

УДК 532.536

## ПОДСЕТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ СРЕДАХ

Г. А. Кузьмин, О. Н. Соболева\*

Институт теплофизики СО РАН, 630090 Новосибирск

\* Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090 Новосибирск

Рассматривается подсеточное моделирование фильтрационного течения жидкости в неоднородной пористой среде. С использованием гипотезы масштабного подобия выводится выражение для эффективного коэффициента проницаемости для крупномасштабной компоненты течения. Полученная модель проверяется численным моделированием полной задачи.

**Введение.** Неоднородность пористой среды оказывает существенное влияние на фильтрационные процессы. Естественные пористые среды обычно существенно неоднородны, что можно учесть следующим образом [1, 2]. Крупномасштабные (грубые) детали структуры среды, например крупные зоны, на которые можно разбить среду, легко выделяемые пласты или прослойки, описываются в модели непосредственно. Мелкомасштабные детали распределения проницаемости и пористости неизвестны. Их следует учитывать в рамках статистического подхода, вводя эффективные параметры: пористость, проницаемость и т. д.

Теоретическое определение эффективных параметров требует решения соответствующих задач в средах со случайными полями. В настоящей работе эффективные параметры определяются с использованием усовершенствованной гипотезы масштабного подобия Колмогорова для трехмерных сред.

Идеи масштабного подобия использованы А. Н. Колмогоровым [3] при описании схемы случайного процесса последовательного дробления частиц (золотин в золотоносных россыпях, частиц горных пород и т. д.). Для учета перемежаемости неоднородной среды можно использовать идеи, предложенные А. Н. Колмогоровым в работе о локальной структуре турбулентности вязкой несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса [4]. При использовании этого подхода основными свойствами сред являются автомодельность, иерархически пространственная структурированность и степенные зависимости. Для пористых осадочных пород установлены степенные зависимости и измерены корреляционные функции плотности и других параметров среды [2]. Применение гипотез подобия, сходных с предложенными А. Н. Колмогоровым [4], позволяет получить зависимости, близкие к экспериментальным.

Бесконечные мультипликативные каскады Колмогорова [5] ведут к крайне неоднородным “дырявым” (канторовым, фрактальным) множествам [6], которые широко применяются в геофизических задачах. Применение методов теории фракталов требует использования языка геометрии, который недостаточно знаком многим специалистам, работающим с пористыми неоднородными средами. Между тем основные идеи, используемые в настоящей работе, близки к идеям работы [4]. Другим преимуществом применяемого подхода является то, что основные параметры и функции теории неоднородных сред приближаются к полученным в экспериментах.

**1. Масштабное подобие пористой среды.** Пористая среда описывается набором полей (пористостью, проницаемостью, коэффициентами в законе Гука и т. д.), которые могут зависеть от пространственных координат и времени. При измерении этих полей неизбежно их сглаживание по пространству и времени. Зависимость параметров от времени обычно слабая, поэтому наиболее существенно пространственное сглаживание. Рассмотрим поле проницаемости среды, которое определяет скорость фильтрации жидкости при наличии в ней градиента давления.

Пусть несжимаемая жидкость протекает через пористую среду с коэффициентом проницаемости  $\epsilon(\mathbf{x})$ . При малых числах Рейнольдса скорость фильтрации  $\mathbf{v}$  и давление  $p$  связаны законом Дарси  $\mathbf{v} = \epsilon(\mathbf{x})\nabla p$ . Из условия несжимаемости  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \epsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} p(\mathbf{x}) \right) = 0. \quad (1)$$

Пусть поле проницаемости известно. Это означает, что в каждой точке  $\mathbf{x}$  выполнено ее измерение при прокачивании жидкости через образец малого размера  $l_0$ . Случайная функция пространственных координат  $\epsilon(\mathbf{x})$  рассматривается как предел проницаемости  $\epsilon(\mathbf{x}, l_0)$ . При  $l_0 \rightarrow 0$   $\epsilon(\mathbf{x}, l_0) \rightarrow \epsilon(\mathbf{x})$ . Зависимость  $\epsilon(\mathbf{x}, l_0)$  от масштаба  $l_0$  можно рассматривать не как неточность процессов измерения, а как фактор, позволяющий разработать новые подходы к исследованию случайно-неоднородной среды. Для того чтобы перейти на более грубую сетку  $l_1$ , можно сгладить полученное поле  $\epsilon(\mathbf{x}, l_0)$  по масштабу  $l_1 > l_0$ . Однако неясно, будет ли полученное поле истинной проницаемостью, описывающей фильтрацию в области масштабов  $(l_1, L)$ , где  $L$  — наибольший масштаб. Вообще говоря, это не так. Чтобы найти проницаемость на более крупной сетке, надо выполнить измерение вновь, прокачивая жидкость через более крупные образцы размером  $l_1$ . Необходимость этой процедуры вызвана тем, что флуктуации проницаемости в интервале масштабов  $(l_0, l_1)$  имеют корреляции с индуцируемыми ими флуктуациями давления. Для их нахождения используется уравнение (1). Поиск закона преобразования эффективной проницаемости при изменении масштаба сетки облегчается в случае сред, обладающих масштабным подобием.

Аналогично [4, 5] рассмотрим безразмерное поле  $\psi$ , равное отношению проницаемости, сглаженной по двум различным масштабам  $l, l'$ :

$$\psi(\mathbf{x}, l, l') = \epsilon(\mathbf{x}, l') / \epsilon(\mathbf{x}, l), \quad l' < l$$

( $\epsilon(\mathbf{x}, l)$  — сглаженная по масштабу  $l$  проницаемость  $\epsilon(\mathbf{x}, l_0)$ ). В дальнейшем под сглаживанием по масштабу  $l$  понимается, например, отбрасывание гармоник Фурье с волновыми числами  $k \geq l$  в разложении исследуемой функции. Предполагается, что для относительных полей  $\psi(\mathbf{x}, l, l')$  справедлива гипотеза статистического масштабного подобия, согласно которой имеется интервал масштабов  $l_0 < l < L$ , в котором корреляционные функции полей  $\psi(\mathbf{x}, l, l')$  всех порядков инвариантны по отношению к масштабному преобразованию

$$\mathbf{x} \rightarrow K\mathbf{x}, \quad l \rightarrow Kl, \quad l' \rightarrow Kl'.$$

Следствия гипотезы подобия для поля  $\psi(\mathbf{x}, l, l')$  усложнены большим количеством его аргументов, однако можно найти более простое поле, однозначно связанное с  $\psi(\mathbf{x}, l, l')$  и обладающее всеми его свойствами.

По построению функция  $\psi$  обладает следующим свойством:

$$\psi(\mathbf{x}, l, l'') = \psi(\mathbf{x}, l, l')\psi(\mathbf{x}, l', l''). \quad (2)$$

Для масштаба  $l''$ , близкого к  $l'$ , разложим функцию  $\psi(\mathbf{x}, l, l'')$  в ряд по  $l''$  в точке  $l'$ :

$$\psi(\mathbf{x}, l, l'') = \psi(\mathbf{x}, l, l') + \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, l, l')}{\partial l'} (l'' - l') + \dots \quad (3)$$

Аналогично разложим функцию  $\psi(\mathbf{x}, l', l'')$  в ряд в точке  $l'$ :

$$\psi(\mathbf{x}, l', l'') = \psi(\mathbf{x}, l', l') + \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, l', l'')}{\partial l''} \Big|_{l''=l'} (l'' - l') + \dots = 1 + \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, l', l'y)}{l' \partial y} \Big|_{y=1} (l'' - l') + \dots, \quad (4)$$

где  $y = l''/l'$ . Подставляя разложения (3), (4) в (2), получим уравнение для  $\psi(\mathbf{x}, l, l')$

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, l, l')}{\partial l'} = \frac{1}{l'} \psi(\mathbf{x}, l, l') \varphi(\mathbf{x}, l'), \quad (5)$$

где  $\varphi(\mathbf{x}, l') = \partial \psi(\mathbf{x}, l', l'y) / l' \partial y \Big|_{y=1}$ . Из уравнения (5) следует соотношение

$$\varphi(\mathbf{x}, l) = \frac{\partial \ln \varepsilon(\mathbf{x}, l)}{\partial \ln l}. \quad (6)$$

Получили поле  $\varphi(\mathbf{x}, l)$ , которое определяет функцию  $\varepsilon(\mathbf{x}, l_0)$ , но обладает свойствами простого масштабного подобия. Вся существенная информация о пористой среде содержится в статистических свойствах поля  $\varphi(\mathbf{x}, l)$ . Среда известна, если статистические свойства функции  $\varphi(\mathbf{x}, l)$  заданы. Масштабно-инвариантные флуктуации поля  $\varphi$  могут наблюдаться только в некоторой конечной области масштабов  $l_0 < l < L$ . Решение уравнения (6) имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{x}, l_0) = \varepsilon_0 \exp \left( - \int_{l_0}^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right). \quad (7)$$

Для определенности предположим, что неоднородности более крупного масштаба, чем  $L$ , отсутствуют. Коэффициент  $\varepsilon_0$  в формуле (7) будем считать постоянным. Рассмотрим корреляционную функцию (центральный момент)  $\varphi(\mathbf{x}, l)$ :

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, l, l') = \langle \varphi(\mathbf{x}, l) \varphi(\mathbf{y}, l') \rangle_c = \langle \varphi(\mathbf{x}, l) \varphi(\mathbf{y}, l') \rangle - \langle \varphi(\mathbf{x}, l) \rangle \langle \varphi(\mathbf{y}, l') \rangle.$$

Здесь и далее центральные моменты отмечены нижним индексом  $c$  после закрывающей угловой скобки. Предположим, что среда статистически не зависит от положения начала отсчета системы координат и изотропна. Тогда рассматриваемая корреляционная функция зависит только от следующих аргументов:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, l, l') = \Phi((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, l, l').$$

Для простоты используем то же обозначение  $\Phi$  в правой части. Статистическая масштабная инвариантность поля  $\varphi$  означает, что для любого положительного  $K$  справедливо равенство

$$\Phi((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, l, l') = \Phi(K^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, Kl, Kl'),$$

где  $K > 0$ . Выбрав  $K = 1/l$ , получим

$$\Phi((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, l, l') = \Phi((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 / l^2, l'/l). \quad (8)$$

Из этого уравнения следует, что функция  $\Phi$  зависит только от двух аргументов. Если поле  $\varphi$  негауссово, то существенны корреляции всех порядков. Для них легко выводятся соотношения, аналогичные (8). Здесь они не приводятся, поскольку при численном моделировании используется простейшая из масштабно-инвариантных моделей — логарифмически нормальная модель. Заметим также, что естественное расширение масштабной инвариантности (конформная симметрия) рассмотрена авторами в работе [7]. Конформная инвариантность позволяет ограничить функциональную зависимость корреляционных функций всех порядков более жестко, чем при использовании одного масштабного подобия.

**2. Логарифмически нормальная модель для проницаемости.** В данной работе предполагается, что случайное поле  $\varphi$  имеет гауссово распределение. В этом случае количество его независимых корреляционных функций уменьшается до первых двух. В теории вероятности случайные гауссовы величины считаются одними из простейших объектов. Проницаемость  $\epsilon(\mathbf{x}, l_0)$  имеет логарифмически нормальное распределение. Таким образом, масштабно-инвариантная логарифмически нормальная модель является простейшей из класса масштабно-симметричных моделей.

Следует отметить, что в данной логарифмически нормальной модели должно выполняться равенство

$$\langle \epsilon(\mathbf{x}, l_0) \rangle = \varepsilon_0. \quad (9)$$

Для таких полей, как поле пористости, условие (9) следует из их физического смысла. Это условие справедливо и для поля проницаемости, так как согласно эргодической гипотезе сглаживание по большим объемам эквивалентно статистическому осреднению. Равенство (9) показывает, что постоянная  $\varepsilon_0$  равна проницаемости, сглаженной по большому объему, и отличается от эффективной проницаемости  $\varepsilon_{00}$ , измеренной на самом крупном масштабе, которая определяется прокачиванием жидкости через очень большой образец масштаба  $L$ .

Используя (7), (9), получим

$$\left\langle \exp \left( - \int_{l_0}^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \right\rangle = 1. \quad (10)$$

Согласно [5] для любой неслучайной функции  $\theta(l)$  и гауссова поля  $f(l)$  справедлива формула

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left( - i \int_l^L \theta(l_1) f(l_1) dl_1 \right) \right\rangle = \\ = \exp \left( - i \int_l^L \theta(l_1) \langle f(l_1) \rangle dl_1 - \frac{1}{2} \int_l^L dl_1 \int_l^L dl_2 \theta(l_1) \theta(l_2) \langle f(l_1) f(l_2) \rangle_c \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Выбирая  $f(l) = \varphi(\mathbf{x}, l)$ ,  $\theta(l) = -i/l$ , из (10), (11) получим

$$\int_{l_0}^L \frac{dl_1}{l_1} \int_{l_0}^L \frac{dl_2}{l_2} \langle \varphi(\mathbf{x}, l_1) \varphi(\mathbf{x}, l_2) \rangle_c - 2 \int_{l_0}^L \langle \varphi(\mathbf{x}, l_1) \rangle \frac{dl_1}{l_1} = 0, \quad (12)$$

где  $\langle \varphi \rangle$  — константа, что следует из однородности и масштабной инвариантности  $\varphi(\mathbf{x}, l)$ . В частном случае некоррелированных флуктуаций поля  $\varphi$  разных масштабов модель упрощается. Выберем корреляционную функцию в виде

$$\Phi((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2/l^2, l'/l) = \Phi_0 \exp(-(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2/l^2) \delta(\ln l - \ln l'). \quad (13)$$

Тогда при  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  из (12) следует

$$\Phi_0 = 2 \langle \varphi \rangle. \quad (14)$$

Формула (10) верна при произвольных пределах интегрирования, поскольку показатель экспоненты (12) обращается в нуль, если выполняется (14).

Рассмотрим корреляционную функцию  $\epsilon$  в точках  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ . Из (7) следует

$$\langle \epsilon(\mathbf{x}, l_0) \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{r}, l_0) \rangle = \left\langle \varepsilon_0^2 \exp \left[ - \left( \int_{l_0}^L (\varphi(\mathbf{x}, l_1) + \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, l_1)) \frac{dl_1}{l_1} \right) \right] \right\rangle.$$

Выбирая в формуле (11)  $f(l) = \varphi(\mathbf{x}, l) + \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, l)$ ,  $\theta(l) = -i/l$ , получим

$$\begin{aligned} \langle \epsilon(\mathbf{x}, l_0) \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{r}, l_0) \rangle &= \varepsilon_0^2 \exp \left( - 2 \langle \varphi \rangle \ln \frac{L}{l_0} + \int_{l_0}^L \frac{dl_1}{l_1} \int_{l_0}^L \frac{dl_2}{l_2} \langle \varphi(\mathbf{x}, l_1) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, l_2) \rangle_c \right) = \\ &= \varepsilon_0^2 \exp \left( - 2 \langle \varphi \rangle \ln \frac{L}{l_0} + \int_{l_0}^L \frac{dl_1}{l_1} \int_{l_0}^L \Phi \left( \frac{r^2}{l_1^2}, \frac{l_1}{l_2} \right) \frac{dl_2}{l_2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (15), для корреляционной функции  $\epsilon$  из (13) получим оценку при  $r < L$ , которая аналогична формуле для корреляционной функции скорости диссипации энергии [5]

$$\langle \epsilon(\mathbf{x}, l_0) \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{r}, l_0) \rangle \approx C (r/L)^{-\Phi_0}. \quad (16)$$

Постоянная в (16) задается выражением  $C = \varepsilon_0^2 (L/l_0)^{-2 \langle \varphi \rangle} e^{-\Phi_0 \gamma}$ , где  $\gamma = 0,577 22$  — константа Эйлера;  $l_0$  — минимальный масштаб. В случае  $r \gg L$   $\langle \epsilon(\mathbf{x}, l_0) \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{r}, l_0) \rangle \rightarrow \varepsilon_0^2$ . Этот случай не представляет интереса и далее не рассматривается. При наличии конформной симметрии аналогичные оценки получены в работе [7] без использования предположения о некоррелированности по  $\ln l$ .

Константа  $C$  в формуле (16) не универсальна, поскольку определяется интегралом, который выходит за пределы интервала масштабного подобия, а показатель степени  $\Phi_0 = 2 \langle \varphi \rangle$  универсален, так как пропорционален среднему от универсального поля  $\varphi$ . Для осадочных пород значение корреляционной функции плотности песчаника  $2 \langle \varphi \rangle \approx 0,3$  [2]. В теоретических исследованиях корреляционные функции с дельтаобразной зависимостью по масштабу можно не использовать. Это не имеет существенного значения, но для численных расчетов использование корреляционных функций значительно облегчает моделирование такого поля. Результаты проведенных численных экспериментов могут быть полезны при решении задач для более широкого класса реальных сред.

