Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.4
DOI: 10.15372/PS20210105

В.В. Целищев, А.В. Хлебалин

ПАРАДОКСЫ И ИНТЕНСИОНАЛЬНОСТЬ В ОСНОВАНИЯХ МАТЕМАТИКИ*

В статье рассматривается разрыв экстенсионального и интенсионального элементов математического дискурса в разработке программ оснований математики. Показано, что стремление Ф. Рамсея через типологию парадоксов разделить интенсиональный и экстенсиональный элементы дискурса обернулось инверсией его проекта. Обосновывается, что разработка теоретико-множественных оснований математики предполагала экстенсиональную трактовку математики, тем не менее столкнулась с необходимостью допущения интенсионального элемента, например в связи с аксиомой выбора. Показано, что допущение интенсионального элемента математического дискурса связано с философскими программами, тогда как экстенсиональная трактовка мотивируется математическими принципами.

Ключевые слова: интенсиональное; экстенсиональное; теоретико-множественные основания; аксиома выбора

V.V. Tselishchev, A.V. Khlebalin

PARADOXES AND INTENSIONALITY IN THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

The article considers the gap between the extensional and intensional elements of mathematical discourse in the development of programs concerning the foundations of mathematics. It is shown that F. Ramsey's desire to separate the intensional and extensional elements of discourse through the typology of paradoxes turned into an inversion of his project. The substantiation is produced that the development of the set-theoretic founda-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-011-00518).

tions of mathematics presupposed an extensional interpretation of mathematics, but nevertheless faced the need to assume the intensional element, for example, in relation to the axiom of choice. It is shown that the assumption of the intensional element of mathematical discourse is connected with philosophical programs, while the extensional interpretation is motivated by mathematical principles.

Keywords: intensional; extensional; set-theoretical foundations; axiom of choice

Разделение Ф. Рамсеем парадоксов на теоретико-множественные и лингвистические привело к разделению дискурсов на экстенсиональные и интенсиональные. Первые представлены математикой, под которой понималась система *Principia Mathematica*, а вторые – семантическими рассмотрениями, в которых значение и смысл играли важную роль.

Как оказалось, эта стратегия ввела в заблуждение саму идею разделения экстенсионального и интенсионального, потому что *Principia* в значительной степени опиралась на понятие пропозиции, анализ которой подразумевал проблематику пропозициональных установок, парадигмальных примеров интенсиональных контекстов. Понимание противоречивости подобной позиции выразилось в настойчивом стремлении математиков исключить *Principia* из собственно математики. Что касается семантических парадоксов, то трактовка А. Тарским понятия истины в формализованных языках обладает всеми признаками математического контекста. Таким образом, мы имеем нечто вроде инверсии точки зрения Ф. Рамсея на природу парадоксов.

Создавшаяся противоречивая ситуация является результатом не просто беспорядочного блуждания в лабиринтах парадоксов, а следствием неверного диагноза природы парадоксов, поставленного Ф. Рамсеем. Как известно, этот диагноз был призван уменьшить трудности, с которыми столкнулась *Principia* в результате самокритики Б. Рассела, критики Л. Витгенштейна и разных оценок правильности стратегий *Principia* в разрешении парадоксов.

Важной особенностью последних десятилетий явилась ревизия упрощенных представлений о способах и мотивах обращения Б. Рассела с парадоксами [10]. В частности, представление о намеренном введении разветвленной теории типов как инструмента разрешения парадоксов оказалось исторически неверным, поскольку она имела конкурентом так называемую подстановочную теорию Рассела. Другим интересным моментом является ревизия мотивов уменьшения сложности разветвленной теории в пользу простой теории типов – тенденция, которую позднее охотно поддержал У. Куайн [2]. Оба этих обстоятельства, как будет показано ниже, имеют прямое отношение к вопросу о легитимности интенсионального контекста в математике. Другими словами, пересмотр роли *Principia* в обосновании «вторичности» интенсиональных контекстов может дать основания для новой классификации парадоксов.

Разделение математических контекстов на интенсиональные и экстенсиональные имело более точный смысл в виде «разрыва» этих характеристик в связи с аксиомой Цермело, утверждающей, что для всякого семейства непустых множеств существует функция выбора, ставящая в соответствие каждому множеству один его элемент. Этот чисто математический результат привел к серии философских разногласий касательно природы бесконечного. Характеристика множества (или класса) может быть задана двумя путями: экстенсиональным (через перечисление элементов множества или членов класса) или же интенсиональным (через указание свойства, которым обладают все элементы множества). В случае конечных множеств оба способа задания характеристики множества эквивалентны. Если же множество бесконечно, то ситуация с экстенсиональной характеристикой проблематична.

Предпринятая Э. Цермело аксиоматическая трактовка теории множеств включала аксиому выбора, которая легитимирует экстенсиональную характеристику. Аксиома утверждает следующее: если задано бесконечное семейство непустых классов, всегда существует другой класс, который имеет точно по одному элементу из каждого класса семейства. Фактически аксиома утверждает, что такой класс существует, хотя не дается никакой интенсиональной его характеристики.

Если аксиома верна, тогда, грубо говоря, можно обойтись без интенсиональной характеристики и для бесконечных множеств, и тогда мы имеем ситуацию разрыва экстенсионального и интенсионального. Этот разрыв породил важное изменение в понимании природы математики и логики. Гарантируемый аксиомой выбора класс должен существовать, но нет каких-либо оснований для демонстрации такого утверждения. У нас нет эпистемологически отчетливой процедуры для отбора определенного объекта из бесконечной совокупности.

Знаменитый пример Б. Рассела иллюстрирует трудности в принятии аксиомы выбора, которая у него носит название аксиомы мультипликативности: «Мы знаем, что 2 × Алеф-Нуль = Алеф-Нуль. Отсюда мы могли бы предположить, что сумма Алеф-Нуль пар должна иметь Алеф-Нуль терминов. Но хотя мы можем доказать это в некоторых случаях, мы не можем сделать этого всегда, до тех пор, пока не предположим аксиому мультипликативности. Это обстоятельство иллюстрируется миллионером, который покупал пару носков всякий раз, когда он покупал пару обуви, и только в этом случае, и он имел такую страсть к подобным покупкам, что однажды купил Алеф-Нуль пар носков и Алеф-Нуль пар обуви. Тут возникает проблема: сколько у него ботинок и сколько у него носков? Было бы естественно предположить, что у него в два раза больше ботинок и в два раза больше носков, чем пар каждого вида покупок, и отсюда у него Алеф-Нуль каждого, так как это число не увеличивается при удвоении. Но это пример трудности, уже замеченной ранее… Иногда это может быть сделано, иногда нет. В нашем случае это может быть сделано с ботинками, но не с носками, за исключением самых искусственных методов. Причина разницы такова: среди ботинок мы можем различить правые и левые, и следовательно, мы можем сделать выборку из каждой пары, а именно, мы можем выбрать все правые или все левые ботинки; но с носками такого принципа выборки не видно, и мы не можем быть уверены до тех пор, пока не предположено аксиомы мультипликативности, что имеется некоторый класс, состоящий из одного носка каждой пары. Отсюда и проблема» [4, с. 161–162].

Сторонники аксиомы выбора выдвигали в ее защиту технические, или лучше сказать прагматические, резоны, суть которых сводилась к тому, что многие известные результаты, например что каждое множество может быть вполне упорядочено, эквивалентны этой аксиоме. Более общая защита состояла в том, что аксиома истинна в силу принятия модусов вывода, которые, с одной стороны, верны, а с другой стороны, интуитивно очевидны и необходимы для науки. Но с более общей философской точки зрения, точнее с точки зрения эпистемологии, можно оправдать аксиому апелляцией к способу указания множеств. Критики аксиомы говорят, что такое указание лишено смысла в случае бесконечных множеств, которые являются предметом математики. Но на саму математику можно посмотреть как на эмпирическую дисциплину, и тогда указание на множества будет похоже на указание на обычные физические предметы. Последнее предполагается непроблематичным, и мы получаем эмпирическую (и даже физическую) теорию абстрактных объектов. В этом случае к множествам применимы методологические принципы, используемые в эмпирических науках, где истинность утверждений определяется индуктивными соображениями. Таким образом, аксиома выбора оправдывается как некоторый (естественно-)научный принцип. «Другими словами, нет (в математике) стандартов помимо и свыше тех, что неявно признаются в научной практике. Если принцип широко используется (даже если и неявно), если он ведет к общепризнанным результатам, которые не могут быть получены без него, и если он не ведет к противоречиям, тогда все "философские" возражения неуместны, так как они должны опираться на стандарты, которые не имеют значения в математике» [1, с. 163].

Такая линия защиты аксиомы Выбора означает в контексте дихотомии экстенсиональное/интенсиональное крен в сторону экстенсионального. Но это, в свою очередь, означает, что разделение парадоксов на собственно логико-математические и семантические, проведенное Ф. Рамсеем, теряет свою основу. В самом деле, Рамсей преследовал цель упростить разветвленную теорию типов, которая была интенсиональной, в простую теорию типов, которая была экстенсиональной. Таким образом, в характеристике множеств интенсиональный аспект уступает место экстенсиональному. В *Principia* логическим элементом определяющего свойства является пропозициональная функция. «В некотором смысле Рассел считает, что понятие определяющего свойства… онтологически первично и интуитивно яснее, чем понятие класса. Другими словами, Рассел считает, что если нет какого-то свойства, задающего класс, то, собственно, нет и никакого класса. …При этом вопрос о действительном существовании классов не рассматривается, поскольку классы являются… символическими или лингвистическими конвенциями [5, с. 149].

Известно, что Ф. Рамсей под влиянием Л. Витгенштейна подверг критике ряд установок в *Principia*, в том числе интенсиональное определение класса через пропозициональные функции. Весьма интересным, хотя и спорным, является его пример с определением действительного числа по Р. Дедекинду. Действительные числа определяются как любые сегменты рациональных чисел, и при этом совершенно не обязательно, чтобы такой сегмент определялся общим свойством его членов, поэтому действительное число – это объем, и даже, быть может, объем без соответствующего содержания. Но это не мешает нам ссылаться на все или некоторые из этих сегментов вне зависимости от того, являются ли они конечными или бесконечными [5, с. 151].

Б. Рассел отреагировал на такую стратегию Ф. Рамсея следующим образом. Он писал: «…Такая совокупность [совокупность упорядоченных пар, как в примере Рассела] существует, если кто-нибудь собирал ее, или есть нечто эмпирическое или логическое, приводящее к ее существованию. Но если это не так, то какой смысл в такой совокупности? Я не уверен, значим ли этот вопрос вообще, но если он что-то значит, тогда ответ на него должен быть неблагоприятным для Рамсея» (цит. по: [1, с. 164]).

Сам Б. Рассел не был окончательно «интенсионалистом», следуя «среднему курсу», если обратить внимание на обмен мнениями между Ф. Журденом и Б. Расселом: «Как-то Журден удивлялся, почему интенсиональности необходимы для классов, заметив, что математики ведут себя как боги в своих абстрактных владениях. Рассел ответил, что “даже Создатель должен был понимать, что он собственно создает”. …Но несколькими предложениями деле другая сторона его личности подтвердила себя: “Я не считаю, что определение через объем [экстенсионально] логически ограничено конечными классами, но оно для человека, потому что мы не бессмертны”» [7, p. 54–55].

Эта компромиссная позиция объяснялась тем, что несмотря на неприятие им аксиомы выбора, Б. Рассел был вынужден признать, что она необходима для всего проекта логицизма. Как отметил А. Коффа, философская половина Рассела была на стороне интенсионалистов, а математическая – на стороне приверженцев теории множеств Кантора (аксиоматизированной Цермело) [1, с. 165]. Однако и его оппонент Ф. Рамсей был подвержен в этом отношении «соглашательскому» настроению, поскольку в его работах все больше проскакивали прагматистские нотки. И тут некоторые исследователи доходят до того, что считают Рамсея мостиком между прагматизмом XX в. и аналитической философией [3].

Традиционно полагается, что среди основных причин потери интереса к программе логицизма была нелогическая природа аксиомы сводимости. Между тем Ф. Рамсей не считает это «роковым» обстоятельством для логицизма, поскольку, с его точки зрения, та часть математики, для которой *Principia* являются основаниями, включает как раз такие экстенсиональные сущности, как классы и экстенсиональные отношения, и, собственно, для выполнения этой задачи в *Principia* не требуются интенсиональные сущности. Вопрос о том, почему они были все-таки включены Расселом в его систему, имеет по крайней мере два ответа. Один из них, наиболее общего характера, состоит в том, что Рассел, как лапидарно выразился историк математики Дж. Грей, «не математик, а философ» [8, p. 362]. Этот ответ из той же серии, что половинчатость программы логицизма: она наполовину математическая, наполовину философская, и потому для Рассела его пропозиции были важнее классов.

Второй ответ более существен, хотя и связан с первым. Б. Рассел рассматривал кризис в основаниях математики в свете парадоксов в более широком контексте, чем просто какого-то рода «неувязки» в быстро развивающейся области трансфинитной математики. Хорошо известно, что родственные парадоксу Рассела аномалии были известны еще и Кантору, но тот не делал из этого обобщений, надеясь на будущее разрешение возникающих трудностей. Но поскольку парадокс Рассела относился скорее к логике, которая полагалась им в качестве основания математики, чем к собственно математике, и поскольку открытие этого парадокса явилось поводом для пристального внимания к парадоксам логики вообще, включая такие разные аномалии как парадокс Греллинга, или парадокс Лжеца, сам Рассел посчитал, что разрешение парадоксов должно быть универсальным. Другими словами, в терминологии Рамсея, Рассел замахнулся на разрешение как теоретико-множественных, так и семантических парадоксов в единой системе, каковой и явилась система *Principia Mathematica*. Так как семантические парадоксы касались смысла, т.е. интенсиональных аспектов языка, Рассел как «интенсионалист» был вполне прав в своих поисках. Это уже трудности в самой системе *Principia Mathematica* заставили ограничиться менее универсальными решениями, на что и указал Рамсей, но исходная точка зрения Рассела была многообещающей. В дальнейшем критики этой системы говорили так, как будто они заранее знали, что подобных универсальных решений не бывает и что с самого начала стоило ограничиться теоретико-множественными парадоксами.

Эта критика была сосредоточена на дефектах аксиомы сводимости, но даже Рамсей не сумел толком объяснить, как эти дефекты связаны с необходимостью разделения парадоксов на две группы. Собственно говоря, такое разделение произошло, хотя и неявно, задолго до Рамсея. Разветвленная теория типов с ее интенсиональностями появилась в том же самом, 1908-м, году, что и аксиоматическая теория множеств Э. Цермело, с включенной в нее аксиомой экстенсиональности. «Разделение труда» в интенсиональной и экстенсиональной трактовках оснований математики уже тогда было более или менее оформлено. В этом контексте довольно неуместно выглядит точка зрения, согласно которой аксиоматическая теория множеств была «более успешной» по сравнению с теорией типов. Эти два подхода были направлены на разные цели, и не стоит преуменьшать важность как раз философского проекта. К тому же следует отметить, что концептуальные основы аксиоматической теории множеств столь же уязвимы к критике со стороны логиков, которых заботят философские аспекты оснований математики. В этой связи стоит упомянуть каламбур Я. Хинтикки: одна из глав его книги называется «Аксиоматическая теория множеств: Чудовище Френкельштейна?», намекая на чудовище Франкенштейна М. Шелли и аксиоматическую теорию Цермело – Френкеля [9, ch. 8]. Следует принять во внимание и то, что название самой книги есть сознательная аллюзия на предшествующую *Principia Mathematica* работу Рассела «Principles of Mathematics» [11]. В определенном смысле Хинтикка настаивает на важности тех соображений Рассела, которые позднее привели к *Principia Mathematica*.

Интенсиональный аспект оказывается важным и в современной аксиоматической теории множеств. Очень «большие» кардинальные числа явно выходят за пределы всяких экстенсиональных соображений, включая какого-либо рода соответствие с «вещами в мире». В этом смысле таким множествам гораздо больше подходит интенсиональная характеристика, нежели экстенсиональная. В частности, существование множеств путем их поименования, что явно является интенсиональным актом, подтверждает это. Здесь мы хотим обратить внимание на любