

СХОДЯЩИЕСЯ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С УМЕНЬШАЮЩЕЙСЯ ПЛОТНОСТЬЮ

Вопросам кумуляции энергии ударных волн (УВ) посвящено большое число работ (см., например, [1—8]). При этом определенный интерес представляет исследование УВ, распространяющихся в сторону уменьшения плотности. В случае концентрических сходящихся УВ такая задача решена в [7] методом Уизема [6], который позволяет оценить параметры газа во фронте волны при наличии движущегося из бесконечности поршня, обеспечивающего непрерывный приток энергии в область фокусировки.

В данной работе проведено сравнение решения [7] с результатами приближенного рассмотрения задачи о мгновенном выделении энергии (сильном взрыве) на границе замкнутой области с уменьшающейся к центру плотностью среды. Даны также автомодельные решения задачи о распространении сферической сходящейся в сторону уменьшения плотности УВ в двух предельных случаях: адиабатическом и изотермическом приближениях. Рассмотрение последнего режима процесса связано со стадией движения, когда существенное влияние на распределение параметров течения среды оказывает перенос энергии излучением. В отличие от [7] автомодельное исследование позволило получить как закон движения фронта УВ, так и распределения параметров течения за фронтом.

1. Рассмотрим распространение УВ в сторону уменьшения геометрического сечения A и плотности среды ρ_0 при двух предельных законах выделения энергии на ее границе: 1) выходе стационарной сильной УВ, создаваемой движущимся из бесконечности поршнем; 2) сильном взрыве на абсолютно жесткой стенке, ограничивающей область с переменными A и ρ_0 . Физически это означает, что в первом случае время фокусировки УВ t_* много меньше времени t^0 прихода поршня к границе области ($t_* \ll t^0$), во втором $t_* \gg \tau$ (τ — длительность выделения энергии).

В случае 1, применяя правило характеристик Уизема [6], можно получить уравнение для скорости фронта сильной УВ в области с уменьшающимися A и ρ_0 :

$$(1.1) \quad d \ln (D_1 \rho_0^\beta A^\eta) / dx = 0.$$

Здесь x — координата фронта, отсчитываемая от границы рассматриваемой области; $\eta = 1/[1 + 2/k + \sqrt{2k/(k-1)}]$; $\beta = 1/[2 + \sqrt{2k/(k-1)}]$; k — показатель политропы среды. Тогда для скорости фронта D_1 , давления во фронте $p_1 \sim \rho_0 D_1^2$ и мощности фронта УВ $W_1 \sim p_1 D_1$ получаем из (1.1) выражения

$$(1.2) \quad D_1 \sim \rho_0^{-\beta}(x) A^{-\eta}(x), \quad p_1 \sim \rho_0^{1-2\beta}(x) A^{-2\eta}(x), \quad W_1 \sim \rho_0^{1-3\beta}(x) A^{-3\eta}(x).$$

При вариации k в диапазоне 11/9...3 соответствующие значения показателей степени составляют $\beta = 0,188...0,268$, $\eta = 0,148...0,284$. Значит, скорость фронта D_1 непрерывно возрастает по мере распространения УВ при любых законах уменьшения ρ_0 и A . Давление p_1 и мощность W_1 могут либо уменьшаться, либо оставаться постоянными, либо возрастать в зависимости от комбинаций законов уменьшения ρ_0 и A , так как в указанном диапазоне k $1 - 2\beta > 0$ и $1 - 3\beta > 0$.