**3. Подсеточная модель.** Будем предполагать, что проницаемость  $\epsilon$  изменяется в широком диапазоне масштабов, поэтому непосредственное вычисление поля давления из уравнения невозможно или требует больших вычислительных затрат. В настоящей работе показано, что упростить уравнение (1) так, чтобы оно правильно описывало только крупномасштабную компоненту давления и не содержало информации о мелкомасштабных пульсациях, можно с помощью универсальной формулы, если в мелкомасштабную компоненту входит только масштабно-инвариантная часть пульсаций проницаемости.

Представим функцию проницаемости  $\epsilon(\mathbf{x}, l_0)$  в виде суммы двух компонент. Крупномасштабная компонента получается из  $\epsilon(\mathbf{x}, l_0)$  с помощью сглаживания, а мелкомасштабная (подсеточная) — как разность  $\varepsilon' = \epsilon(\mathbf{x}, l_0) - \varepsilon_l$ . В силу уравнения (10), которое в рассматриваемой модели справедливо для любых пределов интегрирования, крупномасштабная проницаемость  $\varepsilon_l$  получается также статистическим осреднением  $\epsilon$  по мелкомасштабным пульсациям. Статистическое распределение для  $p$  определяется уравнением (1), если известно распределение для  $\epsilon$ . Определим крупномасштабную (надсеточную) компоненту давления как условное среднее  $p_l(\mathbf{x}) = \langle p(\mathbf{x}) \rangle_l$ . Рассматривается статистическое среднее от  $p(\mathbf{x})$  — решений уравнения (1), в которых коэффициент проницаемости имеет

фиксированную крупномасштабную часть  $\varepsilon_l$ , но произвольную мелкомасштабную компоненту  $\varepsilon'$ . Подсеточная компонента давления  $p' = p - p_l$  не представляет интереса, но ею нельзя пренебречь в уравнении фильтрации

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon_l(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} p_l(\mathbf{x}) + \left\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} p'(\mathbf{x}) \right\rangle_l \right) = 0, \quad (17)$$

поскольку второе выражение в этом уравнении может быть существенно. Вид этого члена определяется далее из подсеточной модели.

Используя гипотезу масштабного подобия для среды, получим приближительную градиентную модель для подсеточного слагаемого. Используем подход Ландау — Лифшица [8]. В [8, п. 9] вычислена эффективная диэлектрическая проницаемость смеси при упрощающих предположениях о малости флуктуаций и их пространственного масштаба. Уравнения, упрощающие предположения и модель, полученная в настоящей работе, аналогичны приведенным в [8]. При выводе подсеточной формулы предполагается, что подсеточные флуктуации малы по амплитуде и имеют малый пространственный масштаб. Поскольку численная проверка показала хорошее соответствие модельным расчетам, в конце данного пункта приводятся предположения о причинах такого соответствия и виде эффективного параметра разложения в более полной теории.

Выполним оценку второго слагаемого в (17). Вычитая из уравнения (1) уравнение (17), получим уравнение для подсеточной компоненты давления

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon'(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} p_l(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}, l) \frac{\partial}{\partial x_j} p'(\mathbf{x}) + \varepsilon'(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} p'(\mathbf{x}) - \left\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} p'(\mathbf{x}) \right\rangle_l \right) = 0. \quad (18)$$

Методика получения подсеточной модели аналогична применяемой в методе ренормализационной группы [9]. С использованием теории возмущений решается подсеточное уравнение, результат решения подставляется в надсеточное уравнение. Данная процедура многократно повторяется для более крупных разделительных масштабов. В результате получаются уравнения для преобразования параметров подсеточной модели при изменении разделительного масштаба. Модель, подобная полученной в [8], дает закон преобразования параметров при малом изменении разделительного масштаба.

Оставляя в (18) члены первого порядка малости по  $\varepsilon'$  и  $p'$ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon'(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} p_l(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}, l) \frac{\partial}{\partial x_j} p'(\mathbf{x}) \right) = 0.$$

Считая, что  $\varepsilon(\mathbf{x}, l)$  и  $\partial p_l(\mathbf{x}) / \partial x_j$  меняются медленно по сравнению с  $\varepsilon'$  и  $p'$ , можно записать

$$\Delta p'(\mathbf{x}) = -\varepsilon(\mathbf{x}, l)^{-1} \nabla \varepsilon'(\mathbf{x}) \nabla p_l(\mathbf{x}).$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$p'(\mathbf{x}) = - \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\nabla \varepsilon'(\mathbf{x}') \nabla p_l(\mathbf{x}')}{\varepsilon(\mathbf{x}', l)} d\mathbf{x}', \quad (19)$$

где  $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  — функция Грина. Используя полученное выражение для компоненты подсеточного давления (19), оценим второй член в уравнении (17):

$$\begin{aligned} - \left\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}', l)} \frac{\partial}{\partial x'_i} \varepsilon'(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_i} p_l(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right\rangle_l = \\ = \left\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \int \frac{\partial}{\partial x'_j} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}', l)} \frac{\partial}{\partial x'_i} \varepsilon'(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_i} p_l(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right\rangle_l = \end{aligned}$$

$$= \int \left\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x'_j} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}', l)} \frac{\partial}{\partial x'_i} \varepsilon'(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_i} p_l(\mathbf{x}') \right\rangle_l d\mathbf{x}'.$$

