УДК 532.526

ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ ЗА ПОПЕРЕЧНОЙ СТРУЕЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА НЕРАСЧЕТНОСТИ

А. О. Бекетаева, П. Бруель*, А. Ж. Найманова

Институт математики Министерства образования и науки Республики Казахстан, 050010 Алма-Ата, Казахстан

* Национальный центр научных исследований (CNRS), По, Франция

E-mails: azimaras@mail.ru, Pascal.Bruel@univ-pau.fr, ked@math.kz

Численно моделируется трехмерное сверхзвуковое турбулентное течение с симметричным перпендикулярным вдувом круглых струй со стенок канала. С использованием алгоритма, построенного на основе ENO-схемы, решаются исходные осредненные по Фавру уравнения Навье — Стокса, замкнутые с помощью (k–ω)-модели турбулентности. Для значений параметра нерасчетности $3 \leqslant n \leqslant 50$ изучен механизм формирования вихревых структур при взаимодействии струи с набегающим потоком. Экспериментально установлено, что при $n \geqslant 10$ в результате смешения струи и натекающего высокоскоростного потока появляется пара вихрей и происходит дополнительный отрыв вблизи стенки за струей. Показано, что результаты расчета распределения давления на стенке перед струей в плоскости симметрии удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: численное моделирование, сверхзвуковое течение, совершенный газ, пограничный слой, уравнения Навье — Стокса, параметр нерасчетности, ударная волна.

DOI: 10.15372/PMTF20150504

Введение. Исследование вдува струи в набегающий поток является актуальной задачей, поскольку примеров взаимодействия поперечной струи с набегающим потоком множество: от истечения дыма из дымохода в окружающую среду до камер сгорания в прямоточных воздушно-реактивных двигателях и систем управления самолетов и ракет. Большинство работ по этой теме посвящено определению реактивной силы струи при ее взаимодействии со сверхзвуковым набегающим потоком и внешним пограничным слоем. При этом поведение и структура струи исследованы недостаточно. Ряд работ посвящен исследованию поперечного вдува струи при малых и умеренных значениях параметра нерасчетности (см., например, [1–6]), хорошо изучена физическая картина области взаимодействия: образование сложной λ-образной системы скачков уплотнения, вследствие чего возникает область возвратных течений в виде двух противоположно вращающихся вихрей перед струей; формирование возвратного течения за струей вследствие образования зоны низкого давления; возникновение бочкообразной структуры и диска Маха в струе [1–8].

Моделирование турбулентности также является актуальной задачей при исследовании турбулентных струй. Широкое использование простых алгебраических моделей тур-

© Бекетаева А. О., Бруель П., Найманова А. Ж., 2015

булентности объясняется простотой их реализации, однако модели такого типа являются ограниченными. Для того чтобы преодолеть ограниченность алгебраических моделей, в настоящее время используются модели турбулентности, позволяющие учитывать перенос турбулентности путем решения дифференциальных уравнений. Согласно [9] для расчета пристенной турбулентности целесообразно использовать (k–ω)-модели турбулентности Вилкокса (ω — скорость диссипации на единицу энергии турбулентности). Данная модель позволяет получить более точные результаты для сложных типов течений с большими градиентами давления. Рассматриваемая задача взаимодействия струи со сверхзвуковым потоком характеризуется наличием больших областей возвратных течений, и для замыкания исходной системы уравнений (k–ω)-модель турбулентности Вилкокса является приемлемой.

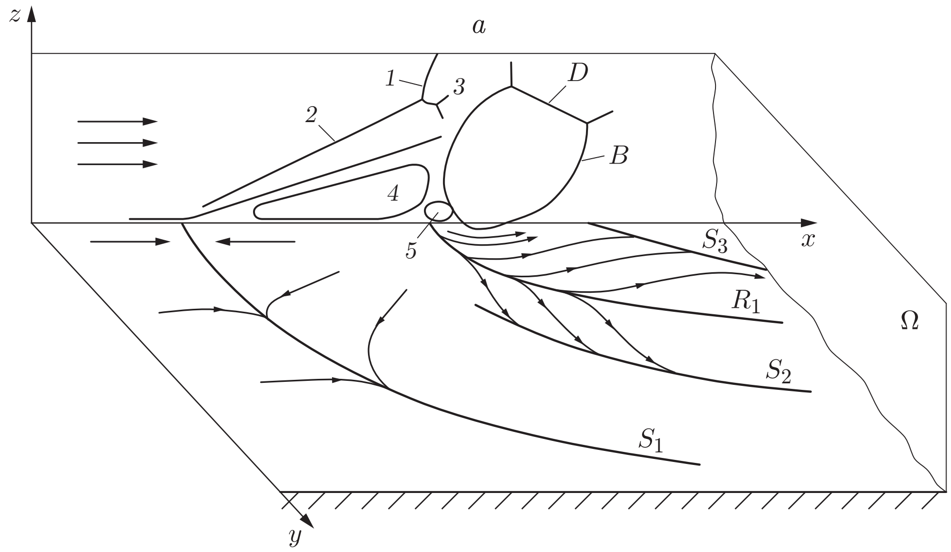
Целью настоящей работы является численное моделирование вдува звуковых струй из круглых отверстий, расположенных симметрично на верхней и нижней стенках канала, перпендикулярно сверхзвуковому потоку, а также изучение динамики возникновения дополнительных вихревых структур в струе и за ней при значениях параметра нерасчетности от умеренных до больших.

Структура течения. Для удобства вычисления будем рассматривать вдув струи только с нижней стенки. Схема течения и вихревая картина показаны на рис. 1, где головная волна, скачок отрыва и система скачков уплотнения с двумя тройными точками, соответствующая истечению существенно недорасширенной струи [7], показаны линиями *1, 2, 3*, вихри перед струей — линиями *4, 5*. Линия стекания потока на стенке S_1 соответствует границе скачка *2*, за которой образуется область отрыва пограничного слоя перед струей. В области скачка уплотнения *3* поток растекается по всем направлениям, большая его часть поворачивает к стенке и проникает в зону обратного отрывного течения. Достигнув поверхности стенки, поток растекается в противоположных направлениях (линия растекания R_1). Сформировавшаяся в результате взаимодействия хвостового скачка уплотнения с поверхностью пластины линия обозначена S_3. Также при истечении круглой струи в сносящий поток в струе возникает вихревая структура, аналогичная истечению струи несжимаемой жидкости и являющаяся достаточно изученной. Однако в работе [8] для течений с большими параметрами нерасчетности, где отношение статического давления в струе к полному давлению потока равно 532, показано, что при истечении газовой струи появляются дополнительные вихри. Вихревая картина, возникающая при поперечном вдуве струи в набегающий поток при больших значениях параметра нерасчетности и описанная в [8], представлена на рис. 1,*б*. В сечении yz (плоскость Ω на рис. 1,*а*) показана вихревая структура на некотором расстоянии от области вдува струи, состоящая из пяти пар противоположно вращающихся вихрей. Из них две пары *8, 6* (рис. 1,*б*) формируются в зоне смешения, пара вихрей *9* формируется за счет взаимодействия струи, проходящей через диск Маха D, со скоростным набегающим потоком. Подковообразный вихрь *7* возникает при наличии большого градиента давления перед струей и вследствие отрыва потока. Две пары вихрей *10* образуются в результате перетекания потока над бочкообразной структурой B в струе.