В случае 2 характерными параметрами задачи являются: поверхностная плотность энергии взрыва E_0 , радиус исследуемой области R_0 и начальная плотность среды $\rho_0(R)$, где $R = x_0 - x$ — радиус фронта УВ, x_0 — координата точки фокусировки. В данной постановке задача неавтомодельна в силу того, что есть начальный параметр с размерностью длины. Давление во фронте УВ пропорционально средней энергии единицы

объема [2]. Тогда, воспользовавшись известными законами сохранения на разрыве, можно получить выражения для скорости и мощности фронта сильной УВ:

$$(1.3) \quad D_1 \sim [E_0 S_0(R_0)/\rho_0(R) V(R)]^{1/2}, \quad W_1 \sim \rho_0 D_1^3 \sim \rho_0^{-1/2}(R) \times \\ \times [E_0 S_0(R)/V(R)]^{3/2}.$$

Здесь $S_0(R_0)$ — площадь поверхности выделения энергии; $V(R)$ — объем среды, вовлеченной в движение ударной волной. Анализ выражений (1.3) показывает, что для уменьшающейся $\rho_0(R)$ при некоторых фиксированных значениях радиуса R_{01} , R_{02} соответствующие значения D_1 и W_1 достигают минимума, а при дальнейшем распространении УВ непрерывно возрастают. В случае $\rho_0(R) = \text{const}$ D_1 и W_1 непрерывно уменьшаются.

Сопоставление двух предельных решений (1.2) и (1.3), например, для сферической симметрии и степенного закона уменьшения плотности $\rho_0 \sim R^\delta$ показывает, что по мере приближения к точке фокусировки нарастание D_1 и W_1 в случае сильного взрыва происходит более круто. Этот результат для $\delta = 2$ иллюстрируется на рис. 1, где кривые 1 отвечают выходу стационарной УВ, 2 — сильному взрыву. Показатели степени в (1.2) приняты в виде $\beta \cong 0,2$, $\eta \cong 0,2$ как средние в указанном выше диапазоне. За начало отсчета взяты значения D_{01} , W_{01} в точке $R = R_{01}$, начиная с которой УВ сильного взрыва ускоряется.

2. Рассмотрим задачу о сходящейся сферически-симметричной УВ в газе с уменьшающейся по степенному закону плотностью $\rho_0 = \text{const } r^{-\delta}$ (r — текущий радиус, $\delta > 0$). В адиабатическом приближении стандартная система уравнений газодинамики записывается как [5]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \partial \ln \rho / \partial t + u \partial \ln \rho / \partial r + \partial u / \partial r + 2u/r &= 0, \\ \partial u / \partial t + u \partial u / \partial r + \rho^{-1} \partial p / \partial r &= 0, \\ \partial \ln (p \rho^{-k}) / \partial t + u \partial \ln (p \rho^{-k}) / \partial r &= 0, \end{aligned}$$

где t — время; u , ρ , p — массовая скорость, плотность и давление среды; k — показатель адиабаты (политропы). Введем автомодельную переменную $\xi = r/R$ (R — радиус фронта УВ, принимаемый за масштаб длины). Решение системы (2.1) ищется в виде

$$(2.2) \quad p = \rho_0 \dot{R}^2 \pi(\xi), \quad \rho = \rho_0 g(\xi), \quad u = \dot{R} v(\xi).$$

Здесь $\dot{R} = dR/dt$ — скорость фронта УВ; $\pi(\xi)$, $g(\xi)$, $v(\xi)$ — безразмерные функции. Подставляя (2.2) в (2.1) и осуществляя разделение переменных t и ξ , получаем для R и параметров течения за фронтом соответствующие уравнения

$$(2.3) \quad R = A(-t)^\alpha, \quad t < 0$$

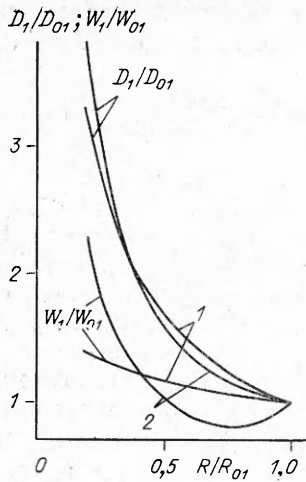
(A , α — постоянные);

$$(2.4) \quad \delta + v' + (v - \xi)(\ln g)' + 2v/\xi = 0, \quad v(\alpha - 1)/\alpha + (v - \xi)v' + \\ + \pi'/g = 0, \quad 2(\alpha - 1)/\alpha + \delta(1 - k) + (v - \xi)(\ln(\pi g^{-k}))' = 0$$

(штрих обозначает дифференцирование по ξ). Граничные условия для полученной системы уравнений при $\xi = 1$ определяем из (2.2), исходя из соотношений во фронте сильной УВ:

$$\pi(1) = 2/(k + 1), \quad g(1) = (k + 1)/(k - 1), \quad v(1) = 2/(k + 1).$$

В уравнениях (2.4) неизвестный параметр — показатель автомодельности α , значения δ и k задаются по условию задачи. Величина α , определяющая закон движения фронта УВ (2.3), находится из условия однозначности решения системы уравнений (2.4).



Р и с. 1

Вводя переменные $p(\xi) = \alpha^2 \pi(\xi)/\xi^2$, $V(\xi) = \alpha v(\xi)/\xi$, $\sigma(\xi) = g(\xi)$, $Z = kp/\sigma$, преобразуя систему уравнений (2.4) и соответствующие граничные условия и подбирая численным путем величину α , удовлетворяющую условию [1] прохождения интегральной кривой $Z(V)$ через особую точку Z^* , V^* , в которой определители полученной системы уравнений одновременно обращаются в нуль, имеем решение поставленной задачи с точностью до неопределенного множителя A . При этом распределение плотности газа в течении находится точно в силу того, что начальный закон $\rho_0(r)$ задан по условию, а плотность ρ_1 во фронте сильной УВ определяется по соотношению $\rho_1 = \rho_0(k + 1)/(k - 1)$.

В изотермическом приближении ($\partial T/\partial r = 0$, T — температура) система уравнений газодинамики для политропического газа имеет вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \partial \ln \rho / \partial t + u \partial \ln \rho / \partial r + \partial u / \partial r + 2u/r &= 0, \\ \partial u / \partial t + u \partial u / \partial r + (p/\rho^2) \partial p / \partial r &= 0. \end{aligned}$$

В отличие от [8] в данной работе рассматривается сходящаяся сферически-симметричная УВ. Ход решения аналогичен описанному выше. Вводя переменные $\xi = r/R$, v , g , π , находим $u = \dot{R}v(\xi)2/(k + 1)$, $\rho = \rho_0 g(\xi) \times (k + 1)/(k - 1)$, $p = \rho_0 \dot{R}^2 \pi(\xi)2/(k + 1)$ с граничными условиями $v(1) = g(1) = \pi(1) = 1$. Для автомодельных распределений параметров за фронтом УВ получаем из (2.5) систему уравнений

$$(2.6) \quad \begin{aligned} v(\alpha - 1)/\alpha + [2v/(k + 1) - \xi] dv/d\xi + [(k - 1)/(k + 1)] d \ln g/d\xi &= 0, \\ \delta + [2v/(k + 1) - \xi] d \ln g/d\xi + [2/(k + 1)] dv/d\xi + [4/(k + 1)] v/\xi &= 0. \end{aligned}$$

Сделав замену $\kappa = 1/\xi$, для функций v и g имеем

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{dv}{d\kappa} &= \frac{\delta \kappa (k - 1)/(k + 1) + 4v\kappa^2 (k - 1)/(k + 1)^2 - [2v\kappa/(k + 1) - 1] v(\alpha - 1)/\alpha}{\kappa \{ \kappa^2 2 (k - 1)/(k + 1)^2 - [2v\kappa/(k + 1) - 1]^2 \}}, \\ \frac{d \ln g}{d\kappa} &= \frac{4v\kappa/(k + 1) [2v\kappa/(k + 1) - 1] + 2v\kappa (1 - \alpha)/\alpha (k + 1) + \delta [2v\kappa/(k + 1) - 1]}{\kappa \{ [2v\kappa/(k + 1) - 1]^2 - 2(k - 1) \kappa^2/(k + 1)^2 \}}. \end{aligned}$$

Параметр α в законе движения фронта УВ (2.3) и в системе (2.6) определяется из условия прохождения интегральной кривой через особую точку уравнения (2.7):

$$\begin{aligned} \kappa^* &= \frac{2(1 - \alpha)/\alpha}{\sqrt{2(k - 1)/(k + 1)^2 \{ \sqrt{[2 + \delta + (1 - \alpha)/\alpha]^2 - 8(1 - \alpha)/\alpha + 2 + \delta + (1 - \alpha)/\alpha} \}}}, \\ v^* &= \frac{2 + \delta + (\alpha - 1)/\alpha + \sqrt{[2 + \delta + (\alpha - 1)/\alpha]^2 + 4(1 - \alpha)/\alpha}}{[2(1 - \alpha)/\alpha] \sqrt{(k - 1)/2}}. \end{aligned}$$

Так же как и в адиабатическом приближении, давление и скорость находятся с точностью до неопределенной постоянной, что связано с неопределенностью задания множителя A в (2.3).

Результаты вычислений значений показателя автомодельности α в адиабатическом и изотермическом приближениях приведены в табл. 1 и 2 соответственно. Как и в случае плоской симметрии [8], в изотермическом приближении α меньше, чем в адиабатическом, т. е. скорость $\dot{R} \sim \sim R^{(\alpha - 1)/\alpha}$ фронта «изотермической» УВ по мере приближения к центру

Таблица 1

| k | δ | | | | | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5/4 | 0,7443045 | 0,657853 | 0,5912589 | 0,5376453 | 0,4932809 | 0,4558393 |
| 7/5 | 0,7171205 | 0,6265963 | 0,5587242 | 0,505025 | 0,4611551 | 0,424506 |
| 5/3 | 0,6883547 | 0,5946639 | 0,5263143 | 0,4742293 | 0,4303797 | 0,3949006 |
| 3 | 0,6364135 | 0,5384225 | 0,4710393 | 0,420417 | 0,3804117 | 0,3477523 |

Таблица 2

| k | δ | | | | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5/4 | 0,5019466 | 0,4127426 | 0,3496855 | 0,302958 | 0,2670305 |
| 7/5 | 0,4525352 | 0,3624235 | 0,3014 | 0,2575455 | 0,2246003 |
| 5/3 | 0,404909 | 0,3155993 | 0,2577856 | 0,2174872 | 0,1878716 |
| 3 | 0,3333333 | 0,25 | 0,2 | 0,1666667 | 0,1428572 |

симметрии нарастает круче, чем скорость фронта «адиабатической» УВ. Такое поведение УВ связано с большим значением градиента давления за фронтом $\partial p/\partial r$ при $\partial T/\partial r = 0$, что видно из сравнения распределений p и ρ в течении, приведенных на рис. 2—4 для $\delta = 2$. За начало отсчета взяты значения параметров во фронте УВ: $r/R = 1$, $\rho/\rho_1 = p/p_1 = 1$. Кривые 1—4 отвечают $k = 5/4, 7/5, 5/3, 3$. Рис. 2 и 3 соответствуют адиабатическому приближению, а 4 — изотермическому.

3. Представленные в пп. 1 и 2 результаты могут оказаться полезными при выборе условий экспериментов по исследованиям поведения сходящихся УВ в средах с уменьшающейся плотностью, а также воздействия этих УВ на мишени, помещенные в центре области фокусировки. Так, из сравнения решений (1.2) и (1.3) (см. рис. 1) можно заключить, что УВ, образовавшаяся при сильном взрыве на границе области с уменьшающейся плотностью, обеспечивает более «контрастное» по времени излучательное, а также механическое воздействие на мишень, чем УВ, создаваемая поршнем. Определенный интерес представляет приведенное на рис. 2 распределение давления в течении при $k = 3, \delta = 2$. Давление за фронтом почти не зависит от координаты, т. е. постоянно. Расчеты показали, что при $\delta > 2$ градиент давления за фронтом УВ положителен ($\partial p/\partial r > 0$) при $k = 3$. Такой характер распределения p создает благоприятные условия для сжатия мишеней, например, в целях изучения фазовых превращений веществ и синтеза новых материалов.

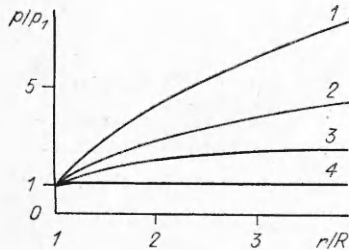


Рис. 2

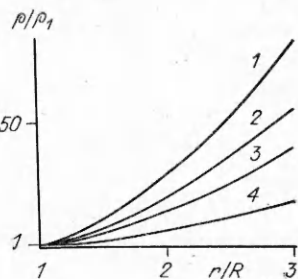


Рис. 3

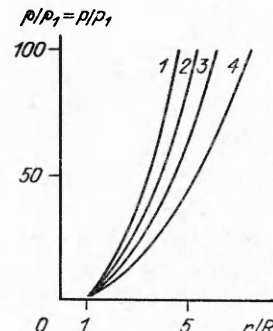


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Теоретическая физика.— М.: Наука, 1986.— Т. 6.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
3. Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. Явления неограниченной кумуляции.— М.: Наука, 1988.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1977.
5. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды.— М.: Наука, 1971.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
7. Tyl I., Włodarczyk E. An analysis of the concentric shock wave in a nonhomogeneous polytropic gas // J. Techn. Phys.— 1985.— V. 26, N 1.
8. Sachdev P. L., Ashraf S. Strong shock with radiation near the surface of a star // Phys. Fluids.— 1971.— V. 14, N 10.

г. Арзамас

Поступила 5/IV 1991 г.

УДК 533.6.011

В. М. Стрельченя

ОБ УЧЕТЕ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ЭНЕРГООБМЕНА ПРИ ОПИСАНИИ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ТЕРМИНАХ АДИАБАТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Решение полной системы газодинамических уравнений, дополненных уравнениями поуровневой кинетики для описания колебательно-вращательной релаксации или кинетики фазовых превращений [1—4], представляет собой слишком сложную задачу. Это делает актуальным поиск сокращенных способов описания кинетики с помощью приближенных решений релаксационных уравнений [1, 5]. Один из способов получения таких приближенных решений для произвольного вида скоростных коэффициентов развит в [6—9] и основан на введении адиабатических переменных, диагонализующих (в случае плавных по квантовому числу распределений) исходную систему уравнений поуровневой кинетики с точностью до малого параметра.

В данной работе, продолжающей исследования [6—9], рассмотрены два способа описания вклада межмолекулярного энергообмена в релаксацию заселенностей отдельных уровней в терминах адиабатических переменных, позволяющих получать приближенные аналитические решения кинетических уравнений для различных режимов релаксации.

1. Система релаксационных уравнений и адиабатические переменные. Рассмотрим процесс релаксации в смеси молекул сортов s . Предположим, что внутреннее состояние молекулы характеризуется одним квантовым числом ν (например, случай замедленной колебательной релаксации в смеси двухатомных молекул [10]). Уравнения для заселенностей отдельных энергетических уровней $n_s(\nu) \equiv n_s(\nu; \mathbf{r}, t)$ имеют вид [10]

$$(1.1) \quad \frac{\partial n_s(\nu)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u} n_s(\nu)] + \nabla \cdot [\mathbf{u}_s(\nu) n_s(\nu)] = I_\nu(s | \mathbf{n}),$$

$$I_\nu(s | \mathbf{n}) = \sum_{i=1,2} I_\nu^{(i)}(s | \mathbf{n}) = \sum_{i=1,2} \sum_{s_1} I_\nu^{(i)}(s, s_1 | \mathbf{n}),$$

где \mathbf{u} — гидродинамическая скорость; $\mathbf{u}_s(\nu)$ — скорость диффузии молекул сорта s в состоянии ν ; $I_\nu^{(1)}$ — линейная часть интеграла столкновений, описывающая энергообмен между внутренними и поступательными степенями свободы газа; $I_\nu^{(2)}$ — квадратичная часть интеграла столкновений, ответственная за межмолекулярный энергообмен.

Для концентраций

$$(1.2) \quad x_s(\nu) \equiv n_s(\nu)/n, \quad n \equiv \sum_{s,\nu} n_s(\nu)$$