УДК 519.245

Оценка методом Монте-Карло функциональных характеристик поля интенсивности, проходящего через случайную среду излучения*

А.Ю. Амбос[1], Г.А. Михайлов[1,2]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: ambos@sscc.ru (Амбос А.Ю.), gam@osmf.sscc.ru (Михайлов Г.А.)

Амбос А.Ю., Михайлов Г.А. Оценка методом Монте-Карло функциональных характеристик поля интенсивности, проходящего через случайную среду излучения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 4. — С. 349–365.

Получены численно-статистические оценки корреляционных характеристик и осредненных угловых распределений поля интенсивности излучения, проходящего через случайную среду. Сравнительные исследования проведены для элементарного пуассоновского и для “реалистического” поля оптической плотности среды. Полученные оценки подтверждают предположение о большой степени зависимости изучаемых величин от корреляционного масштаба и одномерного распределения поля плотности среды.

DOI: 10.15372/SJNM20180401

Ключевые слова: *метод Монте-Карло, пуассоновский ансамбль, случайное поле, корреляционная функция, корреляционный радиус, перенос излучения, функция пропускания, вероятность прохождения, метод “дельта-рассеяния”, двойная рандомизация.*

Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. Estimation by Monte Carlo method of functional characteristics of the radiation intensity field passing throw a random medium // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 4. — P. 349–365.

Numerical-statistical estimates of correlation characteristics and averaged angle near distributions of the radiation intensity field, passing throw a random medium are obtained. Comparative investigations were performed for an elementary Poisson field and for the “realistic” field of the medium optical density. The obtained estimates confirm the hypothesis about a strong dependence of investigated values on the correlation scale and the one-dimensional distribution of the medium density field.

Keywords: *Monte Carlo method, Poisson ensemble, random medium, correlation function, correlation radius, radiative transfer, transmission function, transmission probability, delta scattering, double randomization method.*

1. Введение

1.1. Решаемые в настоящей работе задачи связаны с вычислением математических ожиданий линейных функционалов от решения стохастического уравнения переноса излучения

*Работа выполнена в рамках госзадания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0315-2016-0002). Пункты 4–6 выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00530, № 17-01-00823, № 18-01-00356).

$$(\omega, \nabla\Phi) + \sigma(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r}, \omega) = q\sigma(\boldsymbol{r}) \int_\Omega w(\omega', \omega; \boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r})\, d\omega' + \Phi_0(\boldsymbol{r}, \omega), \tag{1}$$

где $\sigma(\boldsymbol{r})$ — случайное поле "оптической плотности" среды, $\Phi(\boldsymbol{r}, \omega)$ — интенсивность (плотность потока) излучения, $\boldsymbol{r} \in R^3$, $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \in \Omega = S^{(3)}$ — единичный вектор направления после рассеяния, $S^{(3)}$ — единичная сфера в R^3, ω' — вектор направления до рассеяния, q — вероятность выживания кванта излучения в точке столкновения (т. е. в конце свободного пробега кванта), $\Phi_0(\boldsymbol{r}, \omega)$ — плотность распределения источника частиц, $w(\omega', \omega; \boldsymbol{r}) = g(\mu, \boldsymbol{r})/2\pi$ — функция рассеяния, где $g(\mu, \boldsymbol{r})$ — индикатриса рассеяния и $\mu = (\omega', \omega)$. Рассматривается процесс переноса через слой $0 < x < H$. Функцию вида $\omega_x\Phi((H, y, z), \omega)$ будем называть полем яркости проходящего излучения, а функцию $I(H, y, z) = \int_\Omega \omega_x\Phi((H, y, z), \omega)\, d\omega$ — полем освещённости. Отметим, что $I(H, y, z)$ — это плотность числа квантов, пересекающих плоскость $\{H, y, z\}$. Рассматриваются линейные функционалы вида $J = \int_X \Phi(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{r}, \omega)$, $h(\boldsymbol{x})$ — весовая функция детектора излучения.

Соответствующий уравнению (1) случайный столкновительный марковский процесс переноса квантов излучения является фактически "мгновенным" во временном масштабе случайных флуктуаций среды. Поэтому непосредственное осреднение изучаемого функционала по реализациям среды, как правило, не имеет практического смысла. Ему, однако, можно придать практическое значение в случае стохастической однородной среды и однородного источника, которые образуют систему, эргодическую относительно осреднения рассматриваемого функционала, так как при этом осреднение по реализациям среды асимптотически эквивалентно осреднению по увеличивающемуся объёму (или площади) соответствующего "нормированного" детектора интенсивности излучения. Если при этом детектор фиксирует освещённость $I(H, y, z)$, то задача фактически сводится к осреднению вероятности $P_t(\sigma)$ прохождения кванта через среду [1].

1.2. В настоящей работе эффективно используется "метод двойной рандомизации" для оценки вероятностных моментов серии линейных функционалов:

$$J_k(\sigma) = \int \varphi(x; \sigma)h_k(x; \sigma)\, dx, \quad h_k \in L_\infty, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Этот метод определяется легко проверяемым соотношением [2]

$$\mathrm{E}\Big[\prod_{k=1}^{n} J_k(\sigma)\Big] = \mathrm{E}_{(\{\Omega_k\}, \sigma)}\Big[\prod_{k=1}^{n} \xi_k(\Omega_k; \sigma)\Big]. \tag{2}$$

Здесь Ω_k $(k = 1, \ldots, n)$ — условно-независимые траектории квантов излучения для реализации среды с плотностью σ, а $\{\xi_k(\Omega; \sigma)\}$ — несмещённые оценки функционалов $\{J_k(\sigma)\}$, то есть $\mathrm{E}_\sigma\xi_k(\Omega; \sigma) = J_k(\sigma)$.

Согласно правилу повторного осреднения (т. е. фактически по теореме Фубини о представлении интеграла в виде повторного), соотношение (2) реализуется следующим образом: строится реализация случайной среды (т. е., вообще говоря, поля σ) и затем в соответствующей фиксированной среде строится серия независимых (точнее, условно-независимых) траекторий $\{\Omega_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, которая даёт вклад в статистическую оценку величины (2).

Практически весьма важно, что при построении несмещённой оценки момента (2) для данной реализации σ требуется строить лишь n элементарных оценок функционала. В частности, при $n = 1$ можно строить лишь одну такую оценку, так как $\mathrm{E}_{(\Omega_1, \sigma)}\xi(\Omega_1, \sigma) =$

$\mathrm{E}J_1(\sigma)$; использование серии условно-независимых траекторий при этом может уменьшить трудоемкость оценки согласно формулам “метода расщепления” (см., например, [3]). Отметим, что при попадании траектории Ω в подобласть среды с уже выбранными значениями σ, их нельзя выбирать заново, иначе возникает ошибка перевыбора [1]. Отметим также, что согласно теореме Фубини правая часть соотношения (2) здесь должна оставаться конечной после замены $\xi_k(\Omega_k;\sigma)$ на $|\xi_k(\Omega_k;\sigma)|$. При $\xi_k(\Omega_k;\sigma) \geq 0$ соотношение (2) выполняется в любом случае. Ясно, что используя рассмотренный выше алгоритм оценки момента (2), одновременно можно строить также оценки моментов порядка $s < n$. При этом целесообразно использовать все различные подпоследовательности порядка s, получаемые из последовательности $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$.

1.3. Для решения рассматриваемых в настоящей работе задач методом Монте-Карло траектории квантов необходимо строить в геометрически сложных реализациях случайных сред. С этой целью в работе использован предложенный в [4] метод “дельта-рассеяния” (метод максимального сечения) на основе неравенства $\sigma(\boldsymbol{r}) \leq \sigma_m$, причём $\sigma_m \approx \max_{\boldsymbol{r}} \sigma(\boldsymbol{r})$. Отметим, что этот метод является прямым следствием инвариантности свойства пуассоновости точечного потока столкновений относительно случайного прореживания (см., например, [5, п. 1.4]). Для реализации соответствующего алгоритма здесь необходима идентификация элемента разбиения (ячейки), в котором происходит столкновение частицы, с целью определения значения плотности среды. В [6] представлены алгоритмы реализации представленных далее в пункте 5 мозаичных моделей случайных полей, а также соответствующие алгоритмы идентификации элемента разбиения и алгоритмы для вычисления “оптической длины поглощения” $\tau_c(\Omega)$, которая определена в [1].