Таким образом, исследование сверхзвуковых течений при больших значениях параметра нерасчетности является новой малоизученной задачей.

Постановка задачи. В качестве исходной используем систему трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье — Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанную в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_v\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_v\right)}{\partial z} + \frac{\partial\left(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_v\right)}{\partial y} = \boldsymbol{S}. \tag{1}$$



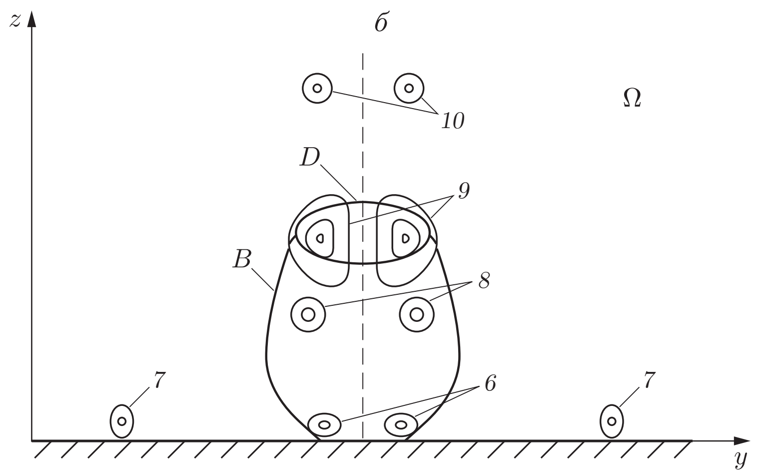


Рис. 1. Схема истечения струи (*а*) и вихревая картина при поперечном вдуве струи в набегающий поток (*б*):
1 — головная волна, *2* — скачок отрыва, *3* — система скачков уплотнения с двумя тройными точками, *4, 5* — вихри перед струей, *6–10* — пары вихрей, вращающихся в противоположных направлениях

Здесь

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \\ \rho k \\ \rho\omega \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + P)u \\ \rho uk \\ \rho u\omega \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + P \\ (E_t + P)w \\ \rho wk \\ \rho w\omega \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ (E_t + P)v \\ \rho vk \\ \rho v\omega \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_v = \Big(0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xz} + w\tau_{xz} - q_x, \frac{1}{\mathrm{Re}}\,(\mu_l + \sigma_k\mu_t)\,\frac{\partial k}{\partial x}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\,(\mu_l + \sigma_\omega\mu)\,\frac{\partial \omega}{\partial x}\Big)^{\mathrm{т}},$$

$$\boldsymbol{F}_v = \Big(0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z, \frac{1}{\mathrm{Re}}\,(\mu_l + \sigma_k\mu_t)\,\frac{\partial k}{\partial z}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\,(\mu_l + \sigma_\omega\mu)\,\frac{\partial \omega}{\partial z}\Big)^{\mathrm{т}},$$

$$\boldsymbol{G}_v = \Big(0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y, \frac{1}{\mathrm{Re}}\,(\mu_l + \sigma_k\mu_t)\,\frac{\partial k}{\partial y}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\,(\mu_l + \sigma_\omega\mu)\,\frac{\partial \omega}{\partial y}\Big)^{\mathrm{т}},$$

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\,\frac{\mu_t}{\mathrm{Re}}\,(2u_x - w_z - v_y), \quad \tau_{zz} = \frac{2}{3}\,\frac{\mu_t}{\mathrm{Re}}\,(2w_z - u_x - v_y), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}\,\frac{\mu_t}{\mathrm{Re}}\,(2v_y - u_x - w_z),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu_t}{\mathrm{Re}}\,(u_z + w_x), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu_t}{\mathrm{Re}}\,(u_y + v_x), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu_t}{\mathrm{Re}}\,(w_y + v_z),$$

$$q_x = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_\infty^2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,T_x, \quad q_y = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_\infty^2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,T_y, \quad q_z = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_\infty^2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,T_z,$$

$$\boldsymbol{S} = (0, 0, 0, 0, 0, P_k - \beta^*\rho\omega k, \gamma^*\rho P_k/\mu_t - \beta\rho\omega^2)^{\mathrm{т}},$$

$$P_k = \mu_t\Big[\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\Big)^2\Big] - \frac{2}{3}\,\rho k\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \qquad i, j, k = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_k = 0{,}5, \quad \sigma_\omega = 0{,}5, \quad \beta^* = 0{,}09, \quad \beta = 0{,}075, \quad \gamma^* = 5/9,$$

k, ω — кинетическая энергия турбулентности и скорость диссипации кинетической энергии турбулентности; P_k — член, определяющий генерацию турбулентности; турбулентная вязкость определяется по формуле $\mu_t = \rho k/\omega$ [9]; μ_l определяется по формуле Сазерленда.

Выражения для давления P и температуры T запишем в виде

$$P = (\gamma - 1)[E_t - (\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2)/2],$$

$$T = \frac{1}{\rho c_v}\Big(E_t - \frac{1}{2}\,(\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2)\Big), \qquad c_v = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)\,\mathrm{M}_\infty^2},$$

где t — время; u, w, v — компоненты скорости потока в продольном и поперечных направлениях; ρ — плотность; c_v — теплоемкость при постоянном объеме; γ — показатель адиабаты; M_∞ — число Маха потока.

Исходная система (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров принимались параметры на входе u_∞, ρ_∞, T_∞, давление и полная энергия нормировались на величину $\rho_\infty u_\infty^2$, в качестве характерной длины выбран диаметр круглого отверстия струи; Pr — число Прандтля; $\mathrm{Re} = u_\infty L/\nu$ — число Рейнольдса; L — длина канала, являющаяся характерным линейным размером для числа Рейнольдса.

Граничные и начальные условия имеют следующий вид:

— на входе в канал

$$u = 1, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \rho = 1, \quad T = 1, \qquad x = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant H_y, \quad 0 \leqslant z \leqslant H_z;$$

— на нижней стенке

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \qquad z = 0, \quad 0 < x \leqslant H_x, \quad 0 \leqslant y \leqslant H_y.$$

Начальные данные для параметров k, ω определялись с использованием алгебраической модели турбулентности Болдуина — Ломакса по известным осредненным физическим параметрам входного потока. С использованием соотношений $P_k = \beta^*\rho\omega k$ начальное распределение турбулентных параметров принимает вид

$$k = k_\infty, \quad k_\infty = \frac{\mu_{t\mathrm{BL}}}{\rho\,\mathrm{Re}\sqrt{\beta^*}}\sqrt{\frac{P_k}{\mu_{t\mathrm{BL}}}}, \qquad \omega = \omega_\infty, \quad \omega_\infty = \frac{\rho k}{\mu_{t\mathrm{BL}}\,\mathrm{Re}}.$$

