изотропного материалов, показана полнота и общность решения Папковича — Нейбера.

Уравнения теории упругости при произвольной анизотропии и отсутствии объемных сил в декартовых ортогональных координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид [7]

$$L_{ij}u_i = 0, \quad L_{ij} = L_{ji} = A_{i(kl)j}\partial_{kl} - \rho\delta_{ij}\partial_{..}, \tag{1}$$

где u_j — вектор смещения; $A_{i(kl)j} = (A_{iklj} + A_{ilkj})/2$; A_{iklj} — постоянный тензор модулей упругости; ρ — постоянная плотность материала; δ_{ij} — символ Кронекера; ∂_k — производная по координате x_k; $\partial_.$ — производная по времени; повторяющиеся буквенные индексы означают суммирование. Свойства коэффициентов $A_{i(kl)j}$ изучались в [13—15].

Допустим, что матрица L операторов в (1) подобна [16] некоторой матрице D, т. е. существует невырожденная матрица T такая, что

$$LT = TD. \tag{2}$$

Поскольку $L' = L$ и предполагаем $D' = D$, то из (2) получаем

$$T'L = DT' \tag{3}$$

(D, T — матрицы операторов с постоянными коэффициентами, штрих означает транспонирование).

Если $u = Tv$ (v_j — новые функции), где $Dv = 0$, то с учетом (2) уравнение (1) удовлетворяется:

$$Lu = LTv = TDv = 0. \tag{4}$$

Если же $v = T'\tilde{u}$, где $L\tilde{u} = 0$, то с учетом (3) выполняется уравнение

$$Dv = DT'\tilde{u} = T'L\tilde{u} = 0. \tag{5}$$

Таким образом, согласно формулам

$$u = Tv, \quad v = T'\tilde{u}, \tag{6}$$

решения уравнений (4), (5) переходят друг в друга и системы (4), (5) эквивалентны [16].

Перепишем (2):

$$L_{ij}t_{jr} = t_{ip}D_{pr}. \tag{7}$$

Так как $L' = L$, то можно считать, что D — диагональная матрица. Тогда (7) дает

$$L_{ij}t_{j1} = t_{i1}D_{11}, \quad L_{ij}t_{j2} = t_{i2}D_{22}, \quad L_{ij}t_{j3} = t_{i3}D_{33},$$

или

$$(L_{ij} - D\delta_{ij})\, t_j = 0, \tag{8}$$

т. е. получили задачу на собственные операторы $D_{11} = D_1$, ... и векторы t_{j1},... для матрицы операторов L_{ij}. Такая задача для операторов теории упругости (1) впервые была поставлена в [9]. В силу симметричности L_{ij} можно считать собственные векторы t_{j1}, t_{j2}, t_{j3} ортогональными.

Если t_{jp} — числа, то формулы (6) соответствуют ортогональному преобразованию координат и система (1) становится диагональной для специального ортотропного материала, когда $A_{2211} = -A_{1221}$, $A_{3311} = -A_{1331}$, $A_{3322} = -A_{2332}$. Этот случай приведен в [15].

Интереснее вариант, когда t_{jp} — операторы. Рассмотрим вначале изотропный материал, для которого

$$L_{ij} = (\lambda + \mu)\, \partial_{ij} + (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\, \delta_{ij} \tag{9}$$

(λ, μ — коэффициенты Ламе). В [9] показано, что

$$D_1 = (\lambda + 2\mu)\, \partial_{kk} - \rho\partial_{..}, \quad D_2 = D_3 = \mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..} \tag{10}$$

— собственные операторы для матрицы (9), а собственные векторы с точностью до произвольных множителей будут [9, 12]

$$t_{j1} = \partial_j, \quad t_{j2} = \varepsilon_{jps}c_p\partial_s, \quad t_{j3} = c_j\partial_{kk} - c_m\partial_{mj}, \tag{11}$$

где ε_{jps} — символы Леви — Чивита; c_j — произвольный ненулевой числовой или операторный с постоянными коэффициентами вектор. Векторы (11) ортогональны:

$$t_{ip}t_{iq} = \partial_{jj}\delta_{p1}\delta_{q1} + (c_jc_j\partial_{kk} - c_mc_n\partial_{mn})\, \delta_{p2}\delta_{q2} + \partial_{nn}t_{k2}t_{k2}\delta_{p3}\delta_{q3}, \tag{12}$$

причем $|T| = t_{j3}t_{j3} = (t_{i1}t_{i1})\,(t_{j2}t_{j2}) = \partial_{ii}\,(c_jc_j\partial_{kk} - c_mc_n\partial_{mn})$ и

$$t_{in}t_{jn} = \partial_{ij} + \varepsilon_{ips}\varepsilon_{jqr}c_pc_q\partial_{sr} + (c_i\partial_{kk} - c_m\partial_{mi})\,(c_j\partial_{ss} - c_n\partial_{nj}). \tag{13}$$

Учитывая формулы (4)—(6), (9)—(11), получаем для изотропного материала решение уравнений Ламе (1), (9) в следующем виде:

$$u_i = \partial_iv_1 + \varepsilon_{ips}c_p\partial_sv_2 + (c_i\partial_{kk} - c_m\partial_{mi})\, v_3; \tag{14}$$

$$v_1 = \partial_j\tilde{u}_j, \quad v_2 = \varepsilon_{jps}c_p\partial_s\tilde{u}_j, \quad v_3 = (c_j\partial_{kk} - c_m\partial_{mj})\, \tilde{u}_j; \tag{15}$$

$$[(\lambda + 2\mu)\, \partial_{kk} - \rho\partial_{..}]\, v_1 = 0, \tag{16}$$

$$(\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\, v_2 = 0, \quad (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\, v_3 = 0;$$

$$[(\lambda + \mu)\, \partial_{ij} + (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\, \delta_{ij}]\, \tilde{u}_j = 0. \tag{17}$$

Система Ламе (1), (9) или (17) эквивалентна [16] трем независимым уравнениям (16), т. е. если v_j удовлетворяют (16), то смещения u_i (14) есть решение уравнений Ламе (1), (9) или (17), и, наоборот, если $\tilde{u}_j$ — решение системы (17), то функции v_j (15) будут решением волновых уравнений (16). В статике, очевидно, функции v_j гармонические.

В случае плоской деформации $u_3 = 0$, $\partial_3 = 0$ и при $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ из (14), (15) получаем

$$u_1 = \partial_1 v_1 - \partial_2 v_2, \quad u_2 = \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2; \tag{18}$$

$$v_1 = \partial_1 \tilde{u}_1 + \partial_2 \tilde{u}_2, \quad v_2 = -\partial_2 \tilde{u}_1 + \partial_1 \tilde{u}_2. \tag{19}$$

Формулы (18), (19) запишем в виде комплексных комбинаций

$$u_1 + iu_2 = (\partial_1 + i\partial_2)(v_1 + iv_2) \equiv 2\partial_{\bar{z}}(v_1 + iv_2); \tag{20}$$

$$v_1 + iv_2 = (\partial_1 - i\partial_2)(\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2) \equiv 2\partial_z(\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2).$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$; $z = x_1 + ix_2$. В статике v_1, v_2 — гармонические функции, и их можно взять в виде реальной части аналитических функций: $v_1 = \operatorname{Re} \varphi_1(z)$, $v_2 = \operatorname{Re} \varphi_2(z)$. Тогда из (20) имеем

$$u_1 + iu_2 = \overline{\varphi_1'(z)} + i\,\overline{\varphi_2'(z)}, \quad u_1 - iu_2 = \varphi_1'(z) - i\varphi_2'(z), \tag{21}$$

где штрих означает производную по z. Представление смещений (21) — частный случай формулы Колосова — Мусхелишвили [5].

Вернемся к общему случаю уравнений (1). Если выполняются (2), (3) и $L\tilde{u} = 0$, то $u = TT'\tilde{u}$ — также решение:

$$Lu = LTT'\tilde{u} = TDT'\tilde{u} = TT'L\tilde{u} = 0.$$

Если $D\tilde{v} = 0$, то и $v = T'T\tilde{v}$ — решение:

$$Dv = DT'T\tilde{v} = T'LT\tilde{v} = T'TD\tilde{v} = 0.$$

Соотношение $u = TT'\tilde{u}$ будет формулой производства решений, так как из любого заданного решения $\tilde{u}$ получаем новое решение u. Эту формулу можно применять неоднократно. Для изотропного материала матрицы $T'T$ и TT' имеют вид (12), (13).

Если $L\tilde{u} = 0$ и $LQ - QL = RL$ (Q — оператор симметрии [17]), то $u = Q\tilde{u}$ — тоже решение: $Lu = LQ\tilde{u} = (Q + R)L\tilde{u} = 0$. Отсюда видно, что $Q = TT'$ — оператор симметрии в смысле группового анализа, причем $R = 0$.

Оператор симметрии можно взять также в виде $Q = lM$, $Q + R = Ml$ (M — произвольная матрица операторов с постоянными коэффициентами, $l = l'$ — матрица алгебраических дополнений элементов L_{ij} в L). Тогда имеем $LQ = LlM = |L|M$, $(Q + R)L = MlL = M|L|$, т. е. соотношение $LQ = (Q + R)L$ выполняется.

Для изотропного материала одна из матриц Q следующая [12]:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & [(\partial_{kk} - 2\partial_{33})\varphi - \psi]\partial_3 & [(\partial_{kk} - 2\partial_{22})\varphi + \psi]\partial_2 \\ [(\partial_{kk} - 2\partial_{33})\varphi + \psi]\partial_3 & q_{11} & [(\partial_{kk} - 2\partial_{11})\varphi - \psi]\partial_1 \\ [(\partial_{kk} - 2\partial_{22})\varphi - \psi]\partial_2 & [(\partial_{kk} - 2\partial_{11})\varphi + \psi]\partial_1 & q_{11} \end{bmatrix}.$$

Здесь q_{11}, φ, ψ — произвольные операторы с постоянными коэффициентами.

Эквивалентность систем (4), (5) не означает взаимно однозначного соответствия между решениями этих систем, которое будет при $|T| = \text{const}$. В общем случае решения систем (4), (5) разбиваются на непересекающиеся классы эквивалентных решений, между которыми уже устанавливается взаимно однозначное соответствие [16].

Вернемся к уравнениям (8). Пусть $D = a_{kl}\partial_{kl} - \rho\partial_{..}$, $a_{kl} = a_{lk}$, $t_j = \gamma_{js}\partial_s$, тогда (8) запишем в виде

$$(A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\gamma_{js}\partial_{kls} = 0. \tag{22}$$

Приводя подобные слагаемые и приравнивая нулю коэффициенты при ∂_{kls}, из (22) получаем

(23) $$(A_{i(11)j} - \delta_{ij}a_{11})\,\gamma_{j1} = 0, \quad (A_{i(22)j} - \delta_{ij}a_{22})\,\gamma_{j2} = 0, \quad (A_{i(33)j} - \delta_{ij}a_{33})\,\gamma_{j3} = 0,$$

$$\begin{cases} 2\,(A_{i(23)j} - \delta_{ij}a_{23})\,\gamma_{j2} + (A_{i(22)j} - \delta_{ij}a_{22})\,\gamma_{j3} = 0, \\ (A_{i(33)j} - \delta_{ij}a_{33})\,\gamma_{j2} + 2\,(A_{i(23)j} - \delta_{ij}a_{23})\,\gamma_{j3} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\,(A_{i(13)j} - \delta_{ij}a_{13})\,\gamma_{j1} + (A_{i(11)j} - \delta_{ij}a_{11})\,\gamma_{j3} = 0, \\ (A_{i(33)j} - \delta_{ij}a_{33})\,\gamma_{j1} + 2\,(A_{i(13)j} - \delta_{ij}a_{13})\,\gamma_{j3} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\,(A_{i(12)j} - \delta_{ij}a_{12})\,\gamma_{j1} + (A_{i(11)j} - \delta_{ij}a_{11})\,\gamma_{j2} = 0, \\ (A_{i(22)j} - \delta_{ij}a_{22})\,\gamma_{j1} + 2\,(A_{i(12)j} - \delta_{ij}a_{12})\,\gamma_{j2} = 0, \end{cases}$$

$$2\,[(A_{i(23)j} - \delta_{ij}a_{23})\,\gamma_{j1} + (A_{i(13)j} - \delta_{ij}a_{13})\,\gamma_{j2} + (A_{i(12)j} - \delta_{ij}a_{12})\,\gamma_{j3}] = 0.$$

Если ввести обозначения

$$A^{(1)} = A_{i(11)j}, \quad A^{(2)} = A_{i(22)j}, \quad A^{(3)} = A_{i(33)j},$$
$$A^{(4)} = \sqrt{2}A_{i(23)j}, \quad A^{(5)} = \sqrt{2}A_{i(13)j}, \quad A^{(6)} = \sqrt{2}A_{i(12)j},$$
$$a_1 = a_{11}, \quad a_2 = a_{22}, \quad a_3 = a_{33}, \quad a_4 = \sqrt{2}a_{23}, \quad a_5 = \sqrt{2}a_{13},$$
$$a_6 = \sqrt{2}a_{12}, \quad \gamma_1 = \gamma_{j1}, \quad \gamma_2 = \gamma_{j2}, \quad \gamma_3 = \gamma_{j3},$$