Поскольку  $\varepsilon(\mathbf{x}, l)$  и  $\partial p_l(\mathbf{x})/\partial x_j$  меняются медленно по сравнению с  $\varepsilon'$  и  $p'$ , применяя теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} & \int \left\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x'_j} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_i} \varepsilon'(\mathbf{x}') \right\rangle_l d\mathbf{x}' \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}, l)} \frac{\partial}{\partial x_i} p_l(\mathbf{x}) \approx \\ & \approx - \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{\partial}{\partial x'_i} \langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \varepsilon'(\mathbf{x}') \rangle_l d\mathbf{x}' \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}, l)} \frac{\partial}{\partial x_i} p_l(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Корреляционная функция  $\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \varepsilon'(\mathbf{x}') \rangle = f((\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2)$  инвариантна относительно начала отсчета и изотропна, поэтому для нее  $(\partial/\partial x'_j)(\partial f/\partial x'_i) = \delta_{ij} \Delta f/D$ , где  $D$  — размерность пространства

$$- \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\delta_{ij}}{D} \langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \varepsilon'(\mathbf{x}') \rangle_l d\mathbf{x}' \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}, l)} \frac{\partial}{\partial x_i} p_l(\mathbf{x}) = - \frac{1}{D} \langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \varepsilon'(\mathbf{x}) \rangle_l \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}, l)} \frac{\partial}{\partial x_j} p_l(\mathbf{x}).$$

Будем считать, что зависимость  $\varepsilon(\mathbf{x})$  содержит все масштабы в интервале  $(l - \delta l, L)$  и построена по формуле (7). В этом случае  $\varepsilon'(\mathbf{x})$  можно определить следующим образом:

$$\varepsilon'(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}, l - \delta l) - \varepsilon(\mathbf{x}, l) = \varepsilon_0 \left[ \exp \left( - \int_{l-\delta l}^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) - \exp \left( - \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \right].$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\varepsilon'(\mathbf{x}) \simeq -\varepsilon(\mathbf{x}, l) \int_{l-\delta l}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1}.$$

Тогда

$$\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \varepsilon'(\mathbf{x}') \rangle_{lc} = \varepsilon(\mathbf{x}, l)^2 \int_{l-\delta l}^l \int_{l-\delta l}^l \langle \varphi(\mathbf{x}, l_1) \varphi(\mathbf{x}', l_2) \rangle_{lc} \frac{dl_1}{l_1} \frac{dl_2}{l_2}.$$

Центральный и начальный моменты для  $\varepsilon'(\mathbf{x})$  совпадают, так как  $\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \rangle = 0$ . Для корреляционной функции (13), дельта-коррелированность по логарифму масштаба приводит к равенству

$$\langle \varphi(\mathbf{x}, l_1) \varphi(\mathbf{x}, l_2) \rangle_{lc} = \langle \varphi(\mathbf{x}, l_1) \varphi(\mathbf{x}, l_2) \rangle_c.$$

Подставляя это решение в уравнение фильтрации и используя для гауссова поля  $\varphi$  формулу (13), получим следующее выражение для подсеточного члена в (17):

$$-(\Phi_0 \delta l / (lD)) \nabla [\varepsilon(\mathbf{x}, l) \nabla p_l(\mathbf{x})]. \quad (20)$$

Эта формула аналогична выражению для диэлектрической проницаемости смеси, полученному в [8]. Подставив (20) в (17), получим выражение для эффективной проницаемости, возникающей в надсеточном уравнении:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, l) = \varepsilon_{0l} \exp \left( - \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) = \frac{\varepsilon_{0l}}{\varepsilon_0} \varepsilon_l(\mathbf{x}, l), \quad (21)$$

где  $\varepsilon_{0l}$  зависит только от масштаба и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d \ln \varepsilon_{0l}}{d \ln l} = -\frac{\Phi_0}{D}.$$

Решение этого уравнения показывает, что постоянная в  $\varepsilon_{0l}$  зависит от подсеточного масштаба как степень:

$$\varepsilon_{0l} = \varepsilon_{00}(l/L)^{-\Phi_0/D}. \quad (22)$$

Таким образом, надсеточное давление удовлетворяет уравнению

$$\frac{\varepsilon_{0l}}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon(\mathbf{x}, l) \frac{\partial}{\partial x_j} p_l(\mathbf{x}) \right) = 0. \quad (23)$$

В формуле (23) влияние подсеточного слагаемого учитывается постоянным в пространстве множителем  $\varepsilon_{0l}/\varepsilon_0$ . Это влияние существенно в выражении для скорости фильтрации, а также если в (1) имеется слагаемое с производной по времени. Если для моделирования потока через фрактальную среду используется грубая сетка, то эффективную проницаемость нужно умножать на постоянный множитель согласно формуле (22).

В формуле (22) две константы:  $\varepsilon_{00}$  и  $\varepsilon_{0l}$ . Средняя скорость потока в пористой среде  $\langle \mathbf{v} \rangle = \varepsilon_{00} \nabla \langle p \rangle$ . Константа  $\varepsilon_{0l}$  используется в подсеточной модели. Константы  $\varepsilon_{00}$  и  $\varepsilon_{0l}$  различны, следовательно, подсеточные флуктуации давления существенны. Следует учитывать и различие постоянных  $\varepsilon_{00}$ ,  $\varepsilon_0$ . Постоянная  $\varepsilon_0$  получается осреднением формулы (7) по флуктуациям всех масштабов. Постоянная  $\varepsilon_{00}$  характеризует связь между средней скоростью и средним градиентом давления.

Показатель степени в формуле (22) мал при больших значениях  $D$ . Это позволяет считать, что параметр  $\Phi_0/D$  может быть использован как малый параметр в теории возмущений. Формула (20) дает градиентную модель. Точное выражение для подсеточных слагаемых должно содержать некоторые нелокальные интегральные выражения. Для уточнения модели нужно учитывать следующие члены разложения в формуле (17). В п. 4 численным моделированием проверяется формула (22).