1.4. Для коррелирования сравнительных оценок используется техника “little-frog” [3], т. е. последовательность псевдослучайных чисел разбивается на подпоследовательности для построения соответствующих траекторий частиц. Предварительно исходная последовательность разбивается на четыре части. Первая из них используется для моделирования поля $\sigma(\boldsymbol{r})$, вторая — для моделирования направлений пробегов, третья и четвёртая — для моделирования длины свободного пробега кванта методом “дельта-рассеяния”, как указано в [6].

2. Формулировка задачи об оценке функциональных характеристик случайного поля яркости

Для конкретизации математической формулировки задачи рассмотрим процесс переноса излучения (см., например, [7]) через плоский слой вещества $0 < x < H$ с коэффициентом ослабления $\sigma(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, причём $\sigma(\boldsymbol{r})$ — однородное изотропное случайное поле. Выполняется равенство $\sigma(\boldsymbol{r}) = \sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) + \sigma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r})$, где $\sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})$ — коэффициент рассеяния с заданной индикатрисой рассеяния $g(\mu)$ [7], причём $\sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})/\sigma(\boldsymbol{r}) \equiv q < 1$, σ_{c} — коэффициент поглощения. Предполагается, что средний косинус рассеяния $\mu_0 = \int_0^1 \mu g(\mu)\, d\mu$ близок к единице, т. е. рассеяние существенно анизотропно.

В качестве тестовой в п. 6 рассмотрена задача с параметрами $\mu_0 = 0.9$ и $q = 0.9$, которые соответствуют переносу видимого солнечного излучения через облачную атмосферу [8]. Рассеяние определяется стандартной индикатрисой Хеньи–Гринстейна с параметром μ_0 [7]:

$$g(\mu) = \frac{1}{2} \frac{1 - \mu_0^2}{(1 + \mu_0^2 - 2\mu_0 \mu)^{3/2}}.$$

Предполагается, что нормированный “на один квант” источник сосредоточен на границе слоя $x = 0$ и направлен по оси x, т. е. распределён с плотностью $f_1(y, z)\delta(\omega-(1, 0, 0))$, причём $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y, z)\, dydz = 1$; соответствующую вероятность прохождения обозначим через $P_t(\sigma)$. Введём также обозначение $P_t = \mathrm{E}P_t(\sigma)$, т. е. P_t — осреднённая по реализациям $\sigma(\boldsymbol{r})$ вероятность прохождения через указанный слой. Вследствие “горизонтальной” однородности стохастической среды для вычисления P_t можно использовать $f_1(y, z) = \delta(y)\delta(z)$ [7].

Вследствие эргодичности рассматриваемой системы вероятность прохождения кванта от достаточно протяжённого пограничного нормированного источника для представленных далее в п. 2 моделей стохастических сред близка к P_t практически для всех реализаций среды; это подтверждается результатами численного статистического моделирования, проведённого авторами [1]. Этот факт важен для численной статистической оценки осреднённой вероятности, так как вариант с точечным источником позволяет моделировать поле $\sigma(\boldsymbol{r})$ в достаточно ограниченном слое.

В настоящем пункте соответственно сказанному в п. 1.1 исследуется более реальная задача оценки показания достаточно протяжённого “нормированного” детектора частиц на верхней границе слоя в случае мононаправленного источника, распределённого равномерно на нижней границе (“один квант с единицы площади”). Из нижеследующего видно, что при выполнении определённых свойств эргодичности такое показание, как функция случайного поля σ, близко к P_t с дисперсией, асимптотически убывающей при увеличении площади нормированного детектора [9] соответственно корреляционной функции поля освещённости $I(H, y, z)$.

Поэтому одной из главных задач настоящей работы является построение алгоритмов метода двойной рандомизации для оценки значений корреляционной функции случайного поля освещённости на границе $x = H$. Строятся также статистические ядерные оценки плотности осреднённого углового распределения соответствующего поля яркости на основе аппроксимации ограниченной плотностью усечённого бета-распределения.

Требуемые результаты получаются для элементарной мозаичной модели P пуассоновского случайного поля $\sigma(\boldsymbol{r})$ с одномерным бернуллиевским распределением и для “реалистической” модели Σ_n, которая строится путём суммирования n независимых реализаций некоторого элементарного поля (см. далее п. 5). Сравнение таких оценок даёт возможность исследовать вопрос о том, в какой степени они определяются корреляционным радиусом однородного изотропного поля $\sigma(\boldsymbol{r})$, а также значениями математического ожидания $\mathrm{E}\sigma$ и дисперсии $\mathrm{D}\sigma$.

Осреднённые угловые распределения сравниваются также с аналогичными характеристиками для осреднённого поля $\sigma(\boldsymbol{r})$ (т. е. для $\sigma(\boldsymbol{r}) \equiv \sigma$).

3. Оценка корреляционных характеристик поля освещённости

3.1. Значение поля освещённости $I(\boldsymbol{r}_0) = I(\boldsymbol{r}_0, \sigma) = \int \omega_x \Phi((H, y_0, z_0), \omega)\, d\omega$ в точке $\boldsymbol{r}_0 = (H, y_0, z_0) \in \{x = H\}$ в значительной степени определяется значениями однородного поля σ в цилиндрической окрестности $\sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < r_{\mathrm{cyl}}$, $0 < x < H$ точки $\boldsymbol{r}_0$, так как чем больше r_{cyl}, тем меньше вклад от источников, расположенных вне цилиндра. Поскольку рассматриваемые далее в п. 5 случайные поля основаны на пуассоновских точечных потоках, то эвристически понятно, что для этих полей зависимость значений $\sigma(\boldsymbol{r}), \sigma(\boldsymbol{r}')$ уменьшается при $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \to \infty$ и, тем самым, $\mathrm{E}[I(\boldsymbol{r}_0)I(\boldsymbol{r}_0')] \to (\mathrm{E}I)^2$ при

$|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}'_0| \to \infty$. Следовательно, нормированная корреляционная функция поля проходящей радиации $K_I(r) \to 0$ при $r \to 0$.

Пусть показание детектора определяется величиной

$$I_T = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T I(y,z)\, dydz.$$

Отметим, что для "горизонтально" однородных источника и стохастической среды имеем $\mathrm{E}I_T(\sigma) = P_t$ и $I_T(\sigma) \asymp_{T\to\infty} P_t$ (см. п. 2).

По аналогии с [9], где рассмотрен одномерный вариант задачи, для двумерной области $0 \le y, z \le T, z = H$ в [1] получено асимптотическое соотношение

$$\mathrm{D}I_T \asymp_{T\to\infty} T^{-2}\mathrm{D}I\rho_2^{(t)}, \quad \text{где} \quad \rho_2^{(t)} = \int_0^\infty 2\pi r K_I(r)\, dr, \tag{3}$$

где $K_I(r)$ — нормированная корреляционная функция поля $I(\sigma)$, причём $\mathrm{D}I = \mathrm{D}I(\sigma)$.

Величину $\rho_2^{(t)}$ можно назвать "корреляционной площадью" случайного поля $I(\boldsymbol{r})$. Можно показать, что для n-мерного поля соответствующий "корреляционный объём" определяется формулой:

$$\rho_n^{(t)} = \int_0^\infty S_n r^{n-1} K_I(r)\, dr,$$

где S_n — площадь единичной n-мерной сферы, $n \ge 2$.