то система (23) запишется в матрично-блочном виде (E — единичная матрица)

(24) $$(A^{(1)} - Ea_1)\,\gamma_1 = 0, \quad (A^{(2)} - Ea_2)\,\gamma_2 = 0, \quad (A^{(3)} - Ea_3)\,\gamma_3 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\,(A^{(4)} - Ea_4) & A^{(2)} - Ea_2 \\ A^{(3)} - Ea_3 & \sqrt{2}\,(A^{(4)} - Ea_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\,(A^{(5)} - Ea_5) & A^{(1)} - Ea_1 \\ A^{(3)} - Ea_3 & \sqrt{2}\,(A^{(5)} - Ea_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\,(A^{(6)} - Ea_6) & A^{(1)} - Ea_1 \\ A^{(2)} - Ea_2 & \sqrt{2}\,(A^{(6)} - Ea_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\sqrt{2}\,[A^{(4)} - Ea_4 \quad A^{(5)} - Ea_5 \quad A^{(6)} - Ea_6] \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Если $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$, т. е. все три столбца матрицы γ_{js} равны нулю, то уравнения (24) выполняются. Тогда $t_j = 0$, т. е. собственный вектор нулевой, но это нам не подходит. Поэтому все три столбца (γ_1, γ_2, γ_3) не могут одновременно быть нулевыми.

Пусть теперь, например, два столбца равны нулю: $\gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0$, тогда $t_j = \gamma_{j1}\partial_1$. Так как t_j определяется с точностью до множителя, то множитель ∂_1 роли не играет и приходим к известному случаю [15], когда t_j постоянные.

Таким образом, остается случай, когда все три столбца ненулевые либо один столбец, например γ_3, равен нулю. Пусть $\gamma_3 = 0$, тогда из (24) следует

(25) $$(A^{(1)} - Ea_1)\,\gamma_1 = 0, \quad (A^{(2)} - Ea_2)\,\gamma_2 = 0, \quad 0 = 0,$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,(A^{(4)} - Ea_4)\,\gamma_2 = 0, \\ (A^{(3)} - Ea_3)\,\gamma_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{2}\,(A^{(5)} - Ea_5)\,\gamma_1 = 0, \\ (A^{(3)} - Ea_3)\,\gamma_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,(A^{(6)} - Ea_6)\,\gamma_1 + (A^{(1)} - Ea_1)\,\gamma_2 = 0, \\ (A^{(2)} - Ea_2)\,\gamma_1 + \sqrt{2}\,(A^{(6)} - Ea_6)\,\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

$$\sqrt{2}\,[(A^{(4)} - Ea_4)\,\gamma_1 + (A^{(5)} - Ea_5)\,\gamma_2] = 0.$$

Из (25) видно, что матрицы $A^{(1)}$, $A^{(3)}$, $A^{(5)}$ имеют общий собственный вектор γ_1, а матрицы $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ — общий собственный вектор γ_2 и, кроме того, выполняются три последних уравнения (25). В обоих вариантах необходимо вначале найти собственные числа и векторы матриц $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, а затем требовать выполнения оставшихся уравнений (24) или (25), из которых определяются значения a_4, a_5, a_6 и условия на модули упругости, для того чтобы все уравнения (24) могли удовлетворяться.

Система вида (23) в другой записи имеется в [18], где даны некоторые частные решения.

Для трансверсально-изотропного материала с матрицей модулей упругости [19]

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{21} & A_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{31} & A_{31} & A_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{21} \end{bmatrix}$$

система (1) имеет вид

$$\left[A_{11}\partial_{11} + \frac{1}{2}(A_{11} - A_{21})\,\partial_{22} + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} - \rho\partial_{..}\right] u_1 + \frac{1}{2}(A_{11} + A_{21})\,\partial_{12}u_2 + \left(\frac{1}{2}A_{44} + A_{31}\right)\partial_{13}u_3 = 0, \tag{26}$$

$$\frac{1}{2}(A_{11} + A_{21})\,\partial_{21}u_1 + \left[\frac{1}{2}(A_{11} - A_{21})\,\partial_{11} + A_{11}\partial_{22} + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} - \rho\partial_{..}\right] u_2 + \left(\frac{1}{2}A_{44} + A_{31}\right)\partial_{23}u_3 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{2}A_{44} + A_{31}\right)(\partial_{31}u_1 + \partial_{32}u_2) + \left[\frac{1}{2}A_{44}(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\partial_{33} - \rho\partial_{..}\right] u_3 = 0.$$

Уравнения (26) преобразованием (6) сводятся к эквивалентной диагональной системе (5) в двух случаях:

(27.а) $$A_{31} = -\frac{1}{2}A_{44};$$

(27.б) $$\frac{1}{2}A_{44} = \frac{A_{11}A_{33} - A_{31}^2}{A_{11} + A_{33} + 2A_{31}} > 0.$$

При этом для (27.а) имеем

$$T = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{28}$$

$$D_1 = A_{11}(\partial_{11} + \partial_{22}) + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} - \rho\partial_{..},$$

$$D_2 = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{21})(\partial_{11} + \partial_{22}) + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} - \rho\partial_{..},$$

$$D_3 = \frac{1}{2}A_{44}(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\partial_{33} - \rho\partial_{..},$$

а для (27.б)

$$T = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & -\alpha\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & -\alpha\partial_{23} \\ \alpha\partial_3 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{\frac{1}{2}A_{44} + A_{31}}{A_{11} - \frac{1}{2}A_{44}} = \frac{A_{33} - \frac{1}{2}A_{44}}{\frac{1}{2}A_{44} + A_{31}}; \tag{29}$$

$$D_1 = A_{11}(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\partial_{33} - \rho\partial_{..}\,,$$
$$D_2 = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{21})(\partial_{11} + \partial_{22}) + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} - \rho\partial_{..}\,,$$
$$D_3 = \frac{1}{2}A_{44}\partial_{kk} - \rho\partial_{..}\,.$$

Оператор D_2 и вектор $t_{j2} = (-\partial_2, \partial_1, 0)$ являются собственными для системы (26) для всех трансверсально-изотропных материалов, а не только, когда коэффициенты связаны условиями (27). Для матриц (28), (29) находим соответственно

$$T'T = TT' = \begin{bmatrix} \partial_{11} + \partial_{22} & & \text{sym} \\ 0 & \partial_{11} + \partial_{22} & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad |T| = \partial_{11} + \partial_{22};$$

$$T'T = \begin{bmatrix} \partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\partial_{33} & & \text{sym} \\ 0 & \partial_{11} + \partial_{22} & \\ 0 & 0 & (\partial_{11} + \partial_{22})(\partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\partial_{33}) \end{bmatrix},$$

$$TT' = \begin{bmatrix} \partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\partial_{1133} & & \text{sym} \\ \alpha^2\partial_{1233} & \partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\partial_{2233} & \\ \alpha\partial_{13}\,[1 - (\partial_{11} + \partial_{22})] & \alpha\partial_{23}\,[1 - (\partial_{11} + \partial_{22})] & (\partial_{11} + \partial_{22})^2 + \alpha^2\partial_{33} \end{bmatrix},$$

$$|T| = (\partial_{11} + \partial_{22})(\partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\partial_{33}).$$

Видно, что для (27.б) матрицы T и T' не перестановочны.