**4. Численное моделирование.** Решается задача о фильтрации в неоднородной пористой среде в кубе с ребром  $L_0$ . На гранях  $y = 0$  и  $y = L_0$  задается постоянное давление:  $p(x, y, z)|_{y=0} = p_1$ ,  $p(x, y, z)|_{y=L_0} = p_2$ ,  $p_1 > p_2$ . Давление на других гранях куба задается линейной зависимостью по  $y$   $p = p_1 + (p_2 - p_1)y/L_0$ . Основной фильтрационный поток направлен вдоль оси  $y$ . Флуктуации пористости вызывают флуктуации величины и направления скорости фильтрации.

Для численного расчета течения перейдем в (1) к безразмерным переменным. Все длины измеряются в единицах  $L_0$ , за единицу разности давлений выбирается  $p_1 - p_2$ . Проницаемость измеряется в единицах  $\varepsilon_0$ . Таким образом, достаточно решить задачу при  $\varepsilon_0 = 1$  в единичном кубе с единичным скачком давления.

Вначале вычисляется поле проницаемости. Интеграл в формуле (7) заменяется конечно-разностной формулой, в которой удобно перейти к логарифмам по основанию 2:

$$\varepsilon_l(\mathbf{x}) = \exp \left( -\frac{1}{\log_2 e} \int_{\log_2 l}^{\log_2 L_0} \varphi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) = 2^{-\int_{\log_2 l}^{\log_2 L_0} \varphi(\mathbf{x}, \tau) d\tau} \approx 2^{-\sum_{i=-8}^0 \varphi(\mathbf{x}, \tau_i) \delta\tau}. \quad (24)$$

Здесь  $l_i = 2^{\tau_i}$ ;  $\delta\tau$  — шаг дискретизации по логарифму масштаба. Используется сетка по пространственным переменным  $256 \times 256 \times 256$ ;  $\delta\tau = 1$ ,  $\tau_i = 0, -2, -3, \dots, \log_2(1/256) = -8$ . Для расчета  $\varphi$  используется корреляционная функция (13):

$$\langle \varphi(\mathbf{x}, l_i) \varphi(\mathbf{y}, l_j) \rangle_c = (\Phi_0 / \ln 2) \exp(-(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 / 2^{2\tau_i}) \delta_{ij},$$



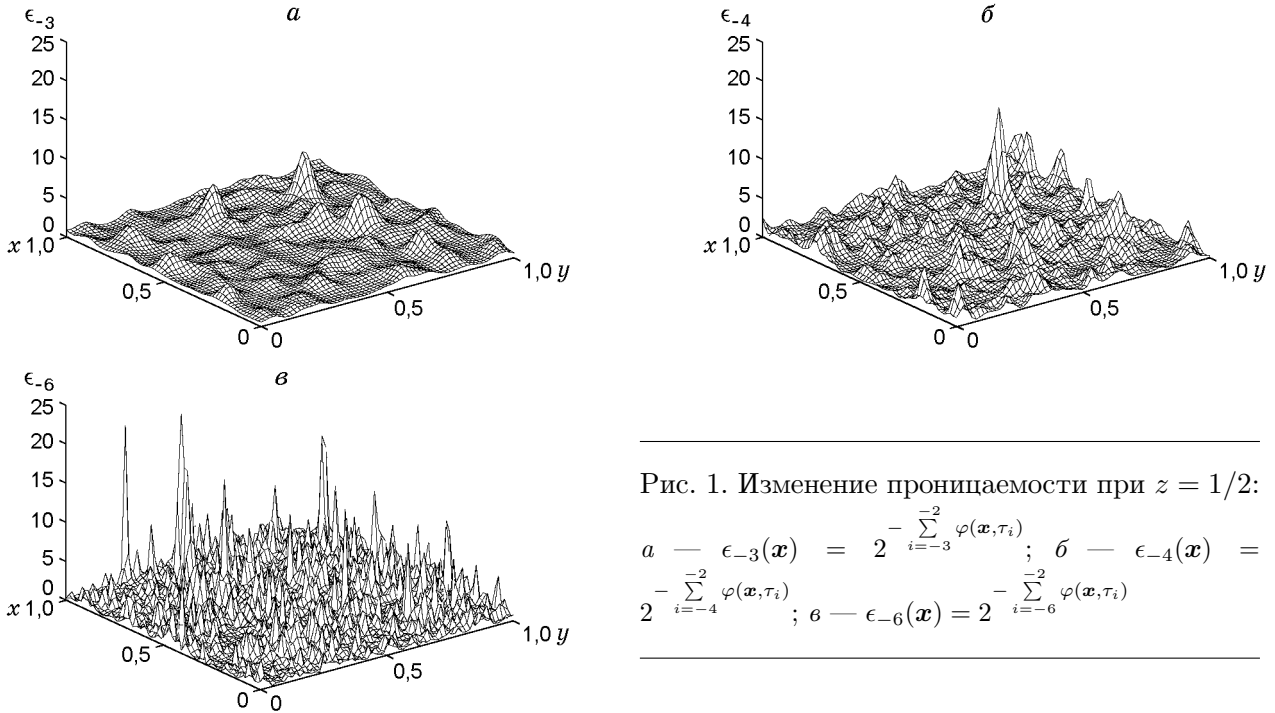


Рис. 1. Изменение проницаемости при  $z = 1/2$ :

$$\begin{aligned}
 a \text{ — } \epsilon_{-3}(\mathbf{x}) &= 2^{-\sum_{i=-3}^{-2} \varphi(\mathbf{x}, \tau_i)}; & б \text{ — } \epsilon_{-4}(\mathbf{x}) &= \\
 & & & 2^{-\sum_{i=-4}^{-2} \varphi(\mathbf{x}, \tau_i)}; & в \text{ — } \epsilon_{-6}(\mathbf{x}) &= 2^{-\sum_{i=-6}^{-2} \varphi(\mathbf{x}, \tau_i)}
 \end{aligned}$$