Для параметров (k–ω)-модели турбулентности на стенке задавались условия

$$k = 0, \qquad \omega = \frac{6\mu}{0{,}075\rho(\Delta y_1)^2}.$$

Вблизи стенки задаются толщина пограничного слоя $\delta_1 = 0{,}37x(\mathrm{Re})^{-0{,}2}$ и толщина пристенного слоя $\delta_2 = 0{,}1\delta_1$. Выражение для продольной составляющей скорости u записывается в виде

$$u = 0{,}1z/\delta_2 + 0{,}9(z/\delta_2)^2, \qquad 0 < x \leqslant H_x, \quad 0 \leqslant y \leqslant H_y, \quad 0 \leqslant z \leqslant \delta_2.$$

В развитом турбулентном пограничном слое профиль продольной скорости задавался степенным законом

$$u = (z/\delta_1)^{1/7}, \qquad 0 < x \leqslant H_x, \quad 0 \leqslant y \leqslant H_y, \quad \delta_2 \leqslant z \leqslant \delta_1.$$

В зависимости от распределения скорости выражения для температуры и плотности принимали вид

$$T = T_w + u(1 - T_w), \qquad \rho = \frac{1}{T},$$

где $T_w = 1 + r(\gamma - 1)\,\mathrm{M}_\infty^2/2$ — температура на стенке, $r = 0{,}88$, $z = 0$, $0 < x \leqslant H_x$, $0 \leqslant y \leqslant H_y$.

Остальные граничные условия задавались следующим образом:

— в струе

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = 0{,}6, \quad w = \sqrt{T}\,\mathrm{M}_0\,/\,\mathrm{M}_\infty, \quad P_0 = nP_\infty, \qquad z = 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant R$$

(M_0 — число Маха струи; n — степень нерасчетности);

— на верхней границе (условие симметрии)

$$w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$
$$z = H_z, \quad 0 < x \leqslant H_x, \quad 0 \leqslant y \leqslant H_y;$$

— на боковых границах

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$
$$y = 0, \quad y = H_y, \quad 0 < x \leqslant H_x, \quad 0 \leqslant z \leqslant H_z$$

(H_x, H_z, H_y — длина, высота и ширина расчетной области; R — радиус круглого отверстия);

— на выходной границе — условие неотражения [10].

Метод решения. В настоящее время для численного решения задачи о сверхзвуковом течении с ударно-волновой структурой применяются TVD-, ENO-, WENO-схемы. В работе [11] на основе метода Годунова развивается ENO-схема и показана ее применимость для решения задачи о сверхзвуковом течении многокомпонентного газа в плоском канале с вдувом перпендикулярных струй. Для решения поставленной задачи ENO-схема обобщается на трехмерный случай. Предварительно в пограничном слое вблизи стенки и границы струи сетка сгущается с помощью преобразований [6]

$$\xi = \xi(x), \qquad \eta = \eta(z), \quad \zeta = \zeta(y).$$

Тогда в обобщенных координатах система уравнений (1) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{F}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{G}}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{F}}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{F}}_{vm}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{G}}_{v2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{G}}_{vm}}{\partial \zeta},$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \frac{1}{J}\,\boldsymbol{U}, \quad \tilde{\boldsymbol{E}} = \frac{\xi_x}{J}\,\boldsymbol{E}, \quad \tilde{\boldsymbol{F}} = \frac{\eta_z}{J}\,\boldsymbol{F}, \quad \tilde{\boldsymbol{E}}_{v2} = \frac{\xi_x}{J}\,\boldsymbol{E}_{v2}, \quad \tilde{\boldsymbol{E}}_{vm} = \frac{\xi_x}{J}\,\boldsymbol{E}_{vm},$$

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_{v2} = \frac{\eta_z}{J}\,\boldsymbol{F}_{v2}, \quad \tilde{\boldsymbol{F}}_{vm} = \frac{\eta_z}{J}\,\boldsymbol{F}_{vm}, \quad \tilde{\boldsymbol{G}}_{v2} = \frac{\zeta_y}{J}\,\boldsymbol{G}_{v2}, \quad \tilde{\boldsymbol{G}}_{vm} = \frac{\zeta_y}{J}\,\boldsymbol{G}_{vm},$$

$J = \partial\,(\xi,\eta,\zeta)/\partial\,(x,z,y)$ — якобиан преобразования; $\tilde{\boldsymbol{E}}_{vm}$, $\tilde{\boldsymbol{E}}_{v2}$ — диффузионные члены, содержащие смешанные и вторые производные.

В соответствии с принципом построения ENO-схемы исходную систему уравнений запишем следующим образом:

$$\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + (\hat{A}^+ + \hat{A}^-)\,\frac{\partial\boldsymbol{E}^m}{\partial\xi} + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-)\,\frac{\partial\boldsymbol{F}^m}{\partial\eta} + (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-)\,\frac{\partial\boldsymbol{G}^m}{\partial\zeta} - \\ - \Big(\frac{\partial\,(\tilde{\boldsymbol{E}}_{v2} + \tilde{\boldsymbol{E}}_{vm})}{\partial\xi} + \frac{\partial\,(\tilde{\boldsymbol{F}}_{v2} + \tilde{\boldsymbol{F}}_{vm})}{\partial\eta} - \frac{\partial\,(\tilde{\boldsymbol{G}}_{v2} + \tilde{\boldsymbol{G}}_{vm})}{\partial\zeta}\Big) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $A = \partial\boldsymbol{E}/\partial\boldsymbol{U}$, $B = \partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{U}$, $Q = \partial\boldsymbol{G}/\partial\boldsymbol{U}$ — матрицы Якоби,

$$\hat{A}^{\pm} = R\hat{\Lambda}_\xi R^{-1} = R\Big(\frac{1 \pm \operatorname{sign}(\Lambda_\xi)}{2}\Big)R^{-1},$$

$$\hat{B}^{\pm} = T\hat{\Lambda}_\eta T^{-1} = T\Big(\frac{1 \pm \operatorname{sign}(\Lambda_\eta)}{2}\Big)T^{-1}, \qquad \hat{Q}^{\pm} = S\hat{\Lambda}_\zeta S^{-1} = S\Big(\frac{1 \pm \operatorname{sign}(\Lambda_\zeta)}{2}\Big)S^{-1},$$

$\boldsymbol{E}^m = \tilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{E}_\xi + \boldsymbol{D}_\xi$, $\boldsymbol{F}^m = \tilde{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{E}_\eta + \boldsymbol{D}_\eta$, $\boldsymbol{G}^m = \tilde{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{E}_\zeta + \boldsymbol{D}_\zeta$ — модифицированные потоки в узловых точках (i,j,k), состоящие из исходных конвективных векторов ($\tilde{\boldsymbol{E}}$, $\tilde{\boldsymbol{F}}$, $\tilde{\boldsymbol{G}}$) и добавочных членов высокого порядка точности $\boldsymbol{E}_\xi$, $\boldsymbol{D}_\xi$, $\boldsymbol{E}_\eta$, $\boldsymbol{D}_\eta$, $\boldsymbol{E}_\zeta$, $\boldsymbol{D}_\zeta$ [11].

