Теплофизика и аэромеханика, том 6, № 3, 1999 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ДИФФУЗИЕЙ И ГИДРОДИНАМИКОЙ*

Б.А. УРЮКОВ

Институт проблем материаловедения НАН Украины, Киев, Украина

На примере уравнения теплопроводности уравнение диффузии записано в форме уравнения потока изоповерхностей (в частности изотерм). В отличие от исходного полученное уравнение оказалось нелинейным, подобным уравнению движения жидкости при постоянном давлении, с коэффициентом вязкости, равным коэффициенту диффузии (в частности, коэффициенту температуропроводности). Получены граничные условия, соответствующие граничным условиям первого – третьего родов для уравнения теплопроводности. Приведена система уравнений для определения формы изоповерхностей в пространстве и времени. На основании нелинейности уравнения потока изоповерхностей сделан вывод о том, что линейный процесс диффузии может быть неустойчивым по отношению к геометрическим возмущениям изоповерхностей.

Обратимся к наиболее известному и изученному диффузионному процессу — распространению тепла. Для простоты рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с постоянным коэффициентом температуропроводности a:

$$\Phi(t,\ x) = \frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0\ . \tag{1}$$

Если на поверхности $T = T(t, x)$ взять какую-либо линию $T = \text{const}$, то на ней

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V\frac{\partial T}{\partial x} = 0\ , \tag{2}$$

причем $V = \partial x / \partial t$ — скорость движения изотермы. Скорость V, очевидно, известна, если поле температур задано.

Каждая изотерма движется со своей скоростью, поэтому полю $T(t, x)$ можно сопоставить поле скоростей $V(t, x)$. Следовательно, наряду с уравнением (1), описывающим поле температур, должно существовать уравнение, описывающее поле скоростей изотерм. Найдем это уравнение, т. е. исключим из системы уравнений (1), (2) температуру. Можно с большой долей вероятности предположить, что искомое уравнение, как и (1), должно быть уравнением второго порядка. В связи с этим продифференцируем оба уравнения по t и x, а уравнение (2) — еще и дважды по x, предполагая, что все нужные производные существуют и не обращаются тождественно в нуль на плоскости (t, x). В результате получим систему:

---

* Публикуется в дискуссионном порядке.

$$T_t - aT_{xx} = 0,$$
$$T_t + VT_x = 0,$$
$$T_{tt} - aT_{txx} = 0,$$
$$T_{tt} + VT_{tx} + V_tT_x = 0,$$
$$T_{tx} - aT_{xxx} = 0,$$
$$T_{tx} + VT_{xx} + V_xT_x = 0,$$
$$T_{txx} + VT_{xxx} + 2V_xT_{xx} + V_{xx}T_x = 0, \quad (3)$$

где индексы означают дифференцирование по соответствующей координате. Система (3) состоит из семи уравнений и содержит семь различных производных от температуры. Отсюда следует, что для существования решения определитель этой системы должен быть равным нулю. Раскрывая определитель, получим:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + 2V\frac{\partial V}{\partial x} = a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Это уравнение представляет собой уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости без градиента давления со скоростью, равной $2V$. Коэффициентом вязкости здесь служит коэффициент температуропроводности.

Уравнение (4) верно и в неодномерном пространстве, если под ∂x понимать приращение нормали к линии (или поверхности) изотермы, а под V — скорость изотермы в направлении этой нормали. Действительно, уравнения (1), (2) в общем случае можно записать как

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,T = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V\mathrm{grad}\,T = 0. \quad (6)$$

Поскольку

$$\mathrm{grad}\,T = \frac{\partial T}{\partial n}\vec{n}, \quad \vec{V} = V_n\vec{n},$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали, то вместо (6) будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_n\frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

Учитывая, что $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,T = \frac{\partial^2 T}{\partial n^2}$, уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = 0.$$

Произведя те же выкладки, что и в одномерном случае, получим:

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + 2V_n \frac{\partial V_n}{\partial n} = a\frac{\partial^2 V_n}{\partial n^2} . \tag{7}$$

Итак, уравнение диффузии эквивалентно уравнению потока изоповерхностей. Это могут быть поверхности (или линии) постоянной температуры, концентрации примеси, индукции магнитного поля.

Граничные условия для V_n находятся из сопоставления условий, налагаемых на температуру, с уравнениями системы (3). Так, если на какой-либо границе задано условие $T = f(t)$, то для потока изотерм оно примет следующий вид:

$$\frac{f''}{f'} = \frac{1}{V_n}\frac{\partial V_n}{\partial t} - \frac{\partial V_n}{\partial n} + \frac{V_n^2}{a} ,$$

где штрих означает дифференцирование по t. Если f = const, то $V_n = 0$. Условие

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \varphi(t)$$

переходит в

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{\partial V_n}{\partial n} + \frac{V_n^2}{a} .$$

Для условия $\dfrac{\partial T}{\partial n} = \alpha T$ получаем

$$\alpha V_n - \frac{\partial V_n}{\partial n} + \frac{V_n^2}{a} = 0 . \tag{8}$$

Отметим, что граничное условие для $\varphi = 0$ находится из (8) при $\alpha = 0$.

Переходя к эйлеровым координатам в уравнении (7), получим

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + 2\left(\vec{V}\operatorname{grad}\right)\vec{V} = a\Delta\vec{V} . \tag{9}$$

После определения поля скоростей изотерм поле температур восстанавливается с помощью уравнения, в котором отсутствует производная по времени:

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} + V_n\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \text{или} \quad a\operatorname{div}\operatorname{grad} T + \vec{V}\operatorname{grad} T = 0 .$$

Определение формы изоповерхностей основано на решении уравнения, подобного уравнению эйконала в акустике. Оно следует из уравнения (2), если в нем $T = T(t, x)$ заменить на $F(T, t, x) = 0$, где T — “номер” отдельной изотермы, и записать его для пространственного случая:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\vec{V}_n \operatorname{grad} F .$$

Возведя обе части в квадрат, получим уравнения эйконала:

$$\frac{1}{V_n^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 = \left(\operatorname{grad} F\right)^2 ;$$

если F представить в виде $F = z - z(T, t, x, y)$, то оно принимает вид

$$\frac{1}{V_n^2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\,.$$

Скорость $V_n(t,x,y,z)$ определяется путем решения уравнения (9). Поскольку скольжение изотерм относительно самих себя отсутствует, то имеем

$$V_n^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\,.$$

Итак, всякий диффузионный процесс можно сопоставить с течением некоей жидкости, обладающей кинетической энергией и вязкостью. Полученные результаты могут быть полезны, если некоторые задачи диффузии удобно или более наглядно решать путем анализа формы и движения изоповерхностей. Наконец, следует обратить внимание на то, что диффузионные, сугубо линейные, процессы аналогичны нелинейному процессу течения жидкости, которое, в принципе, может быть неустойчивым. Возможно, неустойчивость будет проявляться в виде нарушения геометрии изоповерхностей.

Статья поступила в редакцию 28 января 1998 г.,
в доработанном виде — 26 ноября 1998 г.