

ласуются с экспериментальными результатами. При этом расчет с вязкостью  $\nu_{t1}$  лучше обобщает опытные данные около оси струи, а расчет с  $\nu_{t2}$  — на ее периферии.

На рис. 4 и 5 представлены расчетные кривые осевой скорости  $\bar{u}/\bar{u}(0, 0)$  для  $Re^* = 525$  и  $370$  соответственно (сплошные линии) и точками отмечены измеренные значения  $u_0/u_0(0, 0)$ . Штрихпунктирные линии отвечают решению системы уравнений (5) из [1] для линейного закона трения и расположены существенно выше измеренных значений скорости. Расчетные кривые для  $\nu_{t1}$  и  $\nu_{t2}$  практически совпадают и обобщают экспериментальные данные при  $x < 15$ ,  $Re^* = 370$  и  $x < 25$ ,  $Re^* = 525$ . Расхождение измеренных и расчетных значений осевой скорости в плоскости симметрии канала и средней по его толщине при больших  $x$  объясняется ламинаризацией струи; в этом случае, как отмечалось выше, измеренные  $u_0/u_0(0, 0)$  должны превышать расчетные  $\bar{u}/\bar{u}(0, 0)$  примерно на 30 %.

Сравнение расчетных зависимостей и опытных данных показывает, что модельная система уравнений (4) в целом позволяет прогнозировать развитие струйного течения в щелевом канале в переходном режиме.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жак В. Д., Мухин В. А., Накоряков В. Е., Сафонов С. А. Распространение затопленной струи в узкой щели // ПМТФ.— 1985.— № 3.
2. Görtler H. Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes // ZAMM.— 1942.— N 22.
3. Численные методы исследования течений вязкой жидкости/Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К. и др.— М.: Мир, 1972.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.

г. Новосибирск

Поступила 18/VI 1990 г.

УДК 532.542:660.095.026

Ю. В. Кожотов, М. О. Стояновский

### МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ЗАРАСТАНИЯ КАНАЛОВ ПРИ ТЕЧЕНИИ ПО НИМ ПОЛИМЕРИЗУЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Проведено аналитическое исследование течения вязкой полимеризующейся жидкости. Дано теоретическое обоснование возможности полного зарастания за конечное время участков трубопроводов при условии постоянства расхода реакционной среды. Рассматривается влияние поперечной диффузии на процесс зарастания каналов. Показано, что, несмотря на малую величину коэффициента молекулярной диффузии, поперечная диффузия может заметно изменить характер процесса зарастания. Влиянием поперечной диффузии объяснено прекращение зарастания каналов при определенных соотношениях диаметра, длины, скорости течения и скорости полимеризации. Предложена математическая модель процесса и получены соотношения для оценки длины входного участка и скорости образования пристеночного неподвижного слоя.

Явление зарастания труб при течении по ним полимеризующихся жидкостей встречается во многих технологических процессах: в трубчатых полимеризаторах при получении полиэтилена высокого давления, циркуляционных контурах полимеризаторов, теплообменных трубках и трубопроводах при получении полистирольных пластиков. Без учета этого явления, оценки влияния на скорость зарастания основных кинетических и гидродинамических характеристик, создание подобных процессов затруднено, что обуславливает интерес к этой задаче [1, 2]. С качественной точки зрения объяснить явление зарастания несложно. Степень превращения мономера зависит от времени пребывания в потоке, которое стремится к бесконечности по мере приближения к стенке. Вязкость, в свою очередь, сильно зависит от конверсии, следовательно, у стенки образуется слой повышенной (в пределе бесконечной) вязкости, постепенно распространяющийся к центру потока.

В [1, 2] в приближении малой толщины неподвижного слоя продуктов реакции по сравнению с шириной канала найдено аналитически соотношение для скорости роста этого слоя при постоянных напоре и расходе среды. Показано, что в первом случае канал зарастает за конечное время, а во втором его радиус убывает, как  $1/t$ , что, однако, не согласуется с опытом. Так, при получении полистирольных пластиков наблюдается полное зарастание некоторых циркуляционных и транспортных трубопроводов за конечное время при подаче среды шестеренными насосами, создающими расход, слабо зависящий от сопротивления трубопровода.

