УДК 532.592
DOI: 10.15372/PMTF202415502

СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

А. Е. Голиков, Н. И. Макаренко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mails: a.golikov@g.nsu.ru, makarenko@hydro.nsc.ru

Рассматривается нелинейная задача о неустановившемся движении кругового цилиндра в идеальной бесконечно глубокой жидкости под действием возникающих гидродинамических нагрузок. Используется метод сведения решения исходной математической задачи к решению эквивалентной интегродифференциальной системы уравнений для функции, определяющей форму искомой свободной поверхности, для нормальной и тангенциальной составляющих скорости жидкости на ней и для неизвестной траектории движения цилиндра. Построена начальная по времени асимптотика решения, описывающего движение цилиндра из состояния покоя.

Ключевые слова: идеальная жидкость, свободная граница, круговой цилиндр, начальная асимптотика движения

Введение. Задача о движении цилиндра в идеальной жидкости является модельной гидродинамической задачей для изучения взаимодействия тела со свободной поверхностью. Этой задаче посвящено большое количество исследований, выполненных с использованием линейной теории волн [1–3]. В нелинейной постановке начальная стадия движения жидкости, вызванного заданным ускорением погруженного цилиндра, изучалась с помощью полуаналитических методов в работах [4–9]. Численные методы применялись при решении этой задачи в работах [10–13], а экспериментальное изучение проводилось в работах [14–16]. Аналитическому исследованию гидродинамических нагрузок на цилиндр посвящены работы [17, 18].

В данной работе исследуется совместное движение жидкости и свободноплавающего цилиндра. Выведена замкнутая система интегродифференциальных уравнений, моделирующая движение цилиндра в точной нелинейной постановке. Построена начальная по времени асимптотика ее решения, описывающего всплытие и погружение цилиндра из состояния покоя под действием силы плавучести.

1. Уравнения движения жидкости. Рассматривается двумерное нестационарное безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Исходными являются уравнения Эйлера для вектора скорости $\boldsymbol{u} = (U, V)$ и давления p, записанные в безразмерных переменных:

$$\begin{gathered} U_t + UU_x + VU_y + p_x = 0, \qquad V_t + UV_x + VV_y + p_y = -1, \\ U_x + V_y = 0, \qquad U_y - V_x = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-71-20039).

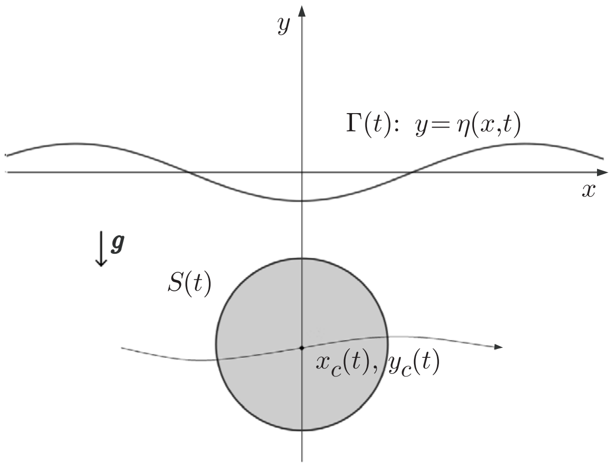

Рис. 1. Схема течения

Область течения в плоскости xOy (рис. 1) ограничена искомой свободной поверхностью $\Gamma(t)$: $y = \eta(x,t)$ (положение равновесия $y = 0$) и поверхностью кругового цилиндра $S(t)$: $(x - x_c(t))^2 + (y - y_c(t))^2 = r^2$. Поскольку цилиндр движется под действием возникающих гидродинамических нагрузок, траектория центра его сечения $\boldsymbol{x}_c(t) = (x_c(t), y_c(t))$ также заранее неизвестна и подлежит определению. Масштабы для введения безразмерных переменных выбираются таким образом, что все линейные размеры отнесены к известному расстоянию h между осью цилиндра в начальный момент времени $t = 0$ и невозмущенным уровнем свободной поверхности. При этом в качестве масштабов времени t, скорости жидкости $\boldsymbol{u}$ и давления p принимаются величины $\sqrt{h/g}$, $\sqrt{gh}$ и ρgh соответственно (ρ — плотность жидкости). Для цилиндра, полностью погруженного в жидкость, отношение $r = R/h$ размерного радиуса R к начальному заглублению оси h находится в диапазоне $0 < r < 1$. На свободной границе $\Gamma(t)$ должны выполняться кинематическое и динамическое условия

$$\eta_t + U\eta_x = V, \qquad p = p_a/(\rho gh) = \text{const}, \qquad (x,y) \in \Gamma(t), \tag{2}$$