В приведенных примерах матрицы γ_{js} (решения уравнений (23)) для изотропного материала имеют вид

$$\gamma_{js}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \gamma_{js}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix},$$

а для трансверсально-изотропного материала соответственно (27.а), (27.б)

$$\gamma_{js}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma_{js}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\gamma_{js}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \gamma_{js}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем теперь общую структуру преобразующей матрицы T. Пусть есть два собственных вектора вида

(30) $$t_{j1} = \alpha_{js}\partial_s, \qquad t_{j2} = \beta_{jp}\partial_p.$$

Потребуем их ортогональности:

$$t_{j1}t_{j2} = \alpha_{js}\beta_{jp}\partial_{sp} = \frac{1}{2}(\alpha_{js}\beta_{jp} + \alpha_{jp}\beta_{js})\,\partial_{sp} = 0.$$

Отсюда получаем

(31) $$\frac{1}{2}(\alpha_{js}\beta_{jp} + \alpha_{jp}\beta_{js}) = 0,$$

или в безындексной записи $\alpha'\beta + (\alpha'\beta)' = 0$. Из (31) следует, что $\alpha'\beta = c$ — антисимметричная матрица ($c' = -c$). Если $|\alpha| \neq 0$, то $\beta = (\alpha')^{-1}c$. При выполнении (31) векторы (30) ортогональны. Третий собственный вектор t_{j3} должен быть ортогонален к первым двум, и его можно взять в виде

$t_{j3} = \varepsilon_{jmn} t_{m1} t_{n2}$. Но этой формулой задается векторное произведение, вектор $t_3 = t_1 \times t_2$ по определению ортогонален к t_1 и t_2, и они образуют правую тройку векторов. Таким образом, матрица T собственных векторов примет вид

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_{1s}\partial_s & \beta_{1p}\partial_p & (\alpha_{2s}\beta_{3p} - \alpha_{3s}\beta_{2p})\,\partial_{sp} \\ \alpha_{2s}\partial_s & \beta_{2p}\partial_p & (\alpha_{3s}\beta_{1p} - \alpha_{1s}\beta_{3p})\,\partial_{sp} \\ \alpha_{3s}\partial_s & \beta_{3p}\partial_p & (\alpha_{1s}\beta_{2p} - \alpha_{2s}\beta_{1p})\,\partial_{sp} \end{bmatrix},$$

причем коэффициенты α_{js}, β_{jp} должны удовлетворять уравнениям (23), (31). Определитель матрицы T

(32) $$|T| = t_{i3}t_{i3} = (t_{j1}t_{j1})\,(t_{k2}t_{k2}) = (\alpha_{js}\alpha_{jp}\partial_{sp})\,(\beta_{km}\beta_{kn}\partial_{mn}).$$

Кроме решения системы (23), (31) для конкретных материалов, т. е. при заданных $A_{i(kl)j}$, можно предложить еще один подход, когда $A_{i(kl)j}$ определяются при задании собственных операторов $D_{pq} = \bar{A}_{p(kl)q}\partial_{kl} - \rho\delta_{pq}\partial_{..}$ $(p = q)$ и векторов (30).

Умножим равенство (7) на T_{jq} — алгебраические дополнения элементов t_{jq}:

(33) $$L_{is}t_{sq}T_{jq} = t_{ip}D_{pq}T_{jq}.$$

Поскольку $t_{sq}T_{jq} = |T|\delta_{sj}$, то из (33) получим

(34) $$L_{ij}\,|T| = t_{ip}D_{pq}T_{jq}.$$

Для числовых матриц при $|T| \neq 0$ из (34) имели бы

$$L_{ij} = t_{ip}D_{pq}\frac{T_{jq}}{|T|}, \quad \text{причем} \quad \frac{T_{jq}}{|T|} = t_{qj}^{-1} = t_{jq}.$$

Но так как у нас матрицы операторные, то в правой части (34) надо выделить множитель $|T|$ или приравнять все коэффициенты в обеих частях при символах дифференцирования ∂_{klpqrs}. Запишем (34) подробнее:

$$(A_{i(kl)j}\partial_{kl} - \rho\delta_{ij}\partial_{..})\,|T| = t_{ip}\,(\bar{A}_{p(kl)q}\partial_{kl} - \rho\delta_{pq}\partial_{..})\,T_{jq} = t_{ip}\bar{A}_{p(kl)q}\partial_{kl}T_{jq} - \rho|T|\delta_{ij}\partial_{..}\,.$$

Отсюда получаем

(35) $$A_{i(kl)j}|T|\partial_{kl} = t_{ip}\bar{A}_{p(kl)q}T_{jq}\partial_{kl}, \qquad p = q.$$

Определяя алгебраические дополнения, найдем

$$T_{jq} = [t_{j1}\,(t_{i2}t_{i2}),\ t_{j2}\,(t_{i1}t_{i1}),\ t_{j3}]$$

и подставим их в (35):

(36) $$A_{i(kl)j}|T|\partial_{kl} = [A_{1(kl)1}t_{i1}t_{j1}\,(t_{s2}t_{s2}) + \bar{A}_{2(kl)2}t_{i2}t_{j2}\,(t_{s1}t_{s1}) + A_{3(kl)3}t_{i3}t_{j3}]\,\partial_{kl}.$$