Для $K_I(r) = e^{-\lambda r}$ из (3) имеем

$$\mathrm{D}I_T \asymp_{T\to\infty} 2\pi T^{-2}\lambda^{-2}\mathrm{D}I, \quad \rho_2^{(t)} \asymp_{T\to\infty} 2\pi\lambda^{-2}. \tag{4}$$

Заметим, что оценка (3) величины $\mathrm{D}I_T$ даёт возможность получить оценку корреляционной площади $\rho_2^{(t)}$ для достаточно больших значений T; при этом контроль точности получается сравнением полученных оценок для значений размеров T и $T + \Delta T$.

3.2. С целью оценки значений корреляционной функции $K_I(r)$, дисперсии DI и корреляционной площади $\rho_2^{(t)}$ на основе "двойной рандомизации" можно использовать "метод сопряжённых блужданий" [7, 10] для оценки величины $I(y,z)$ при фиксированном σ. Этот метод формулируется на основе "теоремы оптической взаимности", т. е. двойственного представления линейного функционала: $I_p = (\Phi, p) = (\Phi^*, \Phi_0)$, где $\Phi \equiv \Phi(\boldsymbol{r};\omega)$ — плотность потока частиц (интенсивность излучения), Φ^* — решение сопряжённого уравнения переноса со свободным элементом $p \in L_\infty$, Φ_0 — плотность распределения источника частиц. Преобразование сопряжённого уравнения к виду прямого (см. [7, 10]) показывает, что для оценки величины I_p можно моделировать процесс переноса из источника с плотностью $p(\boldsymbol{r}, -\omega)$ и вычислять "показание приёмника" с весовой функцией $\Phi_0(\boldsymbol{r}, -\omega)$; в данном случае в качестве $\Phi_0(\boldsymbol{r}, \omega)$ рассматривается плотность распределения начальных рассеяний.

Для оценки величины $I(\boldsymbol{r}_0)$ в моделируемой "сопряжённой" траектории $\Omega^*(\sigma; r_0)$ начальные координаты определяются по формулам: $\boldsymbol{r}_0 = (H, y_0, z_0)$, $\omega = (\mu, \sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,$ $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi)$, причём μ распределено по закону Ламберта с плотностью вероятности $f_\mu(x) = 2x$, $0 < x < 1$, т. е. $\mu = \sqrt{\alpha}$, где α равномерно распределено в $(0,1)$; при этом следует вводить вспомогательный начальный "вес частицы" $Q_0 = \pi$ [1]. Вклад $\xi^*(\Omega^*(\sigma; r_0))$ сопряжённой траектории в статистическую оценку величины $I(\boldsymbol{r}_0)$ определяется суммой вкладов вида $h^*(\boldsymbol{r}, \omega) = \pi\Phi_0(\boldsymbol{r}, -\omega)/\sigma(\boldsymbol{r})$ для каждого столкновения и начального вклада

$\exp(-\int_0^H \sigma(t,y,z)\,dt)$ [1]. Если поглощение учитывается экспоненциальным множителем (см. [1, п. 1.4]), то $h(\boldsymbol{r},\omega)$ домножается на $\sigma(\boldsymbol{r})/\sigma_s(\boldsymbol{r})$.

3.3. Осреднённое показание детектора $\mathrm{E}I_T$ оценивается с помощью рандомизации по площади детектора, а величина $\mathrm{D}I_T$ — с дополнительной двойной рандомизацией согласно (2) при $n=2$. Аналогично можно оценивать корреляционную функцию поля яркости:

$$K_I(r) = \mathrm{E}[I(\boldsymbol{r}_0,\sigma)I(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r},\sigma)] - P_t^2, \quad |\boldsymbol{r}| = r,$$

причём в соответствующем выражении (2) $n=2$ и траектории $\Omega_1 = \Omega_1^*$, $\Omega_2 = \Omega_2^*$ строятся из точек $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}$ соответственно:

$$K_I(r) = \frac{\mathrm{E}_\sigma \mathrm{E}_{(\Omega_1^*,\Omega_2^*)}\xi^*(\Omega_1^*(\sigma;H,0,0))\xi^*(\Omega_2^*(\sigma;H,r,0)) - P_t^2}{\mathrm{D}I(\sigma)}.$$

Оценки значений корреляционной площади $\rho_2^{(t)}$ (см. п. 1.3) можно получить с помощью “тройной” рандомизации:

$$\rho_2^{(t)}\mathrm{D}I(\sigma) = 2\pi(40\mathrm{E}_\eta \mathrm{E}_\sigma \mathrm{E}_{(\Omega_1^*,\Omega_2^*)}\eta\xi^*(\Omega_1^*(\sigma;H,0,0))\xi^*(\Omega_2^*(\sigma;H,\eta,0)) - 800P_t^2),$$

где $\Omega^*(\sigma;H,\eta,0)$ — случайная сопряжённая (см. п. 3.2) траектория, начинающаяся в точке $(H,\eta,0)$, η — равномерно распределённая на интервале $0<x<40$ случайная величина, $P_t = \mathrm{E}P_t(\sigma) = \mathrm{E}_{(\sigma,\Omega^*)}\xi^*(\Omega^*(\sigma;H,\eta,0))$. Значение 40 длины интервала интегрирования второго момента было выбрано из предположения о том, что корреляционные функции полей яркости должны быть близки к соответствующим корреляционным функциям $K(r)$ случайных полей плотности среды и из того, что для рассматриваемых в работе полей

$$\rho_2^{(t)} = \int_0^\infty 2\pi r K(r;P)\,dr \approx 81.4301, \quad \int_{40}^\infty 2\pi r K(r;P)\,dr < 1.5\cdot 10^{-2}.$$

Дисперсия сопряжённой оценки величины $\rho_2^{(t)}$ оказалась слишком большой, в частности, из-за сильной анизотропии рассеяния и, следовательно, большого изменения функции $\Phi_0(\boldsymbol{r},\omega)$ по ω. Поэтому требуемые оценки были получены прямым моделированием на основе формулы (3), как указано в конце п. 3.1, с ограничением протяжённости слоя, которое может слабо влиять на сравнительный анализ величины $\rho_2^{(t)}$ для разных типов полей $\sigma(\boldsymbol{r})$.

4. Оценки угловой зависимости осреднённого поля яркости

4.1. Далее строятся оценки осреднённой по реализациям среды плотности углового распределения квантов прошедшего рассеянного излучения. При этом используется сферическая система координат направления ω в точке выхода: $\mu = \cos\theta$, φ — “широтный” угол, так что $\omega_x = \mu$, $\omega_y = \sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi$, $\omega_z = \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi$.

Для фиксированного $\sigma(\boldsymbol{r})$ искомая субстохастическая (т. е. ненормированная) плотность определяется формулой

$$f_\mu^{(s)}(x,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu\Phi_s(H,\omega;\sigma)\,d\varphi,$$

где Φ_s — плотность потока квантов, испытавших хотя бы одно рассеяние.

В настоящей работе для оценки осреднённой по реализациям $\sigma(r)$ плотности $f_\mu^{(s)}(x) = \mathrm{E} f_\mu^{(s)}(x,\sigma)$ используется статистическая ядерная оценка с прямоугольным “ядром” (см., например, [11]), которая строится на основе “микрогруппированной” выборки по аналогии с [12]. При этом нормированная плотность $f(x)$ оценивается среднеинтегральным значением вида $\hat{f}(x) \approx \frac{1}{h}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(x)$.

Для нахождения оптимального шага осреднения $h = h(x)$ минимизируется средний квадрат погрешности:

$$\delta^2(x) = \mathrm{E}_H\left(f(x) - \frac{m}{nh}\right)^2 = \left(f(x) - \mathrm{E}_H\left(\frac{m}{nh}\right)\right)^2 + \mathrm{D}_H\left(\frac{m}{nh}\right).$$

Здесь n — объём выборки (число прошедших квантов), m — соответствующее число элементов выборки в интервале $\left(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right)$; $f(x) = f_\mu(x) = f_\mu^{(s)}(x)/\int_0^1 f_\mu^{(s)}(y)\,dy$, символами E_H и D_H обозначены соответствующие моменты.