где p_a — атмосферное давление. На границе цилиндра требуется выполнение условия непротекания

$$(\boldsymbol{u} - \dot{\boldsymbol{x}}_c(t)) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \qquad (x,y) \in S(t), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности цилиндра. Предполагается, что на бесконечности скорость жидкости стремится к нулю:

$$(U,V) \to (0,0), \qquad \eta \to 0, \quad x^2 + y^2 \to \infty.$$

В момент времени $t = 0$ задаются начальное положение цилиндра $\boldsymbol{x}_c(0)$ и его скорость $\dot{\boldsymbol{x}}_c(0)$, форма свободной поверхности и поле скоростей в области течения:

$$\eta(x,0) = \eta_0(x), \qquad \boldsymbol{u}(x,y,0) = \boldsymbol{u}_0(x,y).$$

При этом начальные данные должны удовлетворять условиям согласования

$$U_{0x} + V_{0y} = 0, \qquad U_{0y} - V_{0x} = 0, \qquad y < \eta_0(x),$$
$$(\boldsymbol{u}_0 - \dot{\boldsymbol{x}}_c(0)) \cdot \boldsymbol{n}_0 = 0, \qquad (x,y) \in S(0).$$

Эти условия выполняются автоматически, в случае если цилиндр начинает движение с нулевой начальной скоростью в первоначально покоящейся жидкости:

$$\eta_0(x) \equiv 0, \qquad \boldsymbol{u}_0(x,y) \equiv 0, \qquad \dot{\boldsymbol{x}}_c(0) = 0 \qquad (t = 0).$$

2. Редукция задачи к уравнениям на свободной границе. Исходные уравнения движения жидкости сводятся к равносильной системе граничных интегродифференциальных уравнений для функции $\eta(x,t)$, определяющей форму свободной поверхности, а также для касательной и нормальной скоростей жидкости u и v на кривой Γ:

$$u(x,t) = (U + \eta_x V)\big|_{y=\eta(x,t)}, \qquad v(x,t) = (V - \eta_x U)\big|_{y=\eta(x,t)}.$$

Давление p исключается из рассмотрения с помощью динамического условия (2) путем проецирования векторного уравнения импульса в системе (1) на касательное направление $\boldsymbol{\tau} = (1, \eta_x)$ к свободной границе $y = \eta(x,t)$. С учетом кинематического условия (2) отсюда получаем систему дифференциальных уравнений

$$\eta_t = v, \qquad u_t + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u^2 - 2\eta_x uv - v^2}{1+\eta_x^2}\Big) + \eta_x = 0. \tag{4}$$

Систему (4) дополняет граничное уравнение, которое порождается интегральным представлением комплексной скорости $F(z,t) = U - iV$, аналитической по $z = x + iy$ в двухсвязной области течения с границей $\Gamma \cup S$:

$$2\pi i F(z,t) = \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{F(\zeta,t)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{r^2}{(z - z_c(t))^2}\,\overline{\int\limits_{\Gamma(t)} \frac{F(\zeta,t)\,d\zeta}{\zeta - z_*}} + \frac{2\pi i r^2 \dot z_c(t)}{(z - z_c(t))^2}. \tag{5}$$

Здесь $z_* = z_c(t) + r^2/(\overline{z - z_c(t)}\,)$ — инверсия точки z относительно окружности $S(t)$ радиусом r с центром $z_c(t) = x_c(t) + iy_c(t)$; черта означает комплексное сопряжение. В формуле (5) присутствуют интегралы только по свободной границе $\Gamma(t)$, которые согласно теореме Милн-Томсона об окружности обеспечивают выполнение условия непротекания (3) на движущемся цилиндре. Вещественное интегральное уравнение для функций u, v, η получается из комплексного соотношения (5) в пределе при $z \to z(x,t) = x + i\eta(x,t)$, $\zeta(s,t) = s + i\eta(s,t) \in \Gamma(t)$ и имеет вид

$$\pi v(x,t) + \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(x,s;t) v(s,t)\,ds = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(x,s;t) u(s,t)\,ds + v_d(x,t), \tag{6}$$