Вязкость полимеризующейся жидкости зависит не только от концентрации полимера (конверсии) и температуры (это существенно, так как реакция полимеризации идет с выделением тепла), но и от молекулярно-массового распределения. Поэтому полное описание напорного течения такой жидкости должно кроме динамического уравнения для неньютоновской жидкости с переменными свойствами и соответствующего уравнения переноса тепла включать подробную кинетическую модель для расчета молекулярных характеристик образующегося полимера. Поэтому решение данной задачи в полной постановке чрезвычайно сложно. Однако особенностью большинства полимеризационных процессов является резкая зависимость вязкости реакционной среды от времени, так как, во-первых, вязкость сильно растет с увеличением конверсии, а, во-вторых, скорость реакции, как правило, резко возрастает с увеличением вязкости (Гель-эффект) [3]. Для достаточно медленных реакций, когда можно считать течение изотермическим, это значительно упрощает анализ и позволяет получить соотношения для оценки скорости роста неподвижного слоя полимера и времени зарастания каналов.

Считаем, следуя [2], что состояние элемента среды определяется временем его пребывания в реакционном объеме так, что при  $\tau \leq T$  это жидкость, а при  $\tau > T$  — твердое тело ( $T$  — характерное время реакции полимеризации). В такой постановке время пребывания  $\tau$  и форма границы неподвижного слоя находятся из уравнения

$$(1) \quad d\tau/dt = 1 = \partial\tau/\partial t + \mathbf{V}\nabla\tau$$

( $\mathbf{V}$  — вектор скорости потока,  $t$  — время) с граничными условиями:  $\tau = 0$  на входе в реакционный объем,  $\tau = T$  на границе растущего неподвижного слоя.

Будем решать задачу при следующих допущениях: 1) скорость зарастания мала и определяется полем скоростей лишь в непосредственной близости к твердой границе, что позволяет считать профиль скорости линейным; 2) толщина неподвижного слоя много меньше характерного размера обтекаемой поверхности.

Рассмотрим сначала частный случай постоянной скорости сдвига  $\dot{\gamma} = \text{const}$ , соответствующий продольному обтеканию плоской пластины или течению в канале постоянной толщины (радиуса) на начальном этапе процесса, пока  $H \ll R$  ( $H$  — толщина растущего слоя,  $R$  — радиус канала). В этом случае система (1) примет вид

$$(2) \quad \partial\tau/\partial t + u\partial\tau/\partial x + v\partial\tau/\partial y = 1;$$

$$(3) \quad \tau|_{x=0} = 0, \quad \tau|_{y=H(x,t)} = T,$$

где  $x$  — расстояние от начала твердой границы;  $y$  — расстояние от твердой границы по нормали к ней;  $u$ ,  $v$  — составляющие скорости вдоль и по нормали к твердой границе соответственно.

Из приближения линейности профиля скорости следует

$$(4) \quad u = \dot{\gamma}(y - H(x, t)),$$

а из уравнения неразрывности  $\nabla\mathbf{V} = 0$

$$(5) \quad v = \dot{\gamma}(y - H(x, t))\partial H/\partial x.$$

Решение уравнения (2) в области с движущейся границей затруднительно, поэтому сделаем замену переменных:

$$(6) \quad \Theta = t - T, \quad Y = y - H(x, t), \quad X = x.$$

Подставляя (4)–(6) в (2), (3), получим

$$(7) \quad \partial\tau/\partial\Theta + \dot{\gamma}Y\partial\tau/\partial X - \phi\partial\tau/\partial Y = 1, \quad \tau|_{Y=0} = T, \quad \tau|_{X=0} = 0$$