После факторизации одношаговой конечно-разностной схемы для интегрирования по времени уравнения (2) получаем равенство

$$\Big[I + \Delta t\Big((\hat{A}^+ + \hat{A}^-)^n\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,A_\xi^n - \frac{\partial}{\partial\xi}\,\tilde{\mu}_\xi\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{1}{\tilde{\boldsymbol{U}}_1}\Big)\Big]\Big[I + \Delta t\Big((\hat{B}^+ + \hat{B}^-)^n\,\frac{\partial}{\partial\eta}\,B_\eta^n - \frac{\partial}{\partial\eta}\,\tilde{\mu}_\eta\,\frac{\partial}{\partial\eta}\,\frac{1}{\tilde{\boldsymbol{U}}_1}\Big)\Big] \times \\ \times \Big[I + \Delta t\Big((\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-)^n\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\,Q_\zeta^n - \frac{\partial}{\partial\zeta}\,\tilde{\mu}_\zeta\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\,\frac{1}{\tilde{\boldsymbol{U}}_1}\Big)\Big]\tilde{\boldsymbol{U}}^{n+1} = \\ = \tilde{\boldsymbol{U}}^n + \Delta t\Big(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}_{v22}^n}{\partial\xi} + \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{F}}_{v22}^n}{\partial\eta} + \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{G}}_{v22}^n}{\partial\zeta} + \\ + \frac{\partial}{\partial\xi}\,(2\tilde{\boldsymbol{E}}_{vm}^n - \tilde{\boldsymbol{E}}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial\eta}\,(2\tilde{\boldsymbol{F}}_{vm}^n - \tilde{\boldsymbol{F}}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\,(2\tilde{\boldsymbol{G}}_{vm}^n - \tilde{\boldsymbol{G}}_{vm}^{n-1})\Big) - \\ - \Delta t\Big((\hat{A}^+ + \hat{A}^-)\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,(\boldsymbol{E}_\xi + \boldsymbol{D}_\xi) + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-)\,\frac{\partial}{\partial\eta}\,(\boldsymbol{E}_\eta + \boldsymbol{D}_\eta) + (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-)\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\,(\boldsymbol{E}_\zeta + \boldsymbol{D}_\zeta)\Big)^n, \qquad (3)$$

где $A_\xi = \xi_x A$; $B_\eta = \eta_z B$; $Q_\zeta = \zeta_y Q$; $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$; I — единичная матрица; $\tilde{\mu}_\xi = \mu\xi_x^2/(\mathrm{Re}\,J)$; $\tilde{\mu}_\eta = \mu\eta_z^2/(\mathrm{Re}\,J)$; $\tilde{\mu}_\zeta = \mu\zeta_y^2/(\mathrm{Re}\,J)$.

Аппроксимация производных в конвективных членах, членах, содержащих добавочные векторы высокого порядка, а также в членах, содержащих вторые и смешанные производные, проводится согласно [11].

Система (3) решается с использованием метода расщепления относительно вектора $\tilde{\boldsymbol{U}}$ матричной прогонкой.

Зависимости среднего и среднеквадратичного отклонений невязок плотности от числа узлов

Число узлов		L_1^ρ	L_2^ρ
$M = I \times J \times K$	$\hat{M} = M \times L \times P$		
$201 \times 101 \times 101$	$221 \times 101 \times 101$	$1{,}70 \cdot 10^{-2}$	$7{,}98 \cdot 10^{-2}$
	$181 \times 101 \times 101$	$1{,}91 \cdot 10^{-2}$	$8{,}98 \cdot 10^{-2}$
$201 \times 101 \times 101$	$201 \times 81 \times 81$	$3{,}00 \cdot 10^{-2}$	0,11
	$201 \times 111 \times 111$	$2{,}19 \cdot 10^{-2}$	$9{,}98 \cdot 10^{-2}$

Анализ результатов. Расчет проводился на разнесенной сетке размером $201 \times 101 \times 101$ с шагами по пространственным координатам $\Delta x = 0{,}1 \div 0{,}5$, $\Delta z = 0{,}03 \div 0{,}25$, $\Delta y = 0{,}1 \div 0{,}5$ и шагом по времени $\Delta t = 0{,}025$. Исследовалось обтекание сверхзвуковым потоком с параметрами $\mathrm{Re} = 1{,}87 \cdot 10^7$, $\mathrm{Pr} = 0{,}9$, $\mathrm{M}_\infty = 3$ звуковой струи совершенного газа, вдуваемой из отверстия диаметром $d = 1{,}4$ см. Размеры рассматриваемой области равны $H_x = 30$ калибров, $H_z = 15$ калибров, $H_y = 30$ калибров, центр струи находится на расстоянии $x_0 = 10$ калибров, $y_0 = 15$ калибров. Во входном сечении задавались толщина пограничного слоя $\delta_1 = 1$, вычисленная для $x = 250$. Высота пристенного слоя соответствует ламинарно-турбулентному подслою $z^+ = 72$, где $z^+ = \delta_2 u_\tau/\nu$, а высота пограничного слоя равна $z^+ = \delta_1 u_\tau/\nu = 2570$, где $u_\tau = (C_f/2)^{1/2}$ — динамическая скорость; C_f — коэффициент трения потока на стенке, вычисленный по формуле Прандтля — Шлихтинга. Вблизи стенки сетка сгущалась таким образом, чтобы расчет пристенного слоя осуществлялся на 5–8 узловых точках в направлении оси z, а расчет всего пограничного слоя выполнялся с использованием 22–26 узлов расчетной сетки. Численный алгоритм тестировался в двумерной постановке путем сравнения полученных результатов с экспериментальными данными [11].

В таблице представлена зависимость сходимости решений от характеристик сетки, выраженная через среднее $L_1^\rho = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|$ и среднеквадратичное $L_2^\rho = \dfrac{1}{N} \Big(\sum\limits_{n=1}^{N} |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|^2 \Big)^{1/2}$ отклонения невязок плотности. (Здесь $\varepsilon_M^n = \max\limits_{(i,j) \in M} |\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n|$, $\varepsilon_{\hat{M}}^n = \max\limits_{(i,j) \in \hat{M}} |\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n|$; N — число итераций.) Оценки выполнены путем последовательного измельчения сеток, при этом в качестве начальной принималась сетка M с $I \times J \times K$ узлами, затем узлы M, L, P сетки $\hat{M}$ варьировались. Из таблицы следует, что отклонения невязок плотности уменьшаются с измельчением сетки. Поэтому сетка M размером $201 \times 101 \times 101$, для которой невязки минимальны, выбрана для последующих вычислений.

На рис. 2–5 представлены результаты расчетов при значении параметра нерасчетности $n = 50$. На рис. 2,*а* видно, что в зоне, примыкающей к стенке перед струей, в результате отрыва набегающего потока, обусловленного наличием λ-образной системы скачков уплотнения, формируются два противоположно вращающихся подковообразных вихря. Вихрь *5* (см. рис. 1,*а*), примыкающий к струе, вращается против часовой стрелки, а вихрь *4*, отстоящий от него, — по часовой стрелке, т. е. навстречу набегающему потоку, в результате чего образуются линии стекания и растекания потоков [6]. Эти вихри хорошо изучены (см., например, [5, 6]). В рассматриваемом случае вихри в основном локализовались в передней части струи, поэтому ярко выраженной подковообразной структуры *7* за областью вдува струи (см. рис. 1,*б*) не наблюдается.