где v.p. — главное значение; A, B — ядра сингулярных операторов, задаваемые формулой

$$A(x,s;t) + iB(x,s;t) = \frac{i z_x(x,t)}{z(x,t) - \zeta(s,t)} + \frac{i r^2\,\bar z_x(x,t)}{[\bar z(x,t) - \bar z_c(t)]^2 [z_*(x,t) - \zeta(s,t)]},$$

$z_*(x,t)$ — инверсия точки $z(x,t)$ относительно окружности $S(t)$; функция

$$v_d(x,t) = \operatorname{Re}\Big(\frac{2\pi i\,\dot z_c(t)\,z_x(x,t)}{z(x,t) - z_c(t)}\Big)$$

является нормальной компонентой скорости на свободной поверхности, индуцируемой диполем, сосредоточенным на оси цилиндра $z = z_c(t)$.

В случае если начальное поле скоростей $\boldsymbol{u}_0$ имеет ненулевую циркуляцию $\gamma \neq 0$ вокруг цилиндра, в правую часть (5) входит дополнительное слагаемое $\gamma/(z - z_c)$ типа точечного вихря. В отсутствие циркуляции можно ввести потенциал φ для касательной скорости $u = \varphi_x$, который является граничным следом $\varphi(x,t) = \Phi(x, \eta(x,t), t)$ для однозначной функции — потенциала Φ поля скоростей жидкости $U = \Phi_x$, $V = \Phi_y$. Система (4), рассматриваемая для пары функций (η, φ), представляет собой известную гамильтонову формулировку Захарова [19] задачи о волнах на воде. Аналитическая реализация действия нелокального оператора Дирихле — Неймана $v = N(\eta)\varphi$ (нормальной производной) с помощью интегрального уравнения с ядрами, нелинейно зависящими от формы свободной поверхности η, предложена Л. В. Овсянниковым [20]. Модификация этого подхода применительно к задаче о погруженном в жидкости цилиндре с использованием представления (5) подробно обсуждалась в работах [5, 7, 8].

3. Уравнение движения цилиндра. Траектория центра масс $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_c(t)$ тела, движущегося в тяжелой жидкости, определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_c = \boldsymbol{f}_H + \boldsymbol{f}_A + m\boldsymbol{g}, \tag{7}$$

где m — масса тела; $\boldsymbol{f}_H$ — вектор гидродинамических реакций; $\boldsymbol{f}_A$ — гидростатическая сила Архимеда; $\boldsymbol{g} = (0, -g)$ — вектор ускорения свободного падения. Для цилиндра, состоящего из однородного материала с плотностью ρ_c, центр масс $m = \pi\rho_c R^2$ совпадает с центром окружности $S(t)$ радиусом R. Тогда в безразмерных переменных, введенных ранее для системы (1), уравнение (7) записывается в виде

$$\pi r^2(\beta\ddot{\boldsymbol{x}}_c + (\beta - 1)\boldsymbol{e}_y) = \boldsymbol{f}_H, \qquad \boldsymbol{f}_H = \int\limits_{S(t)} p_H\, \boldsymbol{n}\, ds, \tag{8}$$

где $\beta = \rho_c/\rho$ — коэффициент плавучести цилиндра; p_H — негидростатическая часть полного давления p; $\boldsymbol{e}_y = (0, 1)$ — орт оси Oy; $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к окружности $S(t)$. С учетом аналитичности комплексной скорости $F(z, t)$ по переменной $z = x+iy$ уравнение (8) можно записать в комплексной форме. При нахождении вектора гидродинамических нагрузок $\boldsymbol{f}_H = (X, Y)$, действующих со стороны жидкости на цилиндр, используем формулу Седова (формулу (3.5) в [21. Гл. 1, § 3]), согласно которой

$$X + iY = \overline{\frac{i}{2}\int\limits_{S(t)} F^2(z, t)\, dz} + \frac{d}{dt}\Big(\pi r^2 \dot{z}_c(t) + i\int\limits_{S(t)} zF(z, t)\, dz\Big). \tag{9}$$