( $\phi(X, \Theta) = \partial H(X, \Theta)/\partial\Theta$  — скорость роста неподвижного слоя продуктов реакции). Уравнение (7) относительно неизвестных  $\tau$  и  $\phi$  — уравнение в неподвижной области с постоянными коэффициентами и стационарными граничными условиями. Естественно предположить, что его решение

асимптотически стремится к решению стационарной задачи

$$(8) \quad \dot{\gamma} Y \partial \tau / \partial X - \varphi \partial \tau / \partial Y = 1;$$

$$(9) \quad \tau|_{X=0} = 0, \quad \tau|_{Y=0} = T.$$

Покажем, что эта задача корректна и позволяет найти как  $\tau(X, Y)$ , так и  $\varphi(X)$ . Введем переменную  $s(X, Y)$ , удовлетворяющую условиям

$$(10) \quad \partial Y / \partial s = \varphi(X), \quad \partial X / \partial s = -\dot{\gamma} Y;$$

$$(11) \quad s|_{Y=0} = 0 \quad \text{или} \quad Y|_{s=0} = 0.$$

С учетом (10) уравнение (8) принимает вид  $d\tau/ds = -1$  или

$$(12) \quad \tau = \tau|_{s=0} - s = \tau|_{Y=0} - s = T - s.$$

Из (9) и (12) вытекает  $\tau|_{X=0} = 0 = T - s$ , т. е.

$$(13) \quad s|_{X=0} = T.$$

Очевидно, что уравнения (10), (11) дополненные условием

$$(14) \quad X|_{s=0} = p$$

( $p$  — произвольное положительное число) при заданном  $\varphi(X) > 0$  имеют единственное решение в интервале  $X \in (0, p)$ . Задача состоит в поиске такой зависимости  $\varphi(X)$ , которая обеспечит выполнение условия (13) при любом  $p$ .

Разделив первое уравнение системы (10) на второе, получим  $dY/dX = -\varphi(X)/(\dot{\gamma} Y)$ , откуда с учетом (11) и (14)  $\dot{\gamma} Y^2/2 = \int_X^p \varphi(z) dz$  или

$$(15) \quad Y = \sqrt{\frac{2}{\dot{\gamma}} \int_X^p \varphi(z) dz}.$$

Подставляя (15) в (10), имеем  $dX/ds = -\dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\dot{\gamma}} \int_X^p \varphi(z) dz}$ , откуда

$$(16) \quad \int_0^p \frac{dX}{\dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\dot{\gamma}} \int_X^p \varphi(z) dz}} = \int_{\substack{Y=0 \\ X=p}}^{\substack{Y=\frac{2}{\dot{\gamma}} \int_0^p \varphi(z) dz \\ X=0}} ds$$

( $p$  — положительное число).

Из физических соображений ясно, что  $\varphi \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow 0$ . Это позволяет искать решение интегрального уравнения (16) в виде

$$(17) \quad \varphi(z) = az^b + O(z^b)$$

( $O(X)$  — бесконечно малая по сравнению с  $X$  величина). Подставляя (17) в (16) и вводя обозначения  $\chi = X/p$ ,  $\eta = z/p$ , находим

$$(18) \quad \int_0^1 \frac{p d\chi}{\sqrt{2a\dot{\gamma} p^{b+1} \int_\chi^1 \eta^b d\eta (1 + O(p^{-\frac{b+1}{2}}))}} = T.$$

Левая часть уравнения (18) не зависит от  $T$  только при  $b = 1$ ,  $O(p^{(b+1)/2})$ . В этом случае

$$\int_0^1 \frac{d\chi}{\sqrt{a\dot{\gamma} (1 + \chi^2)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{a\dot{\gamma}}} = T, \quad a = \pi^2/(4T^2\dot{\gamma}), \quad \varphi(X) = \pi^2 X/(4T^2\dot{\gamma}).$$