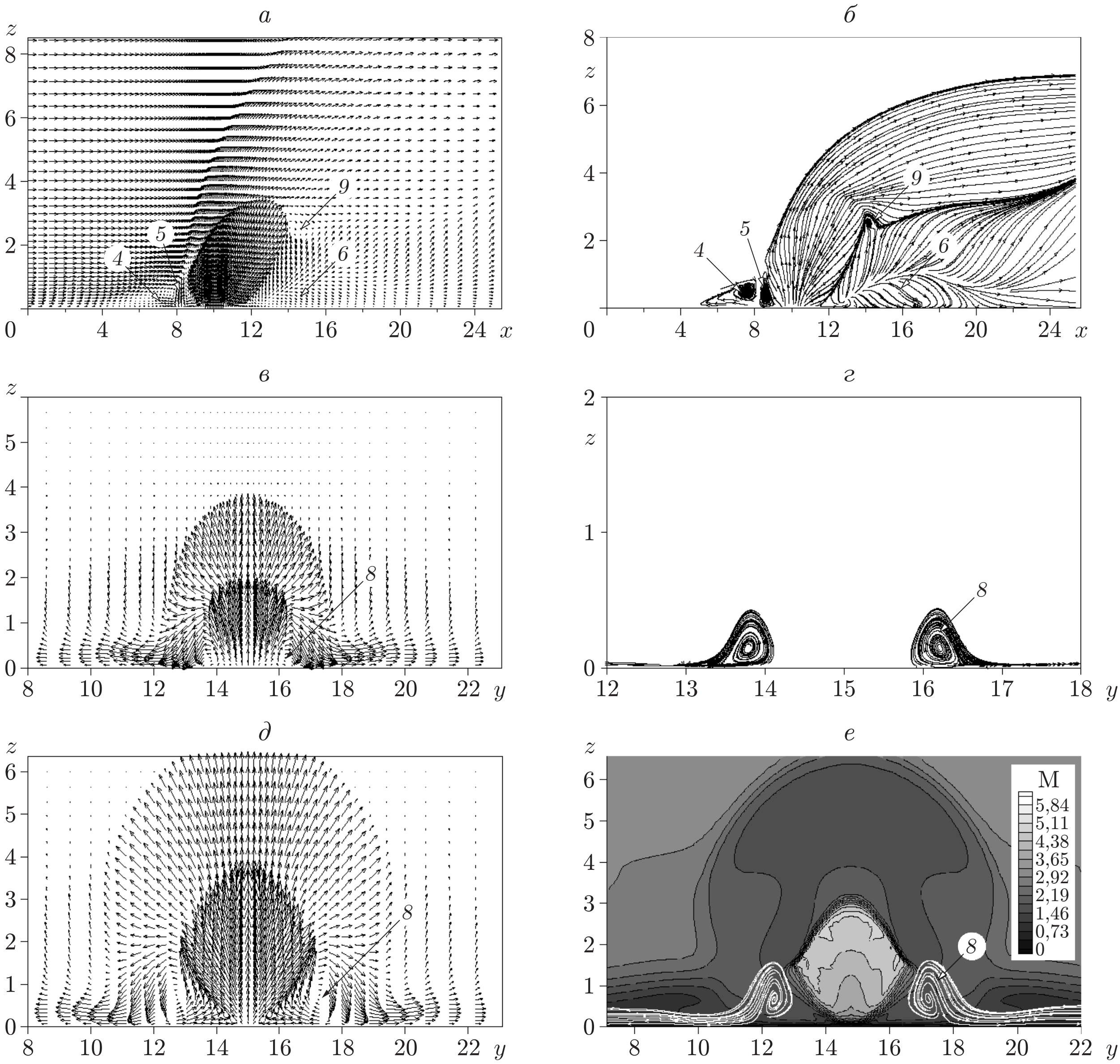


Рис. 2. Поле вектора скорости (*а, в, д*), проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси x (*б, г, е*), и распределение числа Маха (*е*) при $\mathrm{Re} = 1{,}87\cdot 10^7$, $\mathrm{Pr} = 0{,}9$, $n = 50$, $\mathrm{M}_0 = 1$, $\mathrm{M}_\infty = 3$:

а, б — в плоскости симметрии ($y = 15{,}0$), *в, г* — в плоскости zy ($x = 9{,}1$), *д, е* — в плоскости zy ($x = 11{,}4$); *4–6, 8, 9* — вихри, показанные на рис. 1

Пара вихрей за струей (вихрь *8* на рис. 1,*б*) генерируются вихрем *5*. Так, в области перед струей, т. е. на расстоянии $x = 9{,}1$ калибра от начала расчетной области (см. рис. 2,*в,г*) хорошо видны боковые вихри *8*. Результаты численных расчетов показывают, что эти вихри с центрами вращения в слое смешения струи и потока, обтекая струю, увеличиваются по мере движения вниз по потоку. Увеличение размеров этих вихрей обусловлено прежде всего тем, что они сосредоточены вблизи стенки, и увеличением толщины пограничного слоя. Максимальные размеры бокового вихря наблюдаются в сечении $x = 11{,}4$ (см. рис. 2,*д*). Ядро вихря расположено вблизи острого угла бочкообразной структуры, возникающей в струе (см. рис. 2,*е*). Видно, что центр вращения вихря находится вблизи боковой острой кромки бочкообразной структуры. Результаты численных экспериментов показывают, что в сечении $x = 13{,}5$ интенсивность вихря *8* уменьшается, а бочкообразная структура исчезает.

На рис. 3,*а* в сечении $x = 14{,}7$ показано возникновение вихря *9*, который вносит основной вклад в смешение струи и потока. Из рис. 3,*а* следует, что эта пара вихрей появляется за диском Маха в результате взаимодействия струи и восходящего потока под ней. На рис. 3,*б* показано, что в точке зарождения вихря поток является дозвуковым. Также на рис. 3,*а,б* можно наблюдать вихревой след вблизи стенки, состоящий из симметрично вращающихся вихрей *6*. Как указывалось выше, часть вихря *5* порождает боковую вихревую систему *8*, оставшаяся его часть, примыкающая к струе, формирует вихревой след *6* (см. рис. 3,*а,б*). Возникновение вихря *6* обусловлено тем, что непосредственно за струей вблизи стенки образуется область пониженного давления, в которую устремляется натекающий поток. Существование обширных дозвуковых зон за диском Маха и непосредственно за струей вблизи стенки хорошо видно на рис. 3,*в,г*.