Для вычисления контурных интегралов в формуле (9) применим представление (5) функции $F(z, t)$, которое содержит интегралы только по свободной границе $\Gamma(t)$. Раскладывая величину $z_* = z_c(t) + r^2/\overline{(z - z_c(t))}$ в ряд по степеням параметра r, запишем соотношение (5) в виде мультипольного разложения

$$F(z, t) = H(z, t) + \frac{r^2\dot{z}_c(t)}{(z - z_c(t))^2} - \frac{r^2}{(z - z_c(t))^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}\,\overline{H^{(n)}(z_c(t), t)}}{(z - z_c(t))^n}, \tag{10}$$

где

$$H^{(n)}(z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(t)}\frac{F(\zeta, t)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \qquad H(z, t) \stackrel{\text{def}}{=} H^{(0)}(z, t). \tag{11}$$

Из определения (11) коэффициентов $H^{(n)}$ следует, что функции $H^{(n)}(z, t)$ аналитичны по z всюду в области под свободной границей $\operatorname{Im} z < \eta(x, t)$. Поэтому согласно теореме о вычетах для них справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(t)}\frac{H(z, t)}{(z - z_c(t))^{n+2}}\, dz = \operatorname*{Res}_{z=z_c(t)}\Big(\frac{H(z, t)}{(z - z_c(t))^{n+2}}\Big) = H^{(n+1)}(z_c(t), t).$$

Подставляя выражение (10) в формулу (9) и аналогичным образом вычисляя возникающие при этом интегралы по окружности $S(t)$, получаем формулу для нагрузок

$$X + iY = \pi r^2\big[-\ddot{z}_c(t) + 2\,\overline{H'_t(z_c(t), t)} + 2G(z_c(t), t)\big], \tag{12}$$

где функция G имеет вид

$$G(z_c(t),t) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} H^{(n)}(z_c(t),t)\,\overline{H^{(n+1)}(z_c(t),t)}. \tag{13}$$

Вторая производная $\ddot{z}_c$ в формуле (12) учитывает присоединенную массу цилиндра при его нестационарном движении в неограниченной жидкости. Слагаемое в (12) с производной H'_t, соответствующее интегралу с $zF(z,t)$ в формуле Седова (9), также учитывает неустановившийся характер процесса. Функция G, билинейно зависящая от коэффициентов $H^{(n)}$, представляет собой интеграл от квадрата F^2 в правой части (9), который также присутствует в известной формуле Блазиуса — Чаплыгина для нелинейных нагрузок в случае стационарного движения. Основным свойством представления (12) является его зависимость только от функции η, определяющей мгновенную форму свободной границы $\Gamma(t)$, поля скоростей (u,v) на ней и траектории движения центра цилиндра $z_c(t)$. Таким образом, уравнение (8), замыкающее систему граничных интегродифференциальных уравнений (4), (6), принимает окончательную форму

$$(1+\beta)\,\ddot{z}_c(t) - 2\,\overline{H'_t(z_c(t),t)} - 2G(z_c(t),t) = i(1-\beta), \tag{14}$$

где функции H, G определены выше формулами (11), (13). Заметим, что полученная система уравнений (4), (6), (14) равносильна исходной нелинейной задаче о движении незакрепленного цилиндра под свободной поверхностью в точной постановке. При выводе этой системы не принимались упрощающие предположения.

4. Асимптотика движения из состояния покоя. Рассмотрим совместное движение жидкости и кругового цилиндра с плавучестью $\beta \ne 1$ из состояния покоя при начальных данных

$$\eta(x,0) = u(x,0) = v(x,0) = 0, \qquad z_c(0) = -i, \qquad \dot{z}_c(0) = 0.$$

Решение уравнений (4), (6), (14) будем искать в виде степенных рядов

$$\eta = t^2\eta_2(x) + t^3\eta_3(x) + t^4\eta_4(x) + \ldots, \qquad u = t^3u_3(x) + t^4u_4(x) + \ldots,$$
$$v = tv_1(x) + t^2v_2(x) + t^3v_3(x) + t^4v_4(x) + \ldots, \qquad z_c(t) = -i + c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + \ldots$$