Используя выкладки из [11] для минимизирующего значения $h = h(x)$ (с точностью до бесконечно-малых величин более высокого порядка), получаем соотношение

$$h^5 \asymp \frac{144 f(x)}{n(f''(x))^2}. \tag{5}$$

Выражение (5) получено для прямого моделирования, т. е. для бернуллиевой оценки с дисперсией (на одно испытание) D_{bern}. В настоящей работе используется экспоненциальная оценка (см. [1, п. 1.4]) с дисперсией $D_{\exp}$. Поэтому использованную при выводе выражения (5) оценку $\mathrm{D}_H\left(\frac{m}{nh}\right) \approx \frac{f(x)h}{nh^2}$ следует домножать на величину локального отношения $D_{\exp}(h,x)/D_{\mathrm{bern}}(h,x)$. Поскольку эта величина априори не оценивается, то в настоящей работе оценка (5) значения h^5 домножалась на отношение $D_{\exp}/D_{\mathrm{bern}}$ соответствующих оценок осреднённой вероятности прохождения, т. е. было использовано некоторое среднее значение поправочного множителя. При этом в качестве объёма выборки используется сумма экспоненциальных весов рассеянных частиц, пересекающих границу $x = H$.

Далее в пункте приведены ядерные статистические оценки субстохастической плотности $f_\mu^{(s)}(x)$ для квантов излучения, прошедшего через представленный в п. 2 слой вещества толщиной $H = 10$ и $H = 40$ с двумя вариантами случайного поля $\sigma(\boldsymbol{r})$: элементарным бернуллиевским и реалистическим. Для построения ядерных оценок соответствующих плотностей была использована их аппроксимация усечёнными бета-плотностями:

$$f_\mu(x) \approx f_{b,\alpha,\beta}(x) = C_{b,\alpha,\beta}x^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad b > 1,$$

причём параметры b, α, β оценивались по выборке значений μ с “весом” квантов на границе $x = H$ путём решения системы уравнений:

$$C_{b,\alpha,\beta}\int_0^1 x^i x^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}dx = \mathrm{E}\mu^i, \quad i = 1,2,3,$$

где $C_{b,\alpha,\beta} = \left(\int_0^1 x^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}dx\right)^{-1}$.

Эта система решалась следующим образом. Третье уравнение (для $i = 3$) рассматривалось как уравнение относительно параметра b и решалось методом дихотомии невязки, причём значения $\alpha = \alpha(b)$, $\beta = \beta(b)$ находились из системы двух первых уравнений с помощью программы Maple.

Ядерная оценка строилась, начиная с $x \approx 0$, согласно (5). Значения параметров b, α, β, а также начального и последнего шагов h_0, h_N в ядерной оценке для различных вариантов плотности $f_\mu(x)$ приведены в таблицах 3 и 4.

5. Вычислительные пуассоновские модели поля $\boldsymbol{\sigma(r)}$

5.1. Для построения мозаичного поля Пуассона $\sigma(\boldsymbol{r}; P)$ пространство разбивается на ячейки ансамблем базовых гиперплоскостей, в котором гиперплоскость определяется точкой пуассоновского точечного потока интенсивности λ_p во вспомогательном параметрическом пространстве. Точка этого пространства объединяет расстояние h от заданного центра до базовой гиперплоскости и направление её "внешней", т. е. направленной от центра, нормали $\boldsymbol{n}$ к базовой гиперплоскости. В работе [13] (см. также [14]) построено кусочно-постоянное двумерное мозаичное поле Пуассона и показано, что его корреляционная функция экспоненциальна. В работе [15] дано l-мерное обобщение такого поля, то есть построено l-мерное кусочно-постоянное экспоненциально коррелированное мозаичное поле. В [15] также показано, что мозаичное поле Пуассона является однородным и изотропным в "узком" смысле. Для реализации поля $\sigma(\boldsymbol{r}; P)$ строится пуассоновский точечный поток в пространстве $\mathrm{R}^+ \times S^{(3)}$ с параметром λ_p , где $S^{(3)}$ — единичная сфера в R^3 с центром в начале координат. Затем пространство R^3 разбивается на ячейки, как указано выше, и для каждой ячейки независимо выбирается случайное постоянное в ячейке значение поля $\sigma(\boldsymbol{r})$ согласно некоторому распределению со средним значением $\mathrm{E}\sigma$ и дисперсией $\mathrm{D}\sigma$. Отметим, что каждая подобласть полностью определяется (идентифицируется) набором $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \ldots)$, $\gamma_k = \mathrm{sign}\,(F_k(\boldsymbol{r}))$, где $F_k(\boldsymbol{r})$ — левая часть уравнения $(\boldsymbol{n}_k, [h_k\boldsymbol{n}_k - \boldsymbol{r}]) = 0$ соответствующей плоскости Γ_k, а $\boldsymbol{r}$ — произвольная точка подобласти. Алгоритм построения реализации трёхмерного поля Пуассона построен и детально описан в [15]. Поле такого типа будем называть элементарным, а в случае бернуллиевского одномерного распределения σ — элементарным бернуллиевским.

Величину $\rho = \int_0^\infty K(r)\,dr$ обычно называют корреляционной длиной или корреляционным радиусом соответствующего изотропного поля. Здесь $K(r) = \frac{K(r)}{\mathrm{D}\sigma}$ — нормированная корреляционная функция. Для мозаичного поля Пуассона $K(r) = e^{-\pi\lambda_p r}$ (см., например, [15, 16]), т. е. корреляционная функция является экспоненциальной. Следовательно $\rho_p = 1/(\pi\lambda_p)$.

5.2. Использование элементарного поля $\sigma(\boldsymbol{r}; P)$ для решения практических задач затруднено тем, что его реализации постоянны в элементах разбиения пространства, средний диаметр $S(\sigma)$ которых близок к корреляционной длине ρ [15, 16].

Для преодоления этого недостатка в [15] по аналогии с [10] было предложено для случая безгранично делимого распределения σ использовать следующую модификацию поля:

$$\sigma_n(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(n)}(\boldsymbol{r}), \tag{6}$$

причём пуассоновские поля $\{\sigma_i^{(n)}(\boldsymbol{r})\}$ независимы, и случайная величина σ_n распределена так же, как σ. Нетрудно видеть, что $K(r; \sigma_n) = K(r; \sigma^{(n)}) = e^{-\pi\lambda r}$. Поле $\sigma_n(\boldsymbol{r})$, сравнительно с базовым, более эффективно для решения практических задач, так как $S(\sigma_n) = n^{-1}S(\sigma)$, т. е. при $n \to \infty$ реализации поля $\sigma_n(\boldsymbol{r})$ практически более близки к непрерывным.

Однако здесь при использовании стандартных безгранично делимых распределений случайная величина $\sigma^{(n)}(\boldsymbol{r})$ не ограничена. Это существенно затрудняет моделирование случайных траекторий квантов излучения в среде с "коэффициентом ослабления" $\sigma^{(n)}(\boldsymbol{r})$. Численные эксперименты с гамма-распределённой величиной $\sigma^{(n)}(\boldsymbol{r})$ показали также некоторую "нереалистичность" соответствующих изображений, в которых сохраняются отдельные большие значения $\sigma^{(n)}(\boldsymbol{r})$ при $n \to \infty$ [17].