На рис. 3,*д,е* в сечении $x = 15{,}8$ представлена вихревая картина, на которой видны две пары вращающихся в противоположных направлениях вихрей *8, 9*. Результаты вычислений показывают, что по мере продвижения вниз по потоку вихрь *8* теряет интенсивность и не наблюдается в сечениях $x = 14{,}1 \div 15{,}4$. Очевидно, дальнейшая интенсификация этого вихря зависит от взаимодействия натекающего потока и вдуваемой струи. Также на рис. 3,*д,е* виден вихрь *6*, который существенно увеличился в размерах. Результаты эксперимента показывают, что в сечении $x = 18{,}0$ две пары вихрей *8, 9* сливаются в один вихрь, направление вращения которого совпадает с направлением вращения вихря *8* и который виден на всем протяжении расчетной области.

На рис. 4,*а–г* в сечении $x = 18{,}9$ можно наблюдать вихрь *10*, который формируется в результате взаимодействия струи и высокоскоростного натекающего потока, проходящего над бочкообразной структурой. Данный вихрь впервые численно обнаружен в работе [8]. Видно, что вихрь *10* движется в вертикальном направлении вдоль линии симметрии на достаточном расстоянии от поверхности пластины. Очевидно, появление вихря *10* зависит от интенсивности смешения струи и потока, поскольку численные эксперименты, проведенные при меньших значениях параметра нерасчетности, не выявили наличия этой пары вихрей.

Сравнение вихревой структуры *8* в сечениях $x = 18{,}0$, $x = 18{,}9$ показывает, что центр вращения смещается к стенке. Это обусловлено тем, что на данном уровне происходит прилипание струи к плоскости пластины и вблизи стенки формируется новая пара вихрей *11* (см. рис. 4,*а,б*). Тем самым подтверждается предположение, сделанное в работе [12], что между струей и областью ее прилипания к стенке существует своего рода каверна, в которой возможно появление двух вихрей с противоположным направлением вращения. Из рис. 4,*а,б* следует, что направление вращения вихря *11* совпадает с направлением вращения следа *6*.

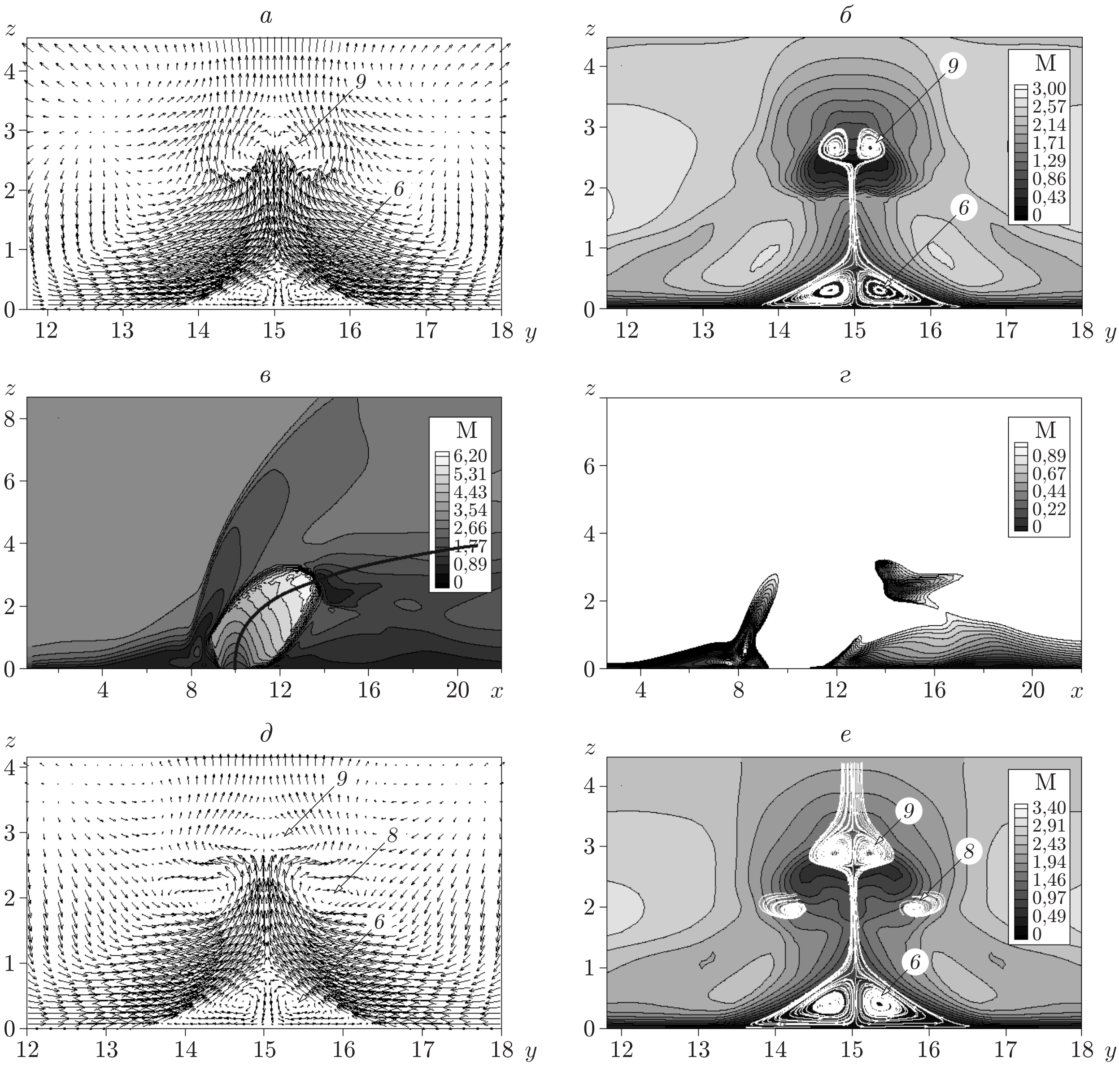


Рис. 3. Поле вектора скорости (*а, в, д*), проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси x (*б, г, е*), и распределение числа Маха (*б–г, е*) при $\mathrm{Re} = 1{,}87 \cdot 10^7$, $\mathrm{Pr} = 0{,}9$, $n = 50$, $\mathrm{M}_0 = 1$, $\mathrm{M}_\infty = 3$:

а, б — в плоскости zy ($x = 14{,}7$), *в, г* — в плоскости симметрии ($y = 15{,}0$), *д, е* — в плоскости zy ($x = 15{,}8$); *6, 8, 9* — вихри, показанные на рис. 1; утолщенная линия — траектория центральной точки струи