с вещественными функциональными коэффициентами η_n, u_n, v_n и комплексными числовыми коэффициентами $c_n = a_n + ib_n$. В силу дифференциальных уравнений (4) коэффициенты рядов для функций η, u, v связаны рекуррентными соотношениями

$$\eta_{n+1} = \frac{v_n}{n+1} \quad (n \geqslant 1), \quad u_3 = \frac{1}{6}\,(v_1^2 - v_1)_x, \quad u_4 = \frac{1}{4}\,(v_1v_2)_x - \frac{1}{12}\,v_{2x}, \quad \ldots$$

таким образом, что ряды для функций η, u однозначно определены, если известны коэффициенты разложения нормальной скорости v. В свою очередь, коэффициенты v_n находятся из граничного интегрального уравнения (6), которое дает цепочку интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\pi v_n(x) + r^2\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - r^2p(x))q'(x) - (s - r^2q(x))p'(x)}{(1 - r^2p(x))^2 + (s - r^2q(x))^2}\,v_n(s) = f_n(x) \tag{15}$$

с ядрами Пуассона

$$p(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad q(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{16}$$

и правыми частями

$$f_1(x) = 4r^2(q'(x)b_2 - p'(x)a_2),$$
$$f_n = f_n(v_1, \ldots, v_{n-1}; a_2, b_2, \ldots, a_{n+1}, b_{n+1}), \qquad n \geqslant 2.$$

Таким образом, последовательность уравнений (15) является рекуррентной относительно искомых коэффициентов v_n, но не обладает таким свойством по отношению к коэффициентам a_n, b_n разложения функции z_c. Однако это не препятствует построению решения, поскольку интегродифференциальное уравнение (14) для $z_c(t)$ имеет второй порядок по t, что в конечном счете обеспечивает рекуррентность всего процесса. Далее решение v_n уравнения (15) строится в виде ряда по степеням параметра r (безразмерный радиус цилиндра). В результате, пренебрегая членами порядка r^6, получаем следующие приближенные выражения для коэффициентов v_n, содержащие ядра Пуассона (16) и неизвестные коэффициенты a_n, b_n разложения функции $z_c(t)$:

$$v_1(x) = r^2(4 - r^2)(q'(x)b_2 - p'(x)a_2), \qquad v_2(x) = \frac{3}{2}\, r^2(4 - r^2)(q'(x)b_3 - p'(x)a_3),$$

$$v_3(x) = r^2(4 - r^2)\Big[2q'(x)b_4 - 2p'(x)a_4 + p''(x)\Big(\frac{1}{6}\, b_2 + a_2^2 - b_2^2\Big) + q''(x)\Big(\frac{1}{6}\, a_2 - 2a_2b_2\Big)\Big] +$$
$$+ r^4\Big[\frac{4}{9}\,(p^{(4)}(x)(a_2^2 - b_2^2) - 2a_2b_2q^{(4)}(x)) + p'(x)\Big(2a_2b_2 - \frac{1}{3}\, a_2\Big) +$$
$$+ q'(x)\Big(a_2^2 - b_2^2 + \frac{1}{3}\, b_2\Big) + \frac{4}{3}\,(a_2^2 + b_2^2)\Big(p''(x) - \frac{7}{4}\, q'(x)\Big)\Big].$$

Последующие аналитические преобразования состоят в вычислении в явном виде интегралов $H^{(n)}(z,t)$ вида (11), в которые подставляются найденные асимптотические выражения для η, u, v, содержащие ядра Пуассона p и q, определенные формулой (16), и коэффициенты $c_n = a_n + ib_n$ разложения функции $z_c(t)$. Фактически данная процедура сводится к вычислению интегралов мультипольного вида от произведений, степеней и производных функций p и q, откуда следует асимптотическая формула

$$\frac{H^{(n)}(z,t)}{n+1} = (-1)^{n+1} t r^2\Big(1 - \frac{r^2}{4}\Big)\Big(\frac{2\bar{c}_2 + 3t\bar{c}_3 + 4t^2\bar{c}_4}{(z-i)^{n+2}} + t^2\, \frac{2(n+2)(i\bar{c}_2 + 3\bar{c}_2^2)}{3(z-i)^{n+3}}\Big) +$$
$$+ (-1)^{n+1} t^3 r^4\Big(\frac{\bar{c}_2 - 3i\bar{c}_2^2 + 11i|c_2|^2}{6(z-i)^{n+2}} + \frac{4(n+2)|c_2|^2}{3(z-i)^{n+3}} + \frac{4(n+2)(n+3)(n+4)\bar{c}_2^2}{9(z-i)^{n+5}}\Big) +$$
$$+ O(t^4 + r^6).$$