В связи с вышесказанным в [18] разработано представление вида (6) со следующими свойствами:

$$\mathrm{E}\sigma^{(n)}(\boldsymbol{r}) = \frac{m}{n}, \quad \mathrm{D}\sigma^{(n)}(\boldsymbol{r}) = \frac{d}{n}, \quad 0 < \sigma^{(n)}(\boldsymbol{r}) \le a^{(n)} < +\infty. \tag{7}$$

При этом $\mathrm{E}\sigma_n(\boldsymbol{r}) = m = \mathrm{E}\sigma$, $\mathrm{D}\sigma_n(\boldsymbol{r}) = d = \mathrm{D}\sigma$, $\rho_n = \rho$, и, вследствие суммирования в (7), можно надеяться на "реалистичность" условного одномерного распределения $\sigma_n(\boldsymbol{r})$ при условии $\sigma_n(\boldsymbol{r}) > 0$, т. е. в заполненной части пространства. Свойства (7), в частности, позволяют применить алгоритм моделирования случайного пробега кванта, состоящий в том, что пробег моделируется независимо для каждого из слагаемых $\sigma_i^{(n)}(\boldsymbol{r})$ "методом максимального сечения" [3], и затем выбирается пробег минимальной длины. Этот алгоритм следует непосредственно из того, что операции объединения и "прореживания" пуассоновских точечных потоков сохраняют свойство пуассоновости.

Ясно, что свойства (7) требуют сосредоточения распределения $\sigma^{(n)}$ в малой окрестности нуля. Поэтому здесь целесообразно рассмотреть распределения с "атомом" в нуле, т. е. $\mathrm{P}(\sigma^{(n)} = 0) = p^{(n)}$, и некоторой плотностью $f^{(n)}(u) \equiv f^{(n)}(u|\sigma > 0)$ условного распределения $\sigma^{(n)}$ в заполненной части пространства. Предварительные исследования показали, что целесообразно использовать плотность $f_\beta^{(n)}(u) = C_\nu u^{\nu-1}(a^{(n)} - u)^{\nu-1}$ симметричного "бета"-распределения.

Из формул (7) и соотношения $P_0 = \mathrm{P}(\sigma_\infty = 0) = \lim_{n\to\infty}(p^{(n)})^n$ получаем следующие выражения:

$$\begin{gathered}1 - p^{(n)} = \frac{2(\nu+1)}{(2\nu+1)\left(1 + \dfrac{dn}{m^2}\right)}, \qquad a^{(n)} = \frac{2\nu+1}{\nu+1}\left(\frac{m}{n} + \frac{d}{m}\right), \\ P_0 = \exp\left(-\frac{2m^2(\nu+1)}{d(2\nu+1)}\right), \qquad \frac{m^2}{d} < |\ln P_0| < 2\frac{m^2}{d}.\end{gathered} \tag{8}$$

Рассматривая поле $\sigma_n(\boldsymbol{r})$ в ограниченной области $D \subset R^3$, имеем $\sigma_n \in L^p(D)$. В [18] доказано следующее утверждение

Теорема 1. *Случайные поля $\sigma_n(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(n)}(\boldsymbol{r})$, $r \in D \subset R^3$, слабо сходятся в метрике $L^p(D)$ к полю $\sigma(\boldsymbol{r})$, согласованные конечномерные распределения которого определяются свойствами пуассоновского поля $\sigma^{(n)}(\boldsymbol{r})$.*

Введём обозначения: $m_c = \mathrm{E}(\sigma|\sigma > 0)$, $d_c = \mathrm{D}(\sigma|\sigma > 0)$. На основе соотношений

$$m = (1 - P_0)m_c, \qquad d = P_0(1 - P_0)m_c^2 + (1 - P_0)d_c$$

и (8) получается выражение

$$\nu = \frac{1}{2}\,\frac{2\dfrac{m^2}{d} - |\ln P_0|}{|\ln P_0| - \dfrac{m^2}{d}} > 0. \qquad (9)$$

Плотность $f_n(x)$ условного распределения σ в заполненной части пространства можно получить с помощью формулы свёртки [18]; в настоящей работе строилась её достаточно точная оценка $\tilde{f}_n(x)$ типа гистограммы.

Представленные в п. 6 расчёты были проведены для следующего варианта параметров реалистического поля:

$$m = 1, \qquad d = 0.16, \qquad P_0 = 0.00055, \qquad n = 10.$$

При этом формула (9) даёт значение $\nu = 2$.

Для статистической оценки $\tilde{f}_{10}$ плотности f_{10} было вычислено её "информационное расхождение" [19]:

$$I_\gamma(10) = -\int_0^\infty f_\gamma(u)\ln(f(u)/f_\gamma(u))\,du = 0.025$$

по отношению к плотности $f_\gamma(u) = C_\gamma u^{\alpha-1}e^{-qu}$, $u > 0$, гамма-распределения со средним m_c и дисперсией d_c; при этом параметры определяются формулами: $\alpha = \dfrac{m^2}{d} = 6.25$, $q = \dfrac{m}{d} = 6.25$.

Отметим, что $I_\gamma(50) = 0.015$, а $I_\gamma(1) = 0.062$, т. е. использование варианта с $n = 10$ является целесообразным; это подтверждается графически (см. рисунок 1).

Отметим, что оценки весовой L^1-нормы $\hat{I}_\gamma = \int_0^\infty f_\gamma(u)|f_\gamma(u) - \tilde{f}(u)|\,du$ здесь находятся в том же соотношении:

$$\hat{I}_\gamma(1) = 0.172, \quad \hat{I}_\gamma(10) = 0.084, \quad \hat{I}_\gamma(50) = 0.062.$$

Эти оценки, как и сравнение соответствующих графиков (см. рис. 1), показывают, что использование плотности f_β даёт достаточно "реалистические" распределения σ в заполненной части пространства уже при $n = 10$. Разработанная таким образом модель случайного поля далее обозначается символом Σ_n.

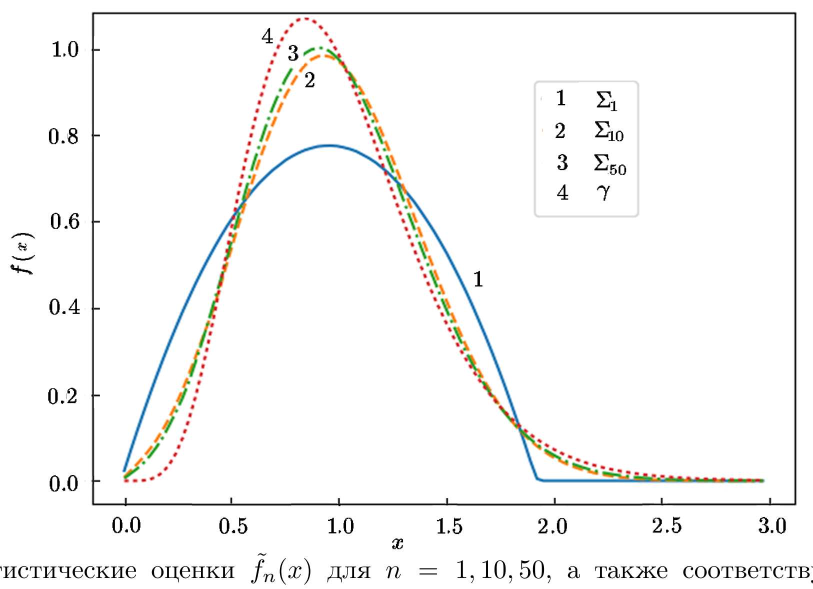

Рис. 1. Статистические оценки $\tilde{f}_n(x)$ для $n = 1, 10, 50$, а также соответствующая гамма-плотность $f_\gamma(x)$

6. Результаты расчётов

Методом Монте-Карло с использованием дополнительной рандомизации для решения сформулированной в пунктах 1–4 задачи были построены оценки величин $P_t = \mathrm{E}P_t(\sigma)$, $\mathrm{D}I(\sigma)$, корреляционной площади ρ_2 и значений нормированной корреляционной функции $K(r)$ поля освещённости, а также оценок нормированной плотности осреднённого углового распределения поля яркости для проходящего излучения. Эти результаты были получены для двух вариантов поля σ:

- элементарное пуассоновское поле P с одномерным бернуллиевским распределением: $P(\sigma = 0.6) = P(\sigma = 1.4) = 0.5$
- “реалистическое” поле Σ_n с $n = 10$, представленное в п. 5.2.