где константа  $\Phi_0 = 2\langle\varphi\rangle$  должна быть выбрана из экспериментальных данных для пористых природных сред. Согласно [2]  $\Phi_0 \approx 0,3$ . Функции на сетке являются матрицами. Структура корреляционной матрицы позволяет представить ее в виде прямого произведения четырех матриц более низкой размерности и применить для численного моделирования алгоритм “по строкам и столбцам” [10]. Дельта-коррелированность по логарифму масштаба означает, что на каждом масштабе  $l_i$  поле  $\varphi(\mathbf{x}, l_i)$  генерируется независимо. Общий показатель степени в (24) суммируется по статистически независимым слоям.

В настоящих расчетах два верхних и три нижних слоя оставлены незаполненными, т. е. поле  $\varphi$  на них равно нулю. Два пустых верхних уровня означают, что масштаб самых крупных пульсаций проницаемости  $L = 1/8$ . Это позволяет при осреднении заменить приближенно-вероятностные средние величины осредненными по пространству. Три самых мелких уровня оставлены пустыми, что обусловлено требованием, согласно которому рассматриваемая разностная задача должна хорошо аппроксимировать уравнение (1) на всех масштабах.

В конкретных задачах масштабы  $L, l_0$  могут принимать различные значения. В данной работе они не конкретизируются, поскольку ее целью является поиск универсальной подсеточной модели и ее универсальных показателей степени (типа  $\Phi_0/D$  в формуле (22)). Для приближенного расчета можно использовать некоторое ограниченное количество слоев. В данном случае их четыре. На рис. 1 показано изменение проницаемости по мере увеличения вклада все более мелких флуктуаций. Приведено соответствующее поле проницаемости для различных масштабов в среднем сечении  $z = 1/2$ . В соответствии с процедурой вывода подсеточной формулы для ее проверки необходимо численно решить полную задачу и выполнить вероятностное осреднение по мелкомасштабным пульсациям. В результате получится подсеточное слагаемое, которое можно сравнивать с теоретическим выражением. Вероятностное осреднение требует многократного решения полной задачи с заданной крупномасштабной компонентой проницаемости, но случайной подсеточной компонентой с последующим осреднением по ней. В настоящей работе выполнен более экономный вариант проверки, основанный на степенной зависимости полного расхода от отношения

максимального и минимального масштабов в надсеточной области при расчете проницаемости по формуле (7), если вклад подсеточной области не учитывается. Чтобы показать это, выполним следующие преобразования полученных формул. Эффективная проницаемость (21) должна приводить к истинной скорости в области  $(L, l)$ . В частности, полный расход жидкости через образец должен совпадать с истинным независимо от масштаба обрезки  $l$ .

Для среднего расхода жидкости через сечение имеем

$$-\left\langle \varepsilon_{0l} \exp \left( - \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \nabla p \right\rangle = Q = \text{const}.$$

Правая часть этого равенства не зависит от  $l$ . Учитывая равенство (22), получим

$$\varepsilon_{0l} \left\langle \exp \left( - \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \nabla p \right\rangle = \varepsilon_{00} \left( \frac{l}{L} \right)^{-\Phi_0/D} \left\langle \exp \left( - \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \nabla p \right\rangle = -Q.$$

Следовательно,

$$\left\langle \exp \left( - \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \nabla p \right\rangle = -\frac{Q}{\varepsilon_{00}} \left( \frac{l}{L} \right)^{\Phi_0/D}.$$

В соответствии с законом Дарси, записанным на масштабе  $L_0 \gg L$ , суммарный расход определяется соотношением

$$Q = \varepsilon_{00}(p_1 - p_2)/(y_2 - y_1).$$

В настоящих расчетах считается, что масштаб  $L_0$  достаточно велик по сравнению с  $L$  и вероятностное среднее можно заменить осреднением по пространству (эргодическая гипотеза). Таким образом, численной проверке подлежит формула

$$\left\langle \exp \left( - \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \nabla p \right\rangle = \frac{p_2 - p_1}{y_2 - y_1} \left( \frac{l}{L} \right)^{\Phi_0/D},$$

где среднее понимается как среднее по пространству.

Далее численно решается сеточный аналог безразмерного уравнения (1). Используется итерационный метод в сочетании с быстрым преобразованием Фурье и методом прогонки второго порядка точности [11]. На рис. 2 приведены изолинии скорости для случая, когда заполнены слои по масштабу с номерами  $-6 \div -3$ . Затем получаем левую часть (4), используя численное решение уравнения (1), когда пульсациями самого мелкого масштаба являются  $\varepsilon_{-3}, \dots, \varepsilon_{-6}$ . Теоретически определено, что график должен иметь вид прямой (поскольку получена степенная зависимость) с наклоном к оси абсцисс ( $\Phi_0/D = 0,1$ ). Результат численной проверки приведен на рис. 3 ( $\Omega = \log_2 \left\langle \exp \left( - \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \frac{\nabla p}{p_2 - p_1} \right\rangle$  —

расход жидкости). Получено достаточно хорошее соответствие теоретического результата численному. На рис. 4 приведена зависимость  $\Theta = \log_2 [ \langle (\nabla p)^2 \rangle / (p_2 - p_1)^2 ]$  от  $\tau$ . Очевидно, что данная зависимость также степенная, что свидетельствует о масштабной инвариантности поля градиента давления.