Аналогичным образом выводятся асимптотические формулы для производных функции $H^{(n)}(z,t)$ по z и t, которые могут быть найдены путем формального дифференцирования полученного выше выражения. В результате с учетом этих вычислений из соотношения (12) получаем следующую зависимость гидродинамических нагрузок от времени t:

$$\frac{X + iY}{\pi r^2} = -\ddot{z}_c(t) - 4r^2\Big(1 - \frac{r^2}{4}\Big)\Big(\frac{c_2 + 3tc_3 + 6t^2c_4}{(\bar{z}_c(t) + i)^2} + \frac{2t^2(3c_2^2 - ic_2)}{(\bar{z}_c(t) + i)^3}\Big) -$$
$$- t^2 r^4\Big(\frac{c_2 + 3ic_2^2 - 11i|c_2|^2}{(\bar{z}_c(t) + i)^2} + \frac{16|c_2|^2}{(\bar{z}_c(t) + i)^3} + \frac{64c_2^2}{(\bar{z}_c(t) + i)^5} + \frac{16|c_2|^2}{(\bar{z}_c(t) + i)^3(z_c(t) - i)^2}\Big) +$$
$$+ O(t^3 + r^6). \qquad (17)$$

В знаменателях дробей указанного частичного разложения при малых временах t еще содержится неизвестная функция $z_c(t)$ в конечном виде (т. е. не разложенная по степеням t), что обусловлено структурой мультипольных слагаемых. Используя выражения (17) для нагрузок в уравнении (14) и сравнивая степени в полном разложении по t, находим коэффициенты $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ и

$$b_2 = \frac{1-\beta}{2(1+\beta) - r^2(1-r^2/4)}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = b_2 \, \frac{r^2}{12} \, \frac{8b_2(1-2r^2) - (2-r^2)}{2(1+\beta) - r^2(1-r^2/4)} \tag{18}$$

для искомого закона движения цилиндра $z = z_c(t)$. Таким образом, процедура построения решения полностью замыкается, и для неизвестной формы свободной поверхности η получаем приближенную формулу

$$\eta(x,t) = t^2 r^2 (4-r^2)\Big(\frac{(b_2 + t^2 b_4)(1-x^2)}{2(1+x^2)^2} + t^2 \, \frac{b_2(6b_2-1)(1-3x^2)}{12(1+x^2)^3}\Big) + \\ + t^4 r^4 \Big(\frac{b_2(1-10b_2)(1-x^2)}{12(1+x^2)^2} + \frac{2b_2^2(3x^2-1)}{3(1+x^2)^3} - \frac{8b_2^2(5x^4-10x^2+1)}{3(1+x^2)^5}\Big) \tag{19}$$

с коэффициентами b_2, b_4, указанными в (18). При нейтральной плавучести $\beta = 1$ согласно (18) имеем $b_2 = b_4 = 0$, следовательно, в этом случае цилиндр остается в состоянии покоя при $t > 0$, а свободная граница сохраняет положение равновесия $\eta(x,t) \equiv 0$.

5. Результаты расчетов и их обсуждение. На рис. 2 представлены полученные по формуле (19) характерные формы свободной поверхности в фиксированный момент времени $t = 0{,}75$ в случае свободного погружения цилиндра радиусом $r = 0{,}5$ при различных значениях коэффициента плавучести $\beta > 1$. Для цилиндра с плавучестью $\beta = 2$ видны две сходящиеся волны, которые скатываются навстречу друг другу при первоначальном прогибе свободной поверхности, движущейся вниз вслед за телом. Указанный процесс образования сходящихся волн отмечался в работах [7, 8] в случае вынужденного погружения цилиндра с постоянным ускорением. Формы свободной поверхности, показанные на рис. 2 для значений коэффициента плавучести $\beta = 10$, 20, определяют последующие стадии формирования всплеска над погружающимся телом.