Для обоих вариантов выполняются соотношения:

$$\mathrm{E}\sigma = m = 1, \quad \mathrm{D}\sigma = d = 0.16, \quad \rho = 3.6.$$

Значения P_t и осреднённые плотности углового распределения яркости были также оценены для детерминированного поля D с $\sigma(\boldsymbol{r}) \equiv \mathrm{E}\sigma = 1$.

Оценки корреляционных характеристик поля освещённости были получены для толщины слоя $H = 10$, а значений P_t и угловой плотности для $H = 10$ и $H = 40$.

На рисунках 2, 3 представлена визуализация поля освещённости для проходящего излучения.

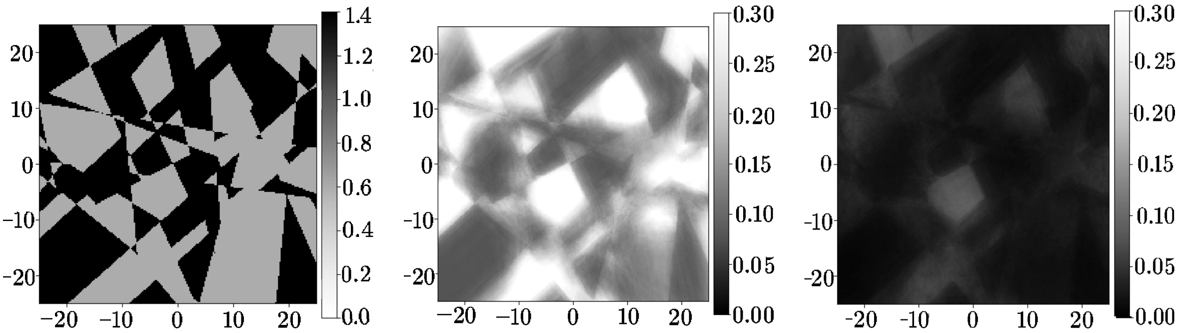

Рис. 2. Сечение поля P и соответствующие поля проходящей радиации для толщин слоя $H = 10$ и $H = 20$, размер области 50×50, масштаб 200×200 пикселей. Число сопряжённых траекторий на один пиксель $N = 5000$

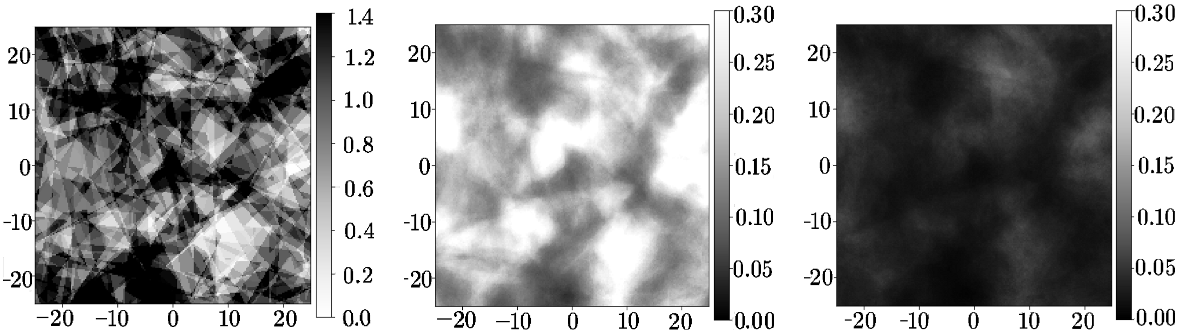

Рис. 3. Сечение поля Σ_{10} и соответствующие поля проходящей радиации для толщин слоя $H = 10$ и $H = 20$, размер области 50×50, масштаб 200×200 пикселей. Число сопряжённых траекторий на один пиксель $N = 5000$

Можно отметить, что в литературе (см., например, [20]) чаще приводят не имеющие реального смысла изображения плоских разрезов (сечений) полей $\sigma(\boldsymbol{r})$, которые различаются для различных типов $\sigma(\boldsymbol{r})$ более существенно, чем соответствующие изображения полей яркости проходящего излучения.

Представленные на рис. 1 статистические оценки $\hat{f}_n(x)$ плотностей условных одномерных распределений для полей Σ_n в заполненной части пространства подтверждает достаточную реалистичность поля Σ_{10}.

В таблицах 1 и 2 приведены оценки величин P_t и оценки осреднённой вероятности $P_d = \mathrm{E}\exp(-\int_0^H \sigma(t,0,0)\,dt)$ прямого (т. е. без столкновений) прохождения кванта через среду для $H = 10$ и $H = 40$. Эти результаты подтверждают указанное в [1] определяющее влияние параметров m, d, ρ на прохождение излучения через стохастическую среду при фиксированной степени разорванности P_0 (а также индикатрисы рассеяния и значения q). Отметим, что во всех таблицах в качестве погрешностей приведены среднеквадратические отклонения статистических оценок.

Таблица 1. Оценки P_t и P_d для $H = 10$, $N = 10^7$

Варианты поля	P_t	P_d
P	0.20576 ± 5.8e−005	0.00051908 ± 2.7e−007
Σ_{10}	0.20519 ± 5.8e−005	0.00091222 ± 1.7e−006
D	0.18087 ± 4.6e−005	0.0000453999

Таблица 2. Оценки P_t и P_d для $H = 40$, $N = 10^7$

Варианты поля	P_t	P_d
P	0.0008084 ± 1.2e−006	2.45e−013 ± 7.1e−015
Σ_{10}	0.0008070 ± 1.7e−006	1.1e−011 ± 5.1e−012
D	0.0003865 ± 4.7e−007	4.248e−018

Таблицы 3 и 4, а также графическое исследование, показывают, что нормированные угловые плотности $f_\mu(x)$ для вариантов поля P и Σ_{10} практически совпадают так же, как и значения P_t. Поэтому на рис. 4 приведены лишь графики плотностей $f_\mu(x)$, соответствующие полям Σ_{10} и D для $H = 10$ и $H = 40$. Они были построены указанным в п. 4 "ядерным" способом на основе аппроксимации урезанной β-плотностью. Видно, что при увеличении H угловые плотности для вариантов сближаются и приближаются к ламбертовской: $f_\mu(x) = 2x$.

Таблица 3. Значения b, α, β, а также начальный h_0 и последний шаг h_N, $H = 10$

Варианты поля	b	α	β	h_0	h_N
P	1.039	2.3372	0.3682	0.0306	0.0111
Σ_{10}	1.0367	2.3359	0.3770	0.0307	0.0112
D	1.1	2.3268	0.2902	0.0071	0.0107

Таблица 4. Значения b, α, β, а также начальный h_0 и последний шаг h_N, $H = 40$

Варианты поля	b	α	β	h_0	h_N
P	1.299	2.5089	0.2827	0.0222	0.0455
Σ_{10}	1.339	2.4831	0.2004	0.0234	0.0475
D	1.35	2.4778	0.2581	0.0189	0.0460