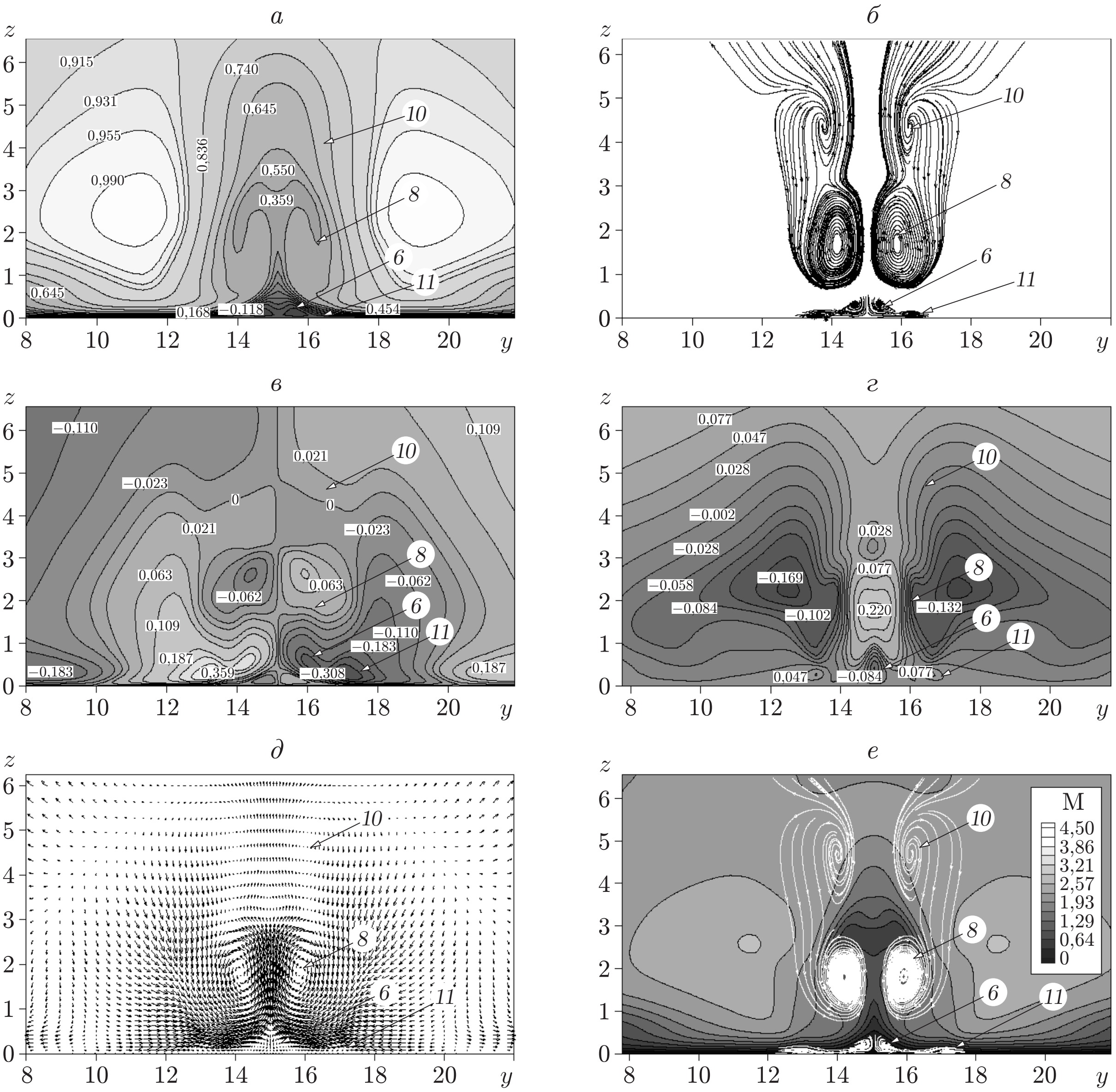


Рис. 4. Проекции линий тока на плоскость zy ($а$), изолинии продольной ($б$) и поперечных v ($в$), w ($г$) составляющих скоростей в плоскости zy в сечении $x = 18{,}9$, а также поле вектора скорости ($д$), распределение числа Маха и проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси x ($е$), в сечении $x = 20{,}6$ при $\mathrm{Re} = 1{,}87 \cdot 10^7$, $\mathrm{Pr} = 0{,}9$, $n = 50$, $\mathrm{M}_0 = 1$, $\mathrm{M}_\infty = 3$:
6, 8, 10 — вихри, показанные на рис. 1, *11* — вихрь, возникающий в случае прилипания струи к плоскости пластины

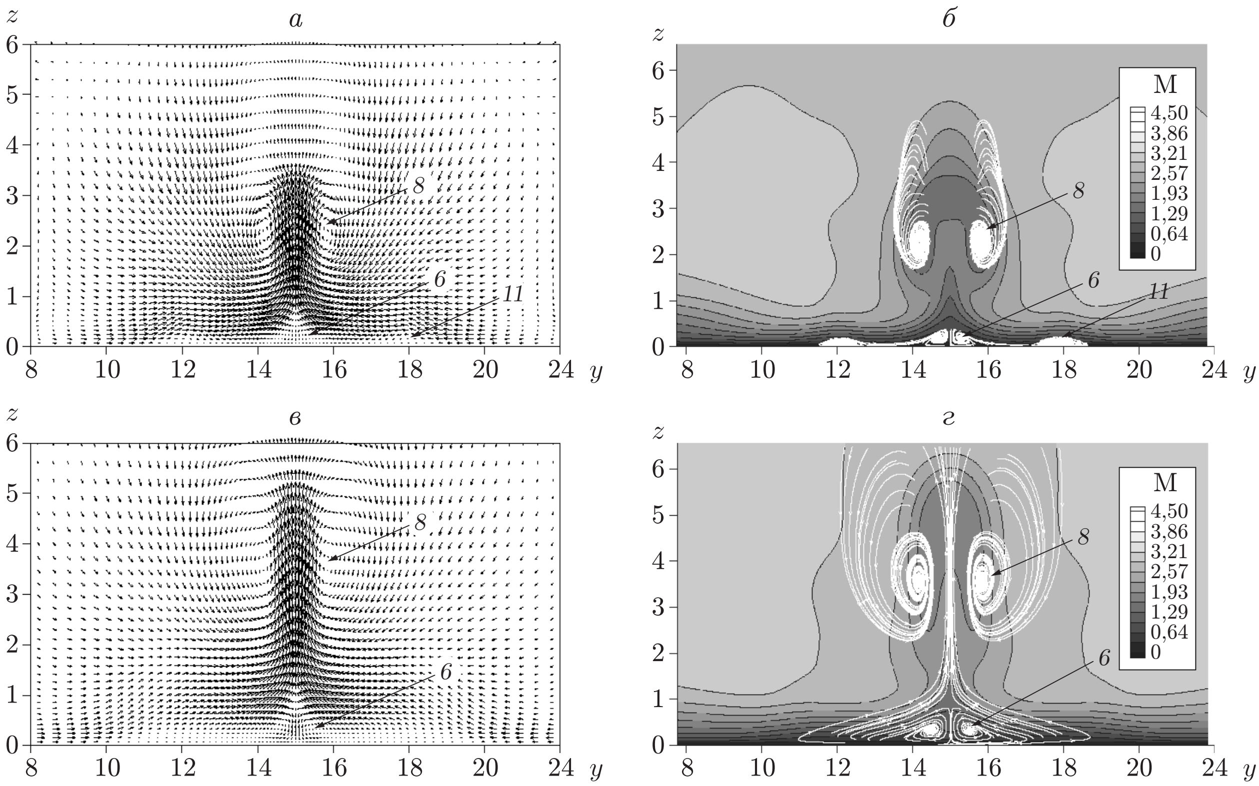


Рис. 5. Поле вектора скорости (*а, в*), распределение местного числа Маха и проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси x (*б, г*), при $\mathrm{Re} = 1{,}87 \cdot 10^7$, $\mathrm{Pr} = 0{,}9$, $n = 50$, $\mathrm{M}_0 = 1$, $\mathrm{M}_\infty = 3$:
а, б — в плоскости zy ($x = 24{,}0$), *в, г* — в плоскости zy ($x = 28{,}0$); *6, 8* — вихри, показанные на рис. 1, *11* — вихрь, возникающий в случае прилипания струи к плоскости пластины

В сечении $x = 20{,}6$ (см. рис. 4,*д,е*) пара вихрей *11* смещается от линии симметрии и становится более интенсивной. В сечении $x = 24{,}0$ (рис. 5,*а,б*) вихрь *11* находится на значительном расстоянии от линии симметрии и хорошо виден, а вихрь *10* уже не наблюдается. Численные эксперименты показывают, что при $x = 28{,}0$ (рис. 5,*в,г*) вихри *11* и *6* объединяются.