Также представляет интерес сравнение решения (19) с известным решением, полученным в работах [7, 8] для задачи о движении цилиндра с заданным постоянным ускорением. При построении такого решения в случае вертикального движения тела рекуррентный процесс, описанный в п. **4**, завершается после определения коэффициентов η_n, u_n, v_n. В этом случае свободная поверхность жидкости имеет форму

$$\eta_*(x,t) = t^2 r^2 (4-r^2) \, \frac{x^2-1}{2(1+x^2)^2} - t^4 r^2 \, \frac{(\lambda+6)(3x^2-1)}{3(1+x^2)^3} + \\ + \frac{t^4 r^4}{12}\Big(\frac{(\lambda+10)(x^2-1)}{(1+x^2)^2} + \frac{(\lambda+14)(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} - 32 \, \frac{5x^4-10x^2+1}{(1+x^2)^5}\Big), \tag{20}$$

где безразмерный параметр $\lambda = 2g/w$ определяется известным постоянным ускорением w.

На рис. 3 приведены решения (19), (20) в случае, когда заданное ускорение погружаемого цилиндра совпадает с собственным начальным ускорением свободного цилиндра с коэффициентом плавучести $\beta > 1$. Увеличивающееся со временем различие развития фаз нестационарного движения жидкости объясняется неодинаковым действием сил инерции в случаях постоянного и переменного ускорения тела. Действительно, согласно формулам (17), (18) гидродинамические нагрузки на цилиндр при его ускоренном вертикальном движении определяются приближенной формулой

$$\frac{X+iY}{\pi r^2} = \Big[-1 + \frac{r^2}{2}\Big(1 - \frac{r^2}{4}\Big)\Big] \ddot{z}_c(t) + O(r^6).$$

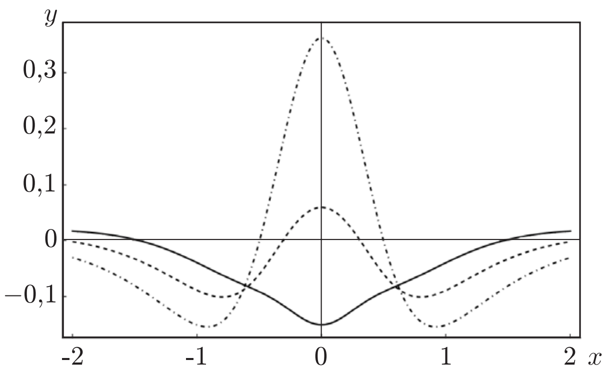

Рис. 2

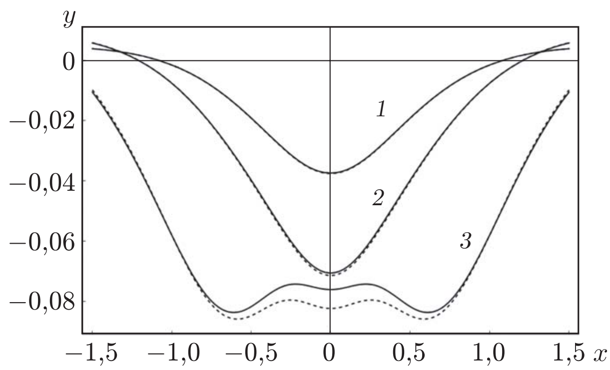

Рис. 3

Рис. 2. Форма поверхности жидкости при погружении свободного цилиндра радиусом $r = 0{,}5$ в момент времени $t = 0{,}75$:
сплошная линия — $\beta = 2$, пунктирная — $\beta = 10$, штрихпунктирная — $\beta = 20$

Рис. 3. Поверхность жидкости при свободном (решение (19)) (сплошные линии) и вынужденном (решение (20) с $\lambda = 5$) (пунктирные линии) погружении цилиндра радиусом $r = 0{,}5$ в различные моменты времени:
1 — $t = 0{,}3$, *2* — $t = 0{,}45$, *3* — $t = 0{,}75$

Как отмечалось при выводе уравнения (14), главный член этой асимптотики учитывает присоединенную массу цилиндра при его движении в неограниченном объеме жидкости. Слагаемые r^2 и r^4 в правой части представляют собой поправку к присоединенной массе в случае движения тела вблизи свободной границы. Приведенные выше выражения для этих корректирующих членов хорошо согласуются с известным выражением в работе [22].