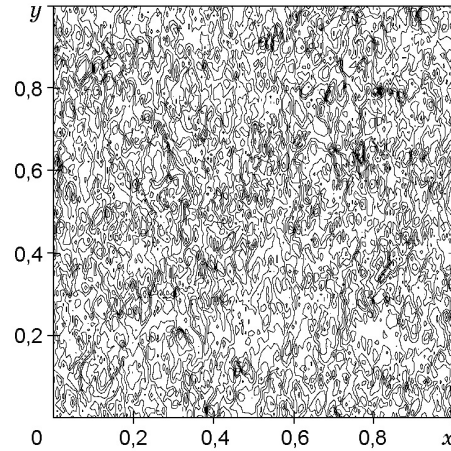
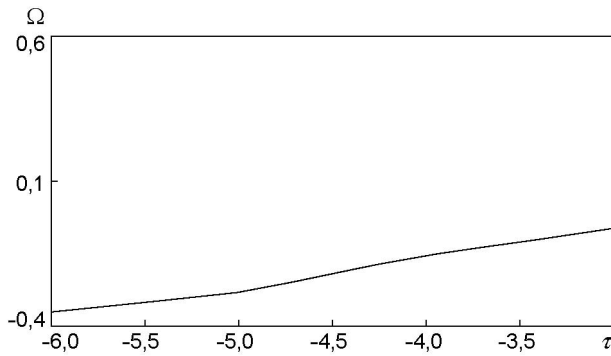
Рис. 2. Изолинии скорости в сечении  $z = 1/2$ 

Рис. 3

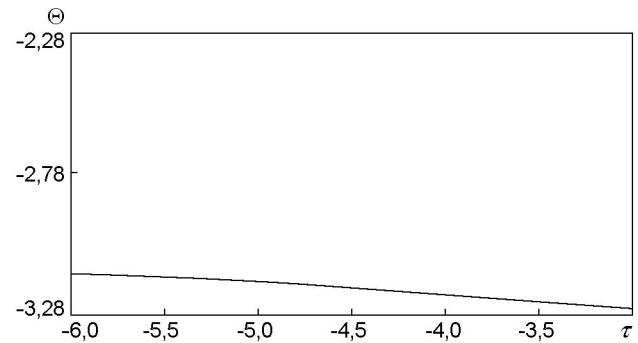
Рис. 3. Зависимость  $\Omega(\tau)$  при  $p_1 - p_2 = 1$ ,  $y_2 - y_1 = 1$ 

Рис. 4

Рис. 4. Зависимость  $\Theta(\tau)$ 

**5. Обсуждение результатов расчетов.** Анализ графиков изменения проницаемости и скорости фильтрации показывает их близость к результатам численных экспериментов, полученным с использованием метода мультифракталов. Как отмечено выше, в рамках подхода, использованного в настоящей работе, мультифракталы получаются, если минимальный масштаб  $l_0$  устремить к нулю. При этом реализуются крайне нерегулярные поля, которые отличны от нуля на множестве канторова типа (см. рис. 1). Для описания таких полей требуется использовать язык геометрии. Численный эксперимент на канторовых множествах выполняется с применением методологии задачи протекания. Обычно строится геометрическое множество типа ковра со связями разного масштаба (например, ковер Серпинского), по которым может протекать жидкость, тепло, примесь и т. п. При решении вероятностных задач на фракталах получаются сингулярные распределения вероятности, затем строятся огибающие (см., например, [12]), для которых выводятся дифференциальные уравнения. В настоящей работе минимальный масштаб остается конечным, поэтому какие-либо сингулярности отсутствуют. Канторовы множества не возникают, и весь анализ не выходит за пределы аппарата дифференциальных уравнений и теории случайных процессов. Спецификой задачи является использование гипотезы масштабного подобия. Основными объектами теории являются поля, свойства которых могут быть (хотя бы в принципе) измерены непосредственно.

Простейшей моделью, рассмотренной в рамках настоящего подхода, является масштабно-инвариантная логарифмически нормальная модель несущей среды. Логарифмически нормальная модель критиковалась по нескольким причинам. Например, логарифмически нормальное распределение не удовлетворяет условиям теоремы Карлемана, в силу чего оно не определяется своими моментами. В ряде работ утверждается, что при правильном применении логарифмически нормальной модели таких проблем не возникает [13]. Метод, используемый в настоящей работе, применим для более широкого класса моделей, чем логарифмически нормальная модель. Предполагается, что найденные степенные зависимости характерны и для более общих случаев.

Авторы выражают благодарность В. А. Огородникову за консультации при численной реализации гауссовых однородных изотропных случайных полей.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Швидлер М. И.** Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985.
2. **Sahimi M.** Flow phenomena in rocks: from continuum models, to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing // *Rev. Modern Phys.* 1993. V. 65. P. 1393–1534.
3. **Колмогоров А. Н.** О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // *Докл. АН СССР.* 1941. Т. 31. С. 99–101.
4. **Kolmogorov A. N.** A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. P. 82–85.
5. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Т. 2.
6. **Mandelbrot B. B.** The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1983.
7. **Kuz'min G., Soboleva O.** Conformal symmetric model of the porous media // *Appl. Math. Lett.* 2001. V. 14. P. 783–788.
8. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
9. **Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J.** Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid // *Phys. Rev.* 1977. V. 16. P. 732–749.
10. **Ogorodnikov V. A., Prigarin S. M.** Numerical modeling of random processes and fields: Algorithms and applications. Utrecht: Kluwer, 1996.
11. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
12. **O'Shaughnessy Ben, Procaccia I.** Diffusion on fractals // *Phys. Rev.* 1985. V. 13, N 5. P. 3073–3083.
13. **Молчан Г. М.** Турбулентные каскады: Мультифрактальные характеристики // *Вычисл. сейсмология.* 1997. Т. 29. С. 155–167.

*Поступила в редакцию 18/II 2002 г.*