В работе также выполнены численные эксперименты при меньших значениях параметра нерасчетности. Для этих случаев вихревая картина подробно описана в работах [1–6]. Результаты расчетов, проведенных при меньших значениях параметра нерасчетности, например при $n = 10$, показывают, что вихревая картина меняется с увеличением параметра нерасчетности. Так, при $n = 10$ в области за струей образуются вихри *6, 8, 9*, однако не формируются вихревые структуры *10, 11*. Вероятно, это обусловлено тем, что при меньших значениях параметра нерасчетности интенсивность смешения натекающего потока и струи недостаточна для образования вихрей *10, 11*.

В работе проведено сравнение численных результатов с экспериментальными данными [12] для параметра нерасчетности $n = 40$. На рис. 6 показано распределение давления P/P_∞ на стенке в плоскости симметрии. (Начало координат выбранной системы совпадает с центром отверстия для вдува, по оси абсцисс отложена величина $x_1 = (x - d/2) - L_1$, где L_1 — расстояние от передней точки струи до начала области повышения давления; d — диаметр струи.) На рис. 6 видно, что вследствие торможения набегающего потока перед струей давление повышается и образуются области с различными градиентами дав-

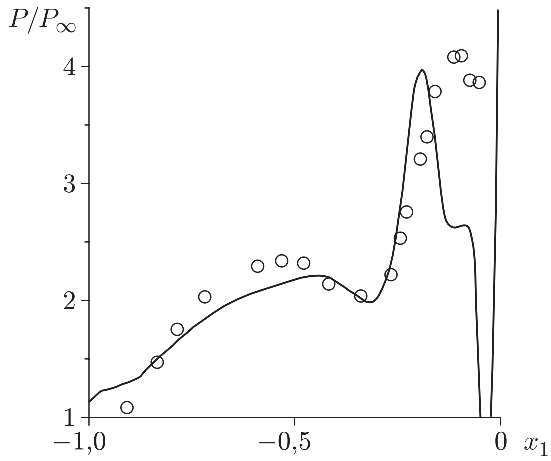


Рис. 6. Распределение давления на стенке на оси симметрии при $\mathrm{Re} = 1{,}87 \cdot 10^7$, $\mathrm{Pr} = 0{,}9$, $n = 40$, $\mathrm{M}_0 = 1$, $\mathrm{M}_\infty = 3$:
линия — результаты расчета, точки — данные эксперимента [12]

ления. Также на рис. 6 видно, что результаты расчетов и экспериментальные данные [12] удовлетворительно согласуются.

Для подтверждения правильности результатов расчета в области взаимодействия сверхзвуковой струи с набегающим потоком по эмпирической формуле [13] $x = (q_{01}/q_{02})^{1,3}z^3 + z\operatorname{ctg}\alpha$ ($q_{01} = \rho_\infty u_\infty^2/2$, $q_{02} = \rho_0 w_0^2/2$ — скоростные напоры в сносящем потоке и на начальном участке струи соответственно; α — угол между направлением оси сопла и направлением потока) определялась траектория центральной точки круглой струи, сносимой поперечным потоком. Из рис. 3,*в*, на котором показаны вычисленная траектория центральной точки струи и распределение числа Маха в плоскости симметрии, следует, что расчетная траектория соответствует наклону струи, зависящему от набегающего потока, и проходит через диск Маха.

Заключение. С использованием методики расчета на основе ENO-схемы осредненных по Фавру уравнений Навье — Стокса для совершенного газа численно моделируется трехмерное сверхзвуковое турбулентное течение с симметричным поперечным вдувом круглых струй через отверстия в стенках. Изучен механизм образования вихревых структур в результате взаимодействия набегающего потока с вдуваемой струей при значениях параметра нерасчетности $3 \leqslant n \leqslant 50$. Установлено, что при $n \geqslant 10$ в результате взаимодействия струи и обтекающего ее потока появляется дополнительная пара вихрей, а также происходит отрыв вблизи стенки, т. е. формируется еще один вихрь.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Grasso F., Magi V.** Simulation of transverse gas injection in turbulent supersonic air flows // AIAA J. 1995. V. 33, N 1. P. 56–62.
2. **Chenault C. F., Beran P. S.** k–ε and Reynolds stress turbulence modelcomparisons for two-dimensional injection flows // AIAA J. 1998. V. 36, N 8. P. 1401–1412.
3. **Chenault C. F., Beran P. S.** Numerical investigation of supersonic injection using a Reynolds stress turbulence model // AIAA J. 1999. V. 37, N 10. P. 1257–1269.
4. **Sun De-chaun, Hu Chun-bo, Cai Ti-min.** Computation of supersonic turbulent flowfield with transfer injection // Appl. Math. Mech. 2002. V. 23, N 1. P. 107–113.

5. **Бекетаева А. О., Найманова А. Ж.** Численное моделирование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 72–80.
6. **Бекетаева А. О., Найманова А. Ж.** Численное исследование пространственного сверхзвукового течения совершенного газа при наличии поперечного вдува струй // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 58–68.
7. **Боровой В. Я.** Течение газа и теплообмен в зонах взаимодействия ударных волн с пограничным слоем. М.: Машиностроение, 1983.
8. **Viti V., Neel R., Schetz J.** Detailed flow physics of the supersonic jet interaction flow field // Phys. Fluids. 2009. V. 21, N 4. 046101.
9. **Wilcox D. C.** Turbulence modeling for CFD. 2nd ed. La Canada: DCW Industr., 1998.
10. **Poinsot T. J., Lele S. K.** Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows // J. Comput. Phys. 1992. N 101. P. 104–129.
11. **Бруель П., Найманова А. Ж.** Расчет нормального вдува струи водорода в сверхзвуковом потоке воздуха // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 4. С. 565–576.
12. **Глаголев А. И., Зубков А. И., Панов Ю. А.** Обтекание струйного газообразного препятствия на пластине сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 3. С. 97–102.
13. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй / Г. Н. Абрамович, Т. А. Гиршович, С. Ю. Крашенинников, А. Н. Секундов, И. П. Смирнов. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 31/III 2014 г.,
в окончательном варианте — 27/II 2015 г.