Заключение. В работе исследована нелинейная задача о движении идеальной жидкости со свободной границей при наличии полностью погруженного в нее кругового цилиндра. Выведена эквивалентная замкнутая система интегродифференциальных уравнений, описывающая совместное движение жидкости и цилиндра с учетом действующих на тело гидродинамических нагрузок. Построено асимптотическое решение, моделирующее начальную стадию движения в случае всплывания или погружения цилиндра с плавучестью, отличающейся от нейтральной.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
2. **Степанянц Ю. А., Стурова И. В., Теодорович Э. В.** Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 21. С. 92–179.
3. **Mei C. C.** Theory and applications of ocean surface waves. Pt 1. Linear aspects / C. C. Mei, M. Stiassnie, D. K.-P. Yue. Singapore: World Scientific, 2005.
4. **Tyvand P. A., Miloh T.** Free-surface flow generated by a small submerged circular cylinder starting from the rest // J. Fluid Mech. 1995. V. 286. P. 103–116.
5. **Makarenko N. I.** Nonlinear interaction of submerged cylinder with free surface // Trans. ASME. J. Offshore Mech. Arctic Engng. 2003. V. 125, N 1. P. 72–75.
6. **Норкин М. В.** Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82.

7. **Kostikov V. K., Makarenko N. I.** Unsteady free surface flow above the moving circular cylinder // J. Engng Math. 2018. V. 112. P. 1–16.
8. **Martin Pardo R., Nedic J.** Free-surface disturbances due to the submersion of a cylindrical obstacle // J. Fluid Mech. 2021. V. 926. A1. DOI: 10.1017/jfm.2021.462.
9. **Tyvand P. A., Kostikov V. K.** Impulsive acceleration of a circular cylinder under free surface // J. Fluid Mech. 2023. V. 269. A12.
10. **Haussling H. J., Coleman R. M.** Nonlinear water waves generated by an accelerated circular cylinder // J. Fluid Mech. 1979. V. 461. P. 343–364.
11. **Горлов С. И.** Численные методы решения нелинейных нестационарных задач генерации волн погруженным в жидкость телом // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 6. С. 9–20.
12. **Zhu X., Faltinsen O. M., Hu C.** Water entry and exit of a horizontal circular cylinder // Trans. ASME. J. Offshore Mech. Arctic Engng. 2007. V. 129, N 4. P. 253–264.
13. **Guerber E., Benoit M., Grilli S., Buvat C.** A fully nonlinear implicit model for wave interaction with submerged structures in forced or free motion // Engng Anal. Boundary Elements. 2012. V. 36, N 7. P. 1151–1163.
14. **Greenhow M., Lin W.-M.** Nonlinear free surface effects: experiments and theory: Tech. Rep. / Massachusetts Inst. of Tech. N 83-19. Cambridge, 1983.
15. **Greenhow M., Moyo S.** Free motion of a cylinder moving below and through a free surface // Appl. Ocean Res. 2000. V. 22. P. 31–44.
16. **Martin Pardo R., Barua N., Lisak D., Nedic J.** Jetting onset on a liquid surface accelerated past a submerged cylinder // Flow. 2022. V. 2. E36. DOI: 10.1017/flo.2022.29.
17. **Wu G. X.** Hydrodynamic forces on a submerged circular cylinder undergoing large-amplitude motion // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 41–58.
18. **Голиков А. Е., Макаренко Н. И.** Гидродинамические нагрузки при разгоне цилиндра под свободной поверхностью // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 5. С. 89–99.
19. **Захаров В. Е.** Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
20. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов, П. И. Плотников, В. Ю. Ляпидевский, И. В. Стурова, В. И. Букреев, В. А. Владимиров. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
21. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980.
22. **Короткин А. И.** Присоединенные массы судостроительных конструкций: Справ. СПб.: Мор Вест, 2007.

Поступила в редакцию 2/V 2024 г.,
после доработки — 12/V 2024 г.
Принята к публикации 3/VI 2024 г.