Таким образом, граница раздела раствора и неподвижного слоя продуктов реакции вращается вокруг начала пластины с угловой скоростью

$$(19) \quad \Omega = \pi^2 / (4\dot{\gamma}T).$$

Рассмотрим переменную скорости сдвига  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(X, \Theta)$ . При этом интегрирование уравнения неразрывности дает вместо (5) для  $v$  уравнение

$$(20) \quad v = \dot{\gamma}(y - H) \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial x} (y - H)^2 = \dot{\gamma} Y \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{Y^2}{2} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial X},$$

подставляя которое в (1), получим

$$(21) \quad \dot{\gamma} Y \partial \tau / \partial X - \phi \partial \tau / \partial Y = 1 - Y^2 \partial \dot{\gamma} / (2 \partial X \partial Y).$$

Покажем, что решение уравнения (8) для  $\phi(x)$  есть оценка снизу для решения уравнения (22). Действительно, пусть теперь в каждой точке потока и в каждый момент времени скорость «старения» среды возрастает в  $1 + \Psi(X, Y, \Theta)$  ( $\Psi \geq 0$ ) раз, т. е.  $d\tau/d\Theta = 1 + \Psi(X, Y, \Theta)$ . Такой эффект приведет к появлению в уравнении (8) дополнительного слагаемого

$$(22) \quad \dot{\gamma} Y \partial \tau / \partial X - \phi \partial \tau / \partial Y = 1 + \Psi.$$

В то же время ускорение «старения» среды может приводить лишь к увеличению скорости зарастания. Сравнивая (21) с (22), видим, что в роли  $\Psi$  здесь выступает положительный член  $-Y^2 \partial \dot{\gamma} / (2 \partial X \partial Y)$  ( $\partial \dot{\gamma} / \partial X > 0$ ,  $\partial \tau / \partial Y < 0$ ).

При  $Y \rightarrow \infty$  это величина порядка  $\Delta \dot{\gamma} / (2\dot{\gamma})$ . Несложные оценки показывают также, что она убывает с уменьшением  $Y$  и стремится к нулю, приближаясь к неподвижному слою продуктов реакции. Значит, оценка решения уравнения (21) решением уравнения (8) (с учетом зависимости  $\dot{\gamma}$  от  $X$ ) достаточно точна.

Заменой  $d\tilde{X} = dX / \dot{\gamma}(X)$  (22) приводится к виду  $Y \partial \tau / \partial \tilde{X} - \phi \partial \tau / \partial Y = 1$ , имеющему, как было показано, решение  $\phi = \pi^2 \tilde{X} / (4T^2)$ , и, следовательно, локальная угловая скорость вращения элемента поверхности  $H(X, t)$  по-прежнему определяется соотношением

$$\Omega(X) = d\phi/dX = d\phi/(\dot{\gamma}(X)dX) = \pi^2 / (4\dot{\gamma}(X)T^2).$$

Выражая  $\dot{\gamma}(X)$  через объемный расход среды  $\tilde{Q}$  и текущий радиус трубы  $r$ , запишем уравнение зарастания трубы:

$$(23) \quad \partial^2 r / (\partial X \partial t) = -\Omega = -\pi^3 r^3 / (16QT^2).$$

Переходя к безразмерным переменным  $\rho = r/R$ ,  $\tilde{l} = X/R$ ,  $\tilde{t} = \pi^3 R^3 t / (16QT^2)$  ( $R$  — начальный радиус трубы), получим

$$(24) \quad \partial^2 \rho / \partial \tilde{l} \partial \tilde{t} = -\rho^3, \quad \rho|_{\tilde{l}=0} = 1, \quad \rho|_{\tilde{t}=0} = 1.$$

Поскольку изменение масштабов величин  $X$  и  $T$  при сохранении произведения этих масштабов не меняет вида уравнения (24), значит, решение последнего есть функция одной переменной  $\eta = \tilde{l}\tilde{t}$ , при введении которой уравнение примет вид

$$(25) \quad \eta d^2 \rho / d\eta^2 + d\rho/d\eta = d(\eta d\rho/d\eta)/d\eta = -\rho^3;$$

$$(26) \quad \rho|_{\eta=0} = 0.$$

Второе начальное условие получается из требования конечности и гладкости зависимости  $\rho(\eta)$  решения уравнения (25):

$$(27) \quad d\rho/d\eta|_{\eta=0} = -1.$$

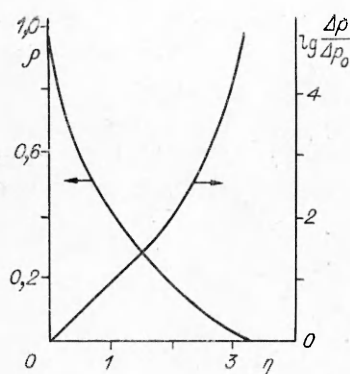


Рис. 1

Зависимость  $\rho(\eta)$ , найденная путем численного решения уравнения (25) с начальными условиями (26), (27), представлена на рис. 1.

Возвращаясь к размерным переменным, имеем зависимость радиуса трубы от времени и координаты:  $r = \pi^3 R^3 \rho x t / (16 Q T^2)$ , а также выражение для перепада давления  $\Delta p$  в трубе длиной  $\tilde{l} = \eta / \tilde{t}$ :

$$(28) \quad \Delta p / \Delta p_0 = \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} dx / \rho(x)$$

(оно приведено на рис. 1).

Особенностью полученного решения в отличие от [2] является то, что величина  $\rho(\eta)$  не стремится к нулю асимптотически при  $\eta \rightarrow \infty$ , а становится равной нулю при  $\eta \simeq 3$ . Такая зависимость в [2] есть результат допущения о малой по сравнению с диаметром трубы толщине неподвижного слоя продуктов реакции. Нами было использовано только предположение о малости величины частной производной  $\partial H / \partial x$ .

Приняв безразмерное время зарастания  $\eta = 3$  и возвращаясь к размерному виду, получим выражение для времени зарастания:

$$(29) \quad t^* = 48 Q T^2 / (\pi^3 R^2 l).$$

Таким образом, найденные соотношения правильно отражают основные особенности процесса зарастания каналов. Отметим, что соотношения (19), (20) и (23), связывающие скорость зарастания со скоростью сдвига на стенке и характерным масштабом, не требуют для своего применения детального описания напорного течения во всем реакционном объеме. Поэтому они могут быть использованы и при анализе более сложных ситуаций, чем течение в канале, например при анализе процесса обрастания стенок полимеризаторов с мешалкой. В этом случае характерная скорость сдвига может быть определена из соотношения [4]

$$\gamma = M / \mu l D h = K_N (\text{Re}) \sigma n^2 d^3 / 2 \pi^2 \mu D h,$$

где  $\sigma$  и  $\mu$  — плотность и вязкость среды;  $D$  и  $h$  — диаметр и высота аппарата;  $d$  — диаметр мешалки;  $n$  — частота вращения мешалки;  $\text{Re} = n d^2 \sigma / \mu$  — число Рейнольдса;  $K_N$  — коэффициент мощности мешалки;  $M$  — крутящий момент на валу мешалки.

Роль длины участка  $X$  играет либо характерный размер крупномасштабных пульсаций [5], либо (для очень медленных течений) длина соответствующей винтовой линии тока  $L \sim h U / W \sim \pi h d D^2 n / 16 Q$  ( $Q$  — циркуляционная производительность мешалки,  $U$  и  $W$  — средние окружная и осевая скорости в аппарате).

Анализируя выражение (39), видим, что пропорциональность времени зарастания  $t^*$ ,  $Q$ ,  $T^2$ ,  $l^{-1}$  естественна. Однако пропорциональность  $t^*$  величине  $R^{-2}$  на первый взгляд неожиданна. Время зарастания трубы большого радиуса меньше, чем малого, при одинаковых длине и объемном расходе. Это было бы невозможно, если бы труба зарастала равномерно по длине. Однако скорость зарастания канала в каждом сечении обусловлена предысторией течения жидкости в предыдущих сечениях большего радиуса. Такой результат качественно согласуется с практикой работы трубопроводов на ряде полимерных производств, когда уменьшение диаметра трубопровода приводит к значительному снижению скорости, а в ряде случаев — к полному прекращению обрастания его поверхности.

При анализе ламинарного течения реагирующих сред обычно пренебрегают влиянием диффузии. Это приближение, как правило, оправдано

ввиду малости коэффициентов молекулярной диффузии в жидкостях и, следовательно, малости диффузионного потока по сравнению с конвективным. Однако при течении полимеризующейся жидкости вблизи твердой стенки на входном участке канала диффузионные эффекты становятся существенными. Опыт эксплуатации ряда полимерных производств показывает, что в некоторых случаях зарастание не слишком длинных участков трубопроводов не происходит сколько угодно долго. Покажем, что этот эффект может быть объяснен влиянием поперечной диффузии.

Дополним уравнение (1) членом, учитывающим диффузию в направлении  $y$ :

$$(30) \quad \dot{\gamma} y \partial \tau / \partial x - \varphi \partial \tau / \partial y - D \partial^2 \tau / \partial y^2 = 1$$

( $D$  — коэффициент молекулярной диффузии).

Из физических соображений ясно, что достаточно близко к входному сечению ( $x = 0$ ) (толщина диффузионного пограничного слоя стремится к нулю при  $x \rightarrow 0$ ) скорость роста застывшего слоя  $\varphi$  равна нулю. На этом участке уравнение (30) имеет вид

$$(31) \quad \dot{\gamma} y \partial \tau / \partial x - D \partial^2 \tau / \partial y^2 = 1,$$

а естественные граничные условия для этого уравнения

$$(32) \quad \tau|_{x=0} = 0, \quad \tau|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.$$

Приведем уравнения (31), (32) к безразмерным, введя переменные  $\Theta = \tau / T_0$ ,  $Y = y / L$ ,  $X = x / L$ , где  $T_0 = \dot{\gamma}^{-1}$ ,  $L = \sqrt{D T_0}$ :

$$(33) \quad \partial^2 \Theta / \partial Y^2 - Y \partial \Theta / \partial X = -1, \quad \Theta|_{x=0} = 0, \\ \Theta|_{Y \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \partial \Theta / \partial Y|_{Y=0} = 0.$$

Применив к (33) преобразование Лапласа по  $X$ , несложно найти решение полученного обыкновенного дифференциального уравнения. Воспользовавшись затем асимптотическим разложением найденного решения в точке  $Y = 0$  и обратив преобразование Лапласа в этой точке, имеем

$$\Theta|_{Y=0} = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) / \left[3^{2/3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\right] \cong 1,4 X^{2/3}.$$

Возвращаясь к размерным переменным для времени пребывания на твердой поверхности, получим  $\tau(x) = (1,4/\dot{\gamma})(D/\dot{\gamma})^{-1/3} x^{2/3}$ . Очевидно, что координата  $x^*$  точки, в которой начинается обрастание твердой поверхности, определяется условием  $\tau = T$ :

$$(34) \quad x^* = 0,58 \dot{\gamma} D^{1/2} T^{3/2} = (0,34 D T)^{1/2} \dot{\gamma} T.$$

Оценим длину незарастающего участка  $x^*$ . Положим  $\dot{\gamma} = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $D = 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $T = 10^3 \div 10^4$  (время реакции, характерное, например, для условий получения полистирольных пластиков). Тогда в соответствии с (34)  $x^* = 2 \div 60 \text{ м}$ . Таким образом, влияние поперечной диффузии, несмотря на малую величину  $D$ , может обеспечить наличие в трубах и каналах значительного входного участка с необрастающими полимером стенками.

Рассмотрим влияние поперечной диффузии на скорость зарастания стенок при  $x > x^*$ . Соотношение (34) можно интерпретировать следующим образом. Вблизи стенки существует слой идеального смешения толщиной  $l^* = (0,34 D T)^{1/2}$ . Вне слоя поперечная диффузия не учитывается. В рамках этой двухслойной модели течение в ядре потока может быть описано уравнением (1) с граничными условиями

$$(35) \quad \tau|_{x=0} = 0, \quad \tau|_{y=l^*} = T.$$

Введем переменную  $s(x, y)$  такую, что

$$(36) \quad dy/ds = \varphi(x), \quad dx/ds = -\dot{\gamma}y;$$

$$(37) \quad s|_{y=l^*} = 0, \\ |_{x>x^*}$$

Тогда (1) преобразуется к виду  $d\tau/ds = -1$ , что с учетом (35) дает

$$(38) \quad s|_{x=0} = T.$$

Уравнения (36), (37), дополненные условием  $x|_{s=0} = p$  при заданном  $\varphi(x) > 0$ , имеют единственное решение. Таким образом, остается найти  $\varphi(x)$ , которое обеспечит выполнение условия (37) при любом  $p$ . Из (36) получим  $dy/dx = -\varphi(x)/(\dot{\gamma}y)$ , откуда

$$(39) \quad y = \left[ \frac{2}{\dot{\gamma}} \int_x^p \varphi(z) dz + l^{*2} \right]^{1/2}.$$

Подставляя (39) в (36), с учетом граничных условий (37) и (38) находим

$$(40) \quad \int_0^p \frac{dx}{\dot{\gamma} \left[ \frac{2}{\dot{\gamma}} \int_x^p \varphi(z) dz + l^{*2} \right]^{1/2}} = T.$$

Поскольку скорость роста неподвижного слоя продуктов реакции  $\varphi(z)$  при  $z < x^*$  равна нулю, уравнение (40) преобразуется:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{x^*} \frac{dx}{\dot{\gamma} \left[ \frac{2}{\dot{\gamma}} \int_{x^*}^p \varphi(z) dz + l^{*2} \right]^{1/2}} + \int_{x^*}^p \frac{dx}{\dot{\gamma} \left[ \frac{2}{\dot{\gamma}} \int_{x^*}^p \varphi(z) dz + l^{*2} \right]^{1/2}} = \\ &= \frac{x^*}{\dot{\gamma} \left[ \frac{2}{\dot{\gamma}} \int_{x^*}^p \varphi(z) dz + l^{*2} \right]^{1/2}} + \int_{x^*}^p \frac{dx}{\dot{\gamma} \left[ \frac{2}{\dot{\gamma}} \left( \int_{x^*}^p \varphi(z) dz - \int_{x^*}^x \varphi(z) dz \right) + l^{*2} \right]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Произведем замену переменных:  $\widehat{p} = p - x^*$ ,  $\widehat{z} = z - x^*$ ,  $\widehat{x} = x - x^*$ . Тогда

$$(41) \quad T = \frac{x^*}{l^* \dot{\gamma} [\chi(\widehat{p}) + 1]^{1/2}} + \int_0^{\widehat{p}} \frac{d\widehat{x}}{l^* \dot{\gamma} [\chi(\widehat{p}) - \chi(\widehat{x}) + 1]^{1/2}},$$

где

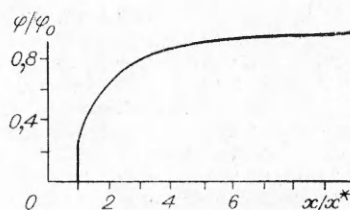
$$(42) \quad \chi(\widehat{p}) = \frac{2}{l^{*2} \dot{\gamma}} \int_0^{\widehat{p}} \varphi(z) dz.$$

Введем новые переменные:  $\widetilde{p} = \widehat{p}/x^*$ ,  $\widetilde{x} = \widehat{x}/x^*$ ,  $\widetilde{\chi}(\widetilde{p}) = \chi(\widehat{p})$ . Тогда уравнение (41) примет вид

$$(43) \quad 1 = \frac{1}{V \widetilde{\chi}(\widetilde{p}) + 1} + \int_0^{\widetilde{p}} \frac{d\widetilde{x}}{V \widetilde{\chi}(\widetilde{p}) - \widetilde{\chi}(\widetilde{x}) + 1}.$$

Продифференцировав (43), получим интегродифференциальное уравнение

$$(44) \quad \tilde{\chi}'(\tilde{p}) = \frac{1}{\frac{1}{2(\tilde{\chi}(\tilde{p})+1)^{3/2}} + \int_0^{\tilde{p}} \frac{d\tilde{x}}{2(\tilde{\chi}(\tilde{p}) - \tilde{\chi}(\tilde{x}) + 1)^{3/2}}},$$



Р и с. 2

для которого можно построить простой алгоритм численного решения. Внешне уравнение (44) напоминает задачу Коши, однако его правая часть содержит определенный интеграл искомой функции, верхним пределом которого является текущее значение переменной. Поэтому на каждом шаге численного интегрирования необходимо заново вычислять этот интеграл. Однако достаточная точность численного решения достигается при умеренном объеме расчетов в случае использования квадратурной формулы Ньютона — Котеса высокого (седьмого и выше) порядка для вычисления определенного интеграла и метода Рунге — Кутты для решения задачи Коши.

Построив зависимость  $\tilde{\chi}(\tilde{p})$ , легко из (42) найти и скорость роста неподвижного слоя  $\varphi(\tilde{p})$  с учетом диффузии:

$$\varphi(\tilde{p}) = \frac{\gamma l^{*2}}{2} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{p}} \tilde{\chi}'(\tilde{p}) = \frac{l^*}{2T} \tilde{\chi}'(\tilde{p}).$$

Вспомним, что скорость роста неподвижного слоя  $\varphi_0$  без учета диффузии определяется соотношением  $\varphi_0 = \pi^2 x / (4\dot{\gamma} T^2) = (\pi^2/4)(l^*/T)(1 + \tilde{p})$ , откуда

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\tilde{\chi}'(\tilde{p})}{1 + \tilde{p}}.$$

Из зависимости  $\varphi/\varphi_0$  от безразмерной продольной координаты, представленной на рис. 2, следует, что поперечная диффузия оказывает заметное влияние на скорость зарастания на участке длиной  $(5 \div 10)x^*$  ( $x^*$  определяется соотношением (34)).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ваганов Д. А. Квазистационарное течение реагирующей жидкости, теряющей текучесть при глубоких степенях превращения // ПМТФ.— 1982.— № 3.
2. Ваганов Д. А. Стационарное течение реагирующей жидкости с меняющимися с глубиной превращения свойствами // ПМТФ.— 1984.— № 1.
3. Малкин А. Я., Куличихин С. Г. Реология в процессах образования и превращения полимеров.— М.: Химия, 1985.
4. Брагинский Л. Н., Бегачев В. И., Барабаш В. М. Перемешивание в жидких средах: Физические основы и инженерные методы расчета.— Л.: Химия, 1984.
5. Будтов В. П., Консетов В. В. Тепломассообмен в полимеризационных процессах.— Л.: Химия, 1983.

г. Ленинград

Поступила 27/X 1989 г.,  
в окончательном варианте — 10/VIII 1990 г.

УДК 532.546

С. Е. Холодовский

#### О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ

В естественных условиях неоднородность грунтов, как правило, обусловлена их слоистой структурой [1]. Исследованию задач фильтрации жидкости в слоистых грунтах (задач сопряжения) в точной или приближенной постановке посвящена обширная литература (см. обзор в [2]). В точной постановке впервые решение задач сопряжения для двух однородных зон, разделенных прямой или окружностью, дано