Если выполняется равенство (36), то t_{j1}, t_{j2}, t_{j3} будут собственными векторами, а $\bar{A}_{1(kl)1}\partial_{kl}$, $\bar{A}_{2(kl)2}\partial_{kl}$, $\bar{A}_{3(kl)3}\partial_{kl}$ — собственными операторами. Действительно, из (36) имеем

$$A_{i(kl)j}t_{j1}|T|\partial_{kl} = [\bar{A}_{1(kl)1}t_{i1}\,(t_{j1}t_{j1})\,(t_{s2}t_{s2}) + \bar{A}_{2(kl)2}t_{i2}\,(t_{j2}t_{j1})\,(t_{s1}t_{s1}) +$$
$$+ \bar{A}_{3(kl)3}t_{i3}\,(t_{j3}t_{j1})]\,\partial_{kl} = \bar{A}_{1(kl)1}t_{i1}|T|\partial_{kl}.$$

Аналогичны соотношения для t_{j2}, t_{j3}. Подставим (30), (32) в (36):

(37) $$A_{i(kl)j}\alpha_{mp}\alpha_{mq}\beta_{nr}\beta_{ns}\partial_{klpqrs} = [\bar{A}_{1(kl)1}\alpha_{ip}\alpha_{jq}\beta_{nr}\beta_{ns} + \bar{A}_{2(kl)2}\alpha_{mp}\alpha_{mq}\beta_{ir}\beta_{js} +$$
$$+ \bar{A}_{3(kl)3}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jfg}\alpha_{mp}\alpha_{fq}\beta_{nr}\beta_{gs}]\,\partial_{klpqrs}.$$

В (37) и нужно приравнивать коэффициенты при ∂_{klpqrs} с учетом приведения подобных. Если задавать величины α_{js}, β_{jp}, $\bar{A}_{p(kl)q}$, $p = q$, то из (37) можно определить коэффициенты $A_{i(kl)j}$, а через них — и модули упругости A_{iklj} [14, 15] всех анизотропных материалов, которые допускают приведение системы (1) к диагональному виду.

Для краткости запишем (37) условно в виде

$$a_{klpqrs}\partial_{klpqrs} = a_{(klpqrs)}\partial_1^{i_1}\partial_2^{i_2}\partial_3^{i_3} = 0,$$

причем $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=6$, а $a_{(klpqrs)}$ означает, что нужно в круглых скобках произвести все перестановки индексов и просуммировать соответствующие коэффициенты, например: $a_{(111112)}=a_{111112}+a_{111121}+a_{111211}+a_{112111}+$ $+a_{121111}+a_{211111}$. Тогда (37) сведется к уравнениям $a_{(klpqrs)}=0$. Используя лексикографическое расположение, выпишем возможные выражения $\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\partial_3^{\alpha_3}$, при которых следует приравнивать коэффициенты:

$$\partial_1^6;\ \partial_1^5\partial_2,\ \partial_1^5\partial_3;\ \partial_1^4\partial_2^2,\ \partial_1^4\partial_2\partial_3,\ \partial_1^4\partial_3^2;\ \partial_1^3\partial_2^3,$$
$$\partial_1^3\partial_2^2\partial_3,\ \partial_1^3\partial_2\partial_3^2,\ \partial_1^3\partial_3^3;\ \partial_1^2\partial_2^4,\ \partial_1^2\partial_2^3\partial_3,\ \partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2,$$
$$\partial_1^2\partial_2\partial_3^3,\ \partial_1^2\partial_3^4;\ \partial_1\partial_2^5,\ \partial_1\partial_2^4\partial_3,\ \partial_1\partial_2^3\partial_3^2,\ \partial_1\partial_2^2\partial_3^3,$$
$$\partial_1\partial_2\partial_3^4,\ \partial_1\partial_3^5;\ \partial_2^6;\ \partial_2^5\partial_3;\ \partial_2^4\partial_3^2,\ \partial_2^3\partial_3^3;\ \partial_2^2\partial_3^4;\ \partial_2\partial_3^5;\ \partial_3^6.$$

Отсюда видно, что (37) равносильно 28 независимым уравнениям вида $a_{(klpqrs)}=0$.

Рассмотрим (37), когда индексы одинаковые, т. е. $a_{(111111)}=0$, $a_{(222222)}=$ $=0$, $a_{(333333)}=0$:

(38)
$$A_{i(11)j}\alpha_{m1}\alpha_{m1}\beta_{n1}\beta_{n1}=\bar{A}_{1(11)1}\alpha_{i1}\alpha_{j1}\beta_{n1}\beta_{n1}+$$
$$+\bar{A}_{2(11)2}\alpha_{m1}\alpha_{m1}\beta_{i1}\beta_{j1}+\bar{A}_{3(11)3}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jfg}\alpha_{m1}\alpha_{f1}\beta_{n1}\beta_{g1},$$
$$A_{i(22)j}\alpha_{m2}\alpha_{m2}\beta_{n2}\beta_{n2}=\bar{A}_{1(22)1}\alpha_{i2}\alpha_{j2}\beta_{n2}\beta_{n2}+$$
$$+\bar{A}_{2(22)2}\alpha_{m2}\alpha_{m2}\beta_{i2}\beta_{j2}+\bar{A}_{3(22)3}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jfg}\alpha_{m2}\alpha_{f2}\beta_{n2}\beta_{g2},$$
$$A_{i(33)j}\alpha_{m3}\alpha_{m3}\beta_{n3}\beta_{n3}=\bar{A}_{1(33)1}\alpha_{i3}\alpha_{j3}\beta_{n3}\beta_{n3}+$$
$$+\bar{A}_{2(33)2}\alpha_{m3}\alpha_{m3}\beta_{i3}\beta_{j3}+\bar{A}_{3(33)3}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jfg}\alpha_{m3}\alpha_{f3}\beta_{n3}\beta_{g3}.$$

Если $\alpha_{m1}\alpha_{m1}\neq 0$, $\beta_{n1}\beta_{n1}\neq 0$, то из первого уравнения (38) находим

(39)
$$A_{i(11)j}=\bar{A}_{1(11)1}\frac{\alpha_{i1}\alpha_{j1}}{\alpha_{m1}\alpha_{m1}}+\bar{A}_{2(11)2}\frac{\beta_{i1}\beta_{j1}}{\beta_{n1}\beta_{n1}}+\bar{A}_{3(11)3}\frac{\varepsilon_{imn}\alpha_{m1}\beta_{n1}\varepsilon_{jfg}\alpha_{f1}\beta_{g1}}{\alpha_{m1}\alpha_{m1}\beta_{n1}\beta_{n1}}.$$

Если $\alpha_{m2}\alpha_{m2}\neq 0$, $\beta_{n2}\beta_{n2}\neq 0$ и $\alpha_{m3}\alpha_{m3}\neq 0$, $\beta_{n3}\beta_{n3}\neq 0$, то из (38) получаем

(40)
$$A_{i(22)j}=\bar{A}_{1(22)1}\frac{\alpha_{i2}\alpha_{j2}}{\alpha_{m2}\alpha_{m2}}+\bar{A}_{2(22)2}\frac{\beta_{i2}\beta_{j2}}{\beta_{n2}\beta_{n2}}+\bar{A}_{3(22)3}\frac{\varepsilon_{imn}\alpha_{m2}\beta_{n2}\varepsilon_{jfg}\alpha_{f2}\beta_{g2}}{\alpha_{m2}\alpha_{m2}\beta_{n2}\beta_{n2}},$$
$$A_{i(33)j}=\bar{A}_{1(33)1}\frac{\alpha_{i3}\alpha_{j3}}{\alpha_{m3}\alpha_{m3}}+\bar{A}_{2(33)2}\frac{\beta_{i3}\beta_{j3}}{\beta_{n3}\beta_{n3}}+\bar{A}_{3(33)3}\frac{\varepsilon_{imn}\alpha_{m3}\beta_{n3}\varepsilon_{jfg}\alpha_{f3}\beta_{g3}}{\alpha_{m3}\alpha_{m3}\beta_{n3}\beta_{n3}}.$$

Но формулы (39), (40) есть представления матриц $A_{i(11)j}$, $A_{i(22)j}$, $A_{i(33)j}$ через собственные числа и векторы. Учитывая (31), несложно проверить, что $\bar{A}_{1(11)1}$, $\bar{A}_{2(11)2}$, $\bar{A}_{3(11)3}$ — собственные числа, а α_{j1}, β_{j1}, $\varepsilon_{jfg}\alpha_{f1}\beta_{g1}$ — собственные векторы матрицы $A_{i(11)j}$ (см. (39)). Аналогично будет для $A_{i(22)j}$, $A_{i(33)j}$ (см. (40)).

Так как имеют место условия симметрии $A_{i(kl)j}=A_{k(ij)l}$ [14, 15], то они накладывают дополнительные связи на величины в правых частях (39), (40):

(41)
$$\bar{A}_{1(11)1}\frac{\alpha_{21}^2}{\alpha_{m1}\alpha_{m1}}+\bar{A}_{2(11)2}\frac{\beta_{21}^2}{\beta_{n1}\beta_{n1}}+\bar{A}_{3(11)3}\frac{(\alpha_{31}\beta_{11}-\alpha_{11}\beta_{31})^2}{\alpha_{m1}\alpha_{m1}\beta_{n1}\beta_{n1}}=$$
$$=\bar{A}_{1(22)1}\frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{m2}\alpha_{m2}}+\bar{A}_{2(22)2}\frac{\beta_{12}^2}{\beta_{n2}\beta_{n2}}+\bar{A}_{3(22)3}\frac{(\alpha_{22}\beta_{32}-\alpha_{32}\beta_{22})^2}{\alpha_{m2}\alpha_{m2}\beta_{n2}\beta_{n2}},$$
$$\bar{A}_{1(11)1}\frac{\alpha_{31}^2}{\alpha_{m1}\alpha_{m1}}+\bar{A}_{2(11)2}\frac{\beta_{31}^2}{\beta_{n1}\beta_{n1}}+\bar{A}_{3(11)3}\frac{(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11})^2}{\alpha_{m1}\alpha_{m1}\beta_{n1}\beta_{n1}}=$$
$$=\bar{A}_{1(33)1}\frac{\alpha_{13}^2}{\alpha_{m3}\alpha_{m3}}+\bar{A}_{2(33)2}\frac{\beta_{13}^2}{\beta_{n3}\beta_{n3}}+\bar{A}_{3(33)3}\frac{(\alpha_{23}\beta_{33}-\alpha_{33}\beta_{23})^2}{\alpha_{m3}\alpha_{m3}\beta_{n3}\beta_{n3}},$$
$$\bar{A}_{1(22)1}\frac{\alpha_{32}^2}{\alpha_{m2}\alpha_{m2}}+\bar{A}_{2(22)2}\frac{\beta_{32}^2}{\beta_{n2}\beta_{n2}}+\bar{A}_{3(22)3}\frac{(\alpha_{12}\beta_{22}-\alpha_{22}\beta_{12})^2}{\alpha_{m2}\alpha_{m2}\beta_{n2}\beta_{n2}}=$$
$$=\bar{A}_{1(33)1}\frac{\alpha_{23}^2}{\alpha_{m3}\alpha_{m3}}+\bar{A}_{2(33)2}\frac{\beta_{23}^2}{\beta_{n3}\beta_{n3}}+\bar{A}_{3(33)3}\frac{(\alpha_{33}\beta_{13}-\alpha_{13}\beta_{33})^2}{\alpha_{m3}\alpha_{m3}\beta_{n3}\beta_{n3}}.$$

Если задаем матрицы по формулам (39), (40), то величины в правых частях должны подчинить условиям (31), (41).

Из (39), (40) видно, что соответствующие матрицы собственных векторов для $A_{i(11)j}$, $A_{i(22)j}$, $A_{i(33)j}$ при прямом подходе следует записывать (нумеровать) так

$$(42)\qquad [\alpha_{j1},\ \hat{\beta}_{i1},\ \varepsilon_{ifg}\alpha_{f1}\beta_{g1}],\qquad [\alpha_{j2},\ \hat{\beta}_{i2},\ \varepsilon_{ifg}\alpha_{f2}\beta_{g2}],\qquad [\alpha_{j3},\ \hat{\beta}_{i3},\ \varepsilon_{ifg}\alpha_{f3}\beta_{g3}],$$

чтобы выполнялись условия (31), (41). Далее по первым двум столбцам матриц (42) строятся матрицы α_{js}, $\hat{\beta}_{ip}$, по которым находятся возможные собственные векторы для операторов $\tilde{L}_{ij}$:

$$(43)\qquad t_{j1} = \alpha_{js}\partial_s,\qquad t_{j2} = \beta_{jp}\partial_p,\qquad t_{j3} = \varepsilon_{jmn}t_{m1}t_{n2}.$$

Собственные операторы должны иметь вид

$$(44)\qquad \begin{aligned} D_{11} &= \tilde{A}_{1(kl)1}\partial_{kl} - \rho\partial_{..} = (\tilde{A}_{1(11)1}\partial_{11} + \tilde{A}_{1(22)1}\partial_{22} + \tilde{A}_{1(33)1}\partial_{33}) + \\ &\quad + 2\tilde{A}_{1(23)1}\partial_{23} + 2\tilde{A}_{1(13)1}\partial_{13} + 2\tilde{A}_{1(12)1}\partial_{12} - \rho\partial_{..}\,, \\ D_{22} &= \tilde{A}_{2(kl)2}\partial_{kl} - \rho\partial_{..} = (\tilde{A}_{2(11)2}\partial_{11} + \tilde{A}_{2(22)2}\partial_{22} + \tilde{A}_{2(33)2}\partial_{33}) + \\ &\quad + 2\tilde{A}_{2(23)2}\partial_{23} + 2\tilde{A}_{2(13)2}\partial_{13} + 2\tilde{A}_{2(12)2}\partial_{12} - \rho\partial_{..}\,, \\ D_{33} &= \tilde{A}_{3(kl)3}\partial_{kl} - \rho\partial_{..} = (\tilde{A}_{3(11)3}\partial_{11} + \tilde{A}_{3(22)3}\partial_{22} + \tilde{A}_{3(33)3}\partial_{33}) + \\ &\quad + 2\tilde{A}_{3(23)3}\partial_{23} + 2\tilde{A}_{3(13)3}\partial_{13} + 2\tilde{A}_{3(12)3}\partial_{12} - \rho\partial_{..}\,. \end{aligned}$$

Таким образом, зная собственные числа и векторы матриц $A_{i(11)j}$, $A_{i(22)j}$, $A_{i(33)j}$, можно определить собственные векторы (43) операторов L_{ij} и частично собственные операторы (слагаемые в круглых скобках в (44)). Остальные коэффициенты в (44) находим из условия, что выражения (43) — собственные векторы, непосредственно действуя на L_{ij} либо требуя выполнения оставшихся уравнений системы (23) или (37).

Как можно проверить, выражения (39), (40) удовлетворяют первым трем уравнениям (23). Четвертое и пятое уравнения (23) будут выполняться, если взять блочную матрицу в виде

$$(45)\qquad \begin{bmatrix} 2A_{i(23)j}, & A_{i(22)j} \\ A_{i(33)j}, & 2A_{i(23)j} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\tilde{A}_{1(23)1}\alpha_{i2} + \tilde{A}_{1(22)1}\alpha_{i3} \\ \tilde{A}_{1(33)1}\alpha_{i2} + 2\tilde{A}_{1(23)1}\alpha_{i3} \end{bmatrix} \frac{[\alpha_{j2},\ \alpha_{j3}]}{\alpha_{k2}\alpha_{k2} + \alpha_{k3}\alpha_{k3}} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2\tilde{A}_{2(23)2}\beta_{i2} + \tilde{A}_{2(22)2}\beta_{i3} \\ \tilde{A}_{2(33)2}\beta_{i2} + 2\tilde{A}_{2(23)2}\beta_{i3} \end{bmatrix} \frac{[\beta_{j2},\ \beta_{j3}]}{\beta_{k2}\beta_{k2} + \beta_{k3}\beta_{k3}} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2\tilde{A}_{3(23)3}\varepsilon_{imn}\alpha_{m2}\beta_{n2} + \tilde{A}_{3(22)3}\varepsilon_{imn}\alpha_{m3}\beta_{n3} \\ \tilde{A}_{3(33)3}\varepsilon_{imn}\alpha_{m2}\beta_{n2} + 2\tilde{A}_{3(23)3}\varepsilon_{imn}\alpha_{m3}\beta_{n3} \end{bmatrix} \frac{[\varepsilon_{jmn}\alpha_{m2}\beta_{n2},\ \varepsilon_{jmn}\alpha_{m3}\beta_{n3}]}{\alpha_{k2}\alpha_{k2}\beta_{q2}\beta_{q2} + \alpha_{k3}\alpha_{k3}\beta_{q3}\beta_{q3}}.$$

Подобные решения выписываются и для остальных уравнений (23). Выражения соответствующих матриц $A_{i(kl)j}$, получаемых из (39), (40), (45) и аналогичных решений (23), должны совпадать между собой. Кроме того, еще необходимо выполнение условий симметрии $A_{i(kl)j} = A_{k(ij)l}$ [14, 15]. Все это накладывает дополнительные связи (типа (41)) на величины в правой части (45). Из-за громоздкости формул не будем их выписывать.

Таким образом, изложенный выше подход позволяет в принципе определить все анизотропные материалы, допускающие приведение системы (1) к диагональному виду. Постановка краевых задач для функций v_j — предмет особых исследований.

Если при преобразованиях системы (1) допускаются операторы с переменными коэффициентами, то вместо транспонированных матриц надо использовать сопряженные матрицы операторов [20]. Для операторов вида

$$A_{ij} = a_{ij}(x_s) + a_{ijk}(x_s)\,\partial_k + a_{ij(kl)}(x_s)\,\partial_{kl} + a_{ij(klm)}(x_s)\,\partial_{klm} + \ldots$$

формально сопряженный оператор

$$A^*_{ji} = a_{ij} - \partial_k a_{ijk} + \partial_{kl}a_{ij(kl)} - \partial_{klm}a_{ij(klm)} + \ldots$$

Пусть $A^* = A$, $D^* = D$ и $AC = BD$, тогда $C^*A = DB^*$. Если $u = C\varphi$, где $D\varphi = 0$, то удовлетворяется уравнение $Au = AC\varphi = BD\varphi = 0$. Если же $\varphi = B^*\tilde{u}$, где $A\tilde{u} = 0$, то выполняется уравнение $D\varphi = DB^*\tilde{u} = C^*A\tilde{u} = 0$.

Если $A\tilde{u} = 0$, то $u = CB^*\tilde{u}$ — также решение: $Au = ACB^*\tilde{u} = BDB^*\tilde{u} = BC^*A\tilde{u} = 0$.

Для изотропного материала в случае статики операторы имеют вид

$$A_{ij} = \partial_{ij} + \mu_1\delta_{ij}\partial_{ss} = A^*_{ji}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$C_{jk} = (1 + 2\mu_1)\,\delta_{jk} - x_k\partial_j, \quad C^*_{kj} = 2\,(1 + \mu_1)\,\delta_{jk} + x_k\partial_j,$$

$$B_{ij} = (2\mu_1 - 1)\,\delta_{ij} - x_j\partial_i, \quad B^*_{ji} = 2\mu_1\delta_{ij} + x_j\partial_i,$$

$$D_{jk} = (1 + \mu_1)\,\delta_{jk}\partial_{pp} = D^*_{kj}, \quad x_4 = 1, \quad \partial_4 = 0,$$

причем соотношения $AC = BD$, $C^*A = DB^*$ выполняются. Теперь запишем известное решение Папковича — Нейбера [1] так:

$$u_j = C_{jk}\varphi_k = (1 + 2\mu_1)\,\varphi_j - x_1\partial_j\varphi_1 - x_2\partial_j\varphi_2 - x_3\partial_j\varphi_3 - \partial_j\varphi_4, \tag{46}$$
$$D_{jk}\varphi_k = (1 + \mu_1)\,\partial_{pp}\varphi_j = 0.$$

Выражение функций φ_j через решение уравнений Ламе следующее:

$$\varphi_j = B^*_{ji}\tilde{u}_i = 2\mu_1\tilde{u}_j + x_j\partial_i\tilde{u}_i, \quad \tilde{u}_4 = 0, \tag{47}$$
$$A_{ij}\tilde{u}_j = \partial_{ij}\tilde{u}_j + \mu_1\partial_{ss}\tilde{u}_i = 0.$$

Выпишем еще формулу производства новых решений:

$$u_j = C_{jk}B^*_{ki}\tilde{u}_i = \{2\mu_1\,[(1 + 2\mu_1)\,\delta_{ji} + x_j\partial_i - x_i\partial_j\,] - x_kx_k\partial_{ji}\}\,\tilde{u}_i =$$
$$= 2\mu_1\,[(1 + 2\mu_1)\,\tilde{u}_j + x_j\partial_i\tilde{u}_i - x_i\partial_j\tilde{u}_i\,] - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)\,\partial_{ji}\tilde{u}_i.$$

Здесь $A\tilde{u} = 0$.

Формулы (46), (47) решают давно дискутируемый вопрос о полноте и общности решения Папковича — Нейбера. Из (47) следует

$$\varphi_j = 2\mu_1\tilde{u}_j + x_j\varphi_4, \quad j = 1, 2, 3, \quad \varphi_4 = \partial_i\tilde{u}_i,$$
$$\partial_i\varphi_j = 2\mu_1\partial_i\tilde{u}_j + \delta_{ji}\varphi_4 + x_j\partial_i\varphi_4;$$
$$\partial_i\varphi_i = (2\mu_1 + 3)\,\varphi_4 + x_i\partial_i\varphi_4, \tag{48}$$

т. е. функции φ_j связаны между собой соотношением (48).

Замечание. Приведенные в работе формулы не исчерпывают всех решений системы (1). Для полной общности необходимо рассматривать уравнения $Dv = f$, $Tf = 0$ или $D\varphi = f$, $Bf = 0$. Решение Папковича — Нейбера (46) является общим, так как для него, как показывает непосредственная проверка, условие общности $D\,\mathrm{Ker}\,C = \mathrm{Ker}\,B$ [20] выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Папкович П. Ф.** Теория упругости.— Л.; М.: Оборонгиз, 1939.
2. **Галеркин Б. Г.** Собрание сочинений.— М.: Изд-во АН СССР, 1952.— Т. 1.
3. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений.— М.; Л.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1947.
4. **Крутков Ю. А.** Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
5. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
6. **Байда Э. Н.** Общие решения теории упругости и задачи о параллелепипеде и цилиндре.— Л.: Госстройиздат, 1961.
7. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977.
8. **Остросаблин Н. И.** Общее представление решения уравнений линейной теории упругости изотропного тела // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1983.— Вып. 61.
9. **Остросаблин Н. И.** К общему решению уравнений линейной теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1989.— Вып. 92.
10. **Marguerre K.** Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie // ZAMM.— 1955.— Bd 35, H. 6/7.

11. **Truesdell C.** Invariant and complete stress functions for general continua // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1959.— V. 4, N 1.
12. **Остросаблин Н. И., Сенашов С. И.** Общие решения и симметрии уравнений линейной теории упругости // ДАН СССР.— 1992.— Т. 322, № 3.
13. **Norris A. N.** On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes // Quart. J. Mech. and Appl. Math.— 1989.— V. 42, N 3.
14. **Остросаблин Н. И.** О матрице коэффициентов в уравнениях линейной теории упругости // ДАН СССР.— 1991.— Т. 321, № 1.
15. **Остросаблин Н. И.** Об уравнениях линейной теории упругости //ПМТФ.— 1992.— № 3.
16. **Борок В. М.** О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика.— 1957.— № 1.
17. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
18. **Marciniak J. J.** The generalized scalar wave equation and linear differential invariants in linear elasticity // Intern. J. Engng Sci.— 1989.— V. 27, N 6.
19. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1986.— Вып. 75.
20. **Zhang Hong-qing, Yang Guang.** Constructions of the general solution for a system of partial differential equations with variable coefficients // Appl. Math. and Mech. (Engl. Ed.).— 1991.— V. 12, N 2.

г. Новосибирск *Поступила 16/X 1992 г.*

УДК 539.3

В. М. Александров, Б. И. Сметанин

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ САКА ПРИ ДЕТАЛЬНОМ УЧЕТЕ МЕЖАТОМНЫХ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ

В [1] рассмотрена задача Гриффитса при детальном учете межатомных сил сцепления, действующих между берегами трещины. При этом силы сцепления вносятся в граничные условия, в результате чего задача приводится к нелинейному интегродифференциальному уравнению. В настоящей работе в аналогичной постановке рассмотрена осесимметричная задача о растяжении упругого пространства, ослабленного круглой в плане плоской трещиной. Задача приведена к решению нелинейного интегродифференциального уравнения, которое решается методами регулярных и сращиваемых асимптотических разложений. С использованием одного из найденных асимптотических решений получено также численное решение исследуемого интегродифференциального уравнения. Параметры критического состояния трещины определяются из условия плавности смыкания берегов трещины.

1. Пусть упругое пространство с правильной атомной решеткой содержит в плоскости $z = 0$ круглую трещину радиуса a. Трещина находится в раскрытом состоянии под действием приложенных на бесконечности растягивающих усилий $\sigma_z = p = \mathrm{const}$. При превышении нормального межатомного расстояния b между слоями атомов возникают силы сцепления, интенсивность которых σ_z может быть взята в виде [1]

$$\sigma_z = 2\theta\varepsilon g(\varepsilon/d) \qquad (\theta = G(1 - \nu)^{-1}). \tag{1.1}$$

Здесь G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $\varepsilon = \Delta b/b$; $b + \Delta b$ — расстояние между слоями атомов; $d = \delta/b$ — относительное расстояние между слоями атомов, при котором силы сцепления достигают максимума, равного σ_p — теоретическому пределу прочности тела. Функция $g(x)$ монотонно убывающая не медленнее, чем $x^{-\alpha}$ ($\alpha > 2$), удовлетворяющая условиям

$$g(0) = 1, \quad g(\infty) = 0, \quad g(1) + g'(1) = 0.$$