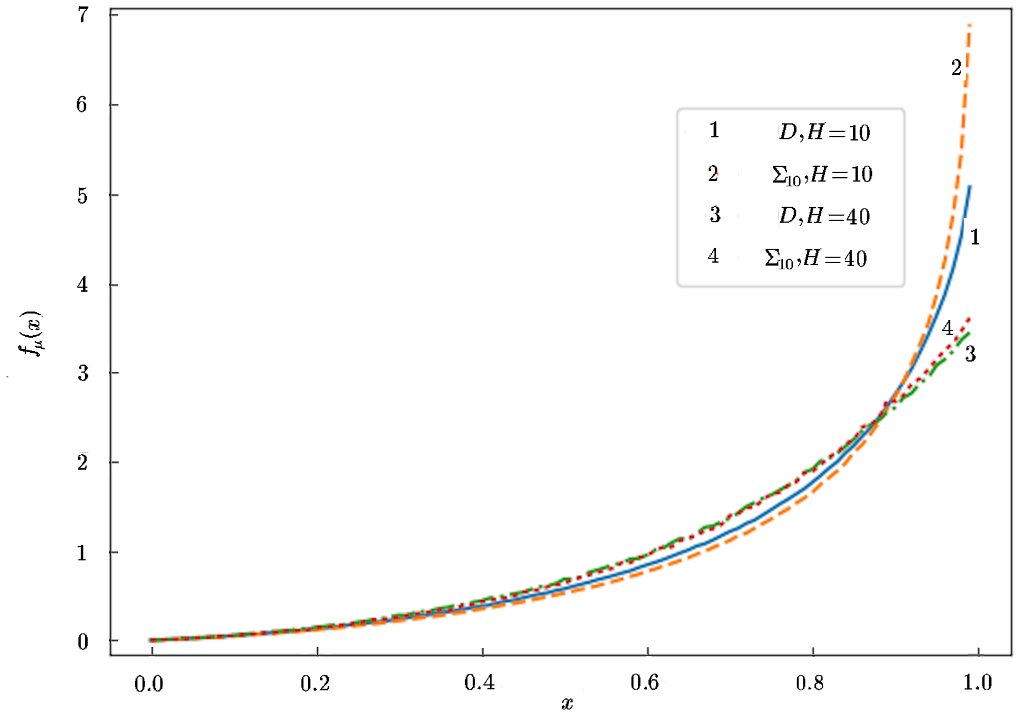

Рис. 4. Нормированные условные угловые плотности для полей Σ_{10} и D, $H = 10$ и $H = 40$; число траекторий $n = 10^7$

Отношения приведённых в табл. 5 оценок дисперсий DI_T для $T = 70$ и $T = 80$ статистически незначительно отличаются от величины $(T_2/T_1)^2 \approx 1.31$. Следовательно, можно использовать приближение $\rho_2^{(t)} \approx T^2 \mathrm{D}I_T/\mathrm{D}I$. Отметим, что приведённые в табл. 5 оценки получены прямым моделированием траекторий от нормированного равномерного источника в квадрате: $-(T+2H) \leq y, z \leq T+2H$, причём получаемые оценки числа проходящих частиц домножались на $\frac{(T+2H)^2}{T^2}$. При этом для каждой реализации поля σ для уменьшения трудоёмкости вычислений строилось 100 условно-независимых траекторий.

Таблица 5. Оценки дисперсий $\mathrm{D}I_T$. Число траекторий $n = 10^7 \times 100$ для P, $n = 10^6 \times 100$ для Σ_{10}

Варианты поля	$\mathrm{D}I$	$\mathrm{D}I_{70}$	$\mathrm{D}I_{80}$
P	0.00790094 ± 0.00013	$0.00027066243 \pm 4.4\mathrm{e}{-6}$	$0.00020136243 \pm 3.6\mathrm{e}{-6}$
Σ_{10}	0.00852421 ± 0.00047	$0.00019939473 \pm 1.4\mathrm{e}{-5}$	$0.00013639473 \pm 1.1\mathrm{e}{-5}$

В таблице 6 приведены оценки значений корреляционных площадей $\rho_2^{(t)}$ и значений λ по формулам (3) и (4), причём среднеквадратические погрешности оценены с помощью линеаризации. Значения λ вычислялись по формуле (4) с $T = 80$. Отметим, что соотношение оценок $\rho_2^{(t)}$ соответствует большей хаотичности варианта поля Σ_{10}, сравнительно с вариантом P.

Таблица 6. Оценки величин $\rho_2^{(t)}$ и λ

Варианты поля	$\rho_{2,70}^{(t)}$	$\rho_{2,80}^{(t)}$	λ_{80}
P	167.859 ± 0.0554	163.110 ± 0.0495	0.196 ± 0.000133
Σ_{10}	114.619 ± 0.1460	102.406 ± 0.1250	0.247 ± 0.000428

На рис. 5 приведены построенные по 20 значениям аргумента r графики полученных методом сопряжённых блужданий оценок корреляционных функций, которые показывают их асимптотическую близость к $\exp(-\lambda r)$ с учётом большой статистической погрешности этих оценок (как правило приводящей к их занижению) для поля Σ_{10}.

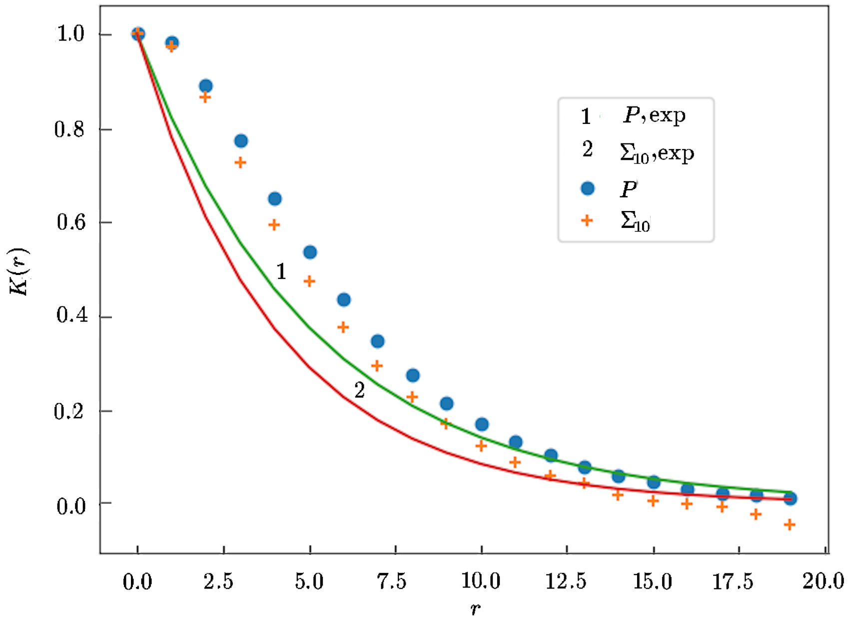

Рис. 5. Статистические оценки $K(r)$, а также соответствующие экспоненциальные оценки. Число траекторий $n = 3.2 \cdot 10^7 \times 10$ для P, $n = 3.2 \cdot 10^6 \times 10$ для Σ_{10}

Расчёты проводились с использованием гибридного кластера НКС-30Т ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН.

Литература

1. **Амбос А.Ю., Михайлов Г.А.** Эффективное осреднение стохастических радиационных моделей на основе статистического моделирования // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2016.—Т. 56, № 5.—С. 896–908; Перевод: Ambos A.Y., Mikhailov G.A. Effective averaging of stochastic radiative models based on Monte Carlo simulation // Comput. Mathem. and Math. Phys.—2016.—Vol. 56, № 5.—P. 881—893.

2. **Михайлов Г.А.** Эффективные алгоритмы метода Монте-Карло для вычисления корреляционных характеристик условных математических ожиданий // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—1977.— Т. 17, № 1.—С. 246–249; Перевод: Mikhailov G.A. Efficient Monte Carlo algorithms for evaluating the correlation characteristics of conditional mathematical expectations // USSR Comput. Mathem. and Math. Phys.—1977.—Vol. 17, № 1.—P. 244–247.

3. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло.—М.: Изд. центр “Академия”, 2006.—(Учебное пособие).

4. **Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., and Longworth S.** Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry // Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems.—1965.—P. 557–557.

5. **Ambos A. Yu., Mikhailov G.A.** Solution of radiative transfer theory problems for “realistic” models of random media using the Monte Carlo method // Russ J. Num. Anal. Math. Model.— 2016.— Vol. 31, № 3.— P. 127–136.

6. **Амбос А.Ю.** Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и задачи переноса излучения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2016.— Т. 19, № 1.— С. 19–32; Перевод: Ambos A.Yu. Numerical models of mosaic homogeneous isotropic random fields and problems of radiative transfer // Numerical Analysis and Applications.— 2016.— Vol. 9, № 1.— P. 12–23.

7. **Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.** Методы Монте-Карло в атмосферной оптике. Под общей ред. Г.И. Марчука— Новосибирск: Наука, 1976; Перевод: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A., Darbinjan R.A., Kargin B.A., and Elepov B.S. The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics.— Berlin-Heidelberg: Springer, 1980.

8. **Фейгельсон Е.М., Краснокутская Л.Д.** Потоки солнечного излучения и облака.— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.

9. **Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.** Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

10. **Михайлов Г.А.** Оптимизация весовых методов Монте-карло.— М.: Наука, 1987; Перевод: Mikhailov G.A. Optimization of Weighted Monte Carlo Methods.— Springer-Verlag, 1992.

11. **Боровков А.А.** Математическая статистика. — Новосибирск: Наука, 1997; Перевод: Borovkov A.A. Mathematical Statistics.— New York: Gordon and Breach, 1998.

12. **Lotova G.Z.** Monte Carlo algorithms for calculation of diffusive characteristics of an electron avalanche in gases // Russ J. Num. Anal. Math. Model.— 2011.— Vol. 31, № 6.— P. 369–377.

13. **Switzer P.** A random set process in the plane with a Markovian property // Ann. Math. Statist.— 1965.— Vol. 36.— P. 1859–1863.

14. **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей.— Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.

15. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Statistical modelling of the exponentially correlated multivariate random field // Russ J. Num. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 26, № 3. — P. 213–232.

16. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology.— London: Academic press inc., 1982.

17. **Михайлов Г.А., Тройников В.С.** Моделирование случайных полей при решении стохастических задач методом Монте-Карло (свойства реализаций) // Актуальные проблемы в вычислительной и прикладной математике.— Новосибирск: Наука, 1983.— С. 122–127.

18. **Михайлов Г.А., Амбос А.Ю.** Новая вычислительная модель изотропного “разорванного” экспоненциально коррелированного случайного поля // Доклады АН.— 2016.— Т. 469, № 3.— С. 283–286; Перевод: Ambos, A.Y., Mikhailov G.A. New computational model of an isotropic “broken” exponentially correlated random field // Doklady Mathematics, July.— 2016.— Vol. 94, iss. 1.— P. 411—414.

19. **Kullback S.** Information Theory and Statistics.— New York: Wiley; London: Chapman and Hall, 1959.

20. **Зуев В.Е., Титов Г.А.** Оптика атмосферы и климат. Т. 9.— Томск: изд-во “Спектр” ИОА СО РАН, 1996; Перевод: Zuev V.E., Titov G.A. Atmospheric Optics and Climate. — Tomsk: Spectr, 1996.

Поступила в редакцию 2 апреля 2018 г.,
в окончательном варианте 25 апреля 2018 г.

Литература в транслитерации

1. **Ambos A.Yu., Mikhaylov G.A.** Effektivnoe osrednenie stohasticheskih radiacionnyh modeley na osnove statisticheskogo modelirovaniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2016. — T. 56, № 5. — S. 896–908; Perevod: Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. Effective averaging of stochastic radiative models based on Monte Carlo simulation // Comput. Mathem. and Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, № 5. — P. 881—893.
2. **Mikhaylov G.A.** Effektivnye algoritmy metoda Monte-Karlo dlya vychisleniya korrelyacionnyh harakteristik uslovnyh matematicheskih ozhidaniy // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1977.— T. 17, № 1. — S. 246–249; Perevod: Mikhailov G.A. Efficient Monte Carlo algorithms for evaluating the correlation characteristics of conditional mathematical expectations // USSR Comput. Mathem. and Math. Phys. — 1977. — Vol. 17, № 1. — P. 244–247.
3. **Mikhaylov G.A., Voytishek A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo. — M.: Izd. centr "Akademiya", 2006. — (Uchebnoe posobie).
4. **Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., and Longworth S.** Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry // Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems. — 1965. — P. 557–557.
5. **Ambos A. Yu., Mikhailov G.A.** Solution of radiative transfer theory problems for "realistic" models of random media using the Monte Carlo method // Russ J. Num. Anal. Math. Model. — 2016. — Vol. 31, № 3. — P. 127–136.
6. **Ambos A.Yu.** Vychislitel'nye modeli mozaichnyh odnorodnyh izotropnyh sluchaynyh poley i zadachi perenosa izlucheniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2016. — T. 19, № 1. — S. 19–32; Perevod: Ambos A.Yu. Numerical models of mosaic homogeneous isotropic random fields and problems of radiative transfer // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 1. — P. 12–23.
7. **Marchuk G.I., Mikhaylov G.A., Nazaraliev M.A. i dr.** Metody Monte-Karlo v atmosfernoy optike. Pod obshchey red. G.I. Marchuka — Novosibirsk: Nauka, 1976; Perevod: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A., Darbinjan R.A., Kargin B.A., and Elepov B.S. The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics. — Berlin-Heidelberg: Springer, 1980.
8. **Feygel'son E.M., Krasnokutskaya L.D.** Potoki solnechnogo izlucheniya i oblaka. — L.: Gidrometeoizdat, 1978.
9. **Ibragimov I.A., Linnik Yu.V.** Nezavisimye i stacionarno svyazannye velichiny. M.: Nauka, 1965.
10. **Mikhaylov G.A.** Optimizaciya vesovyh metodov Monte-karlo. — M.: Nauka, 1987; Perevod: Mikhailov G.A. Optimization of Weighted Monte Carlo Methods. — Springer-Verlag, 1992.
11. **Borovkov A.A.** Matematicheskaya statistika. — Novosibirsk: Nauka, 1997; Perevod: Borovkov A.A. Mathematical Statistics. — New York: Gordon and Breach, 1998.
12. **Lotova G.Z.** Monte Carlo algorithms for calculation of diffusive characteristics of an electron avalanche in gases // Russ J. Num. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 31, № 6. — P. 369–377.
13. **Switzer P.** A random set process in the plane with a Markovian property // Ann. Math. Statist. — 1965. — Vol. 36. — P. 1859–1863.
14. **Prigarin S.M.** Metody chislennogo modelirovaniya sluchaynyh processov i poley. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2005.
15. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Statistical modelling of the exponentially correlated multivariate random field // Russ J. Num. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 26, № 3. — P. 213–232.
16. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology. — London: Academic press inc., 1982.

17. **Mikhaylov G.A., Troynikov B.C.** Modelirovanie sluchaynyh poley pri reshenii stohasticheskih zadach metodom Monte-Karlo (svoystva realizaciy) // Aktual'nye problemy v vychislitel'noy i prikladnoy matematike. — Novosibirsk: Nauka, 1983. — S. 122–127.

18. **Mikhaylov G.A., Ambos A.Yu.** Novaya vychislitel'naya model' izotropnogo "razorvannogo" eksponencial'no korrelirovannogo sluchaynogo polya // Doklady AN. — 2016.— T. 469, № 3. — S. 283–286; Perevod: Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. New computational model of an isotropic "broken" exponentially correlated random field // Doklady Mathematics, July. — 2016. — Vol. 94, iss. 1. — P. 411–414.

19. **Kullback S.** Information Theory and Statistics. — New York: Wiley; London: Chapman and Hall, 1959.

20. **Zuev V.E., Titov G.A.** Optika atmosfery i klimat. T. 9. — Tomsk: izd-vo "Spektr" IOA SO RAN, 1996; Perevod: Zuev V.E., Titov G.A. Atmospheric Optics and Climate. — Tomsk: Spectr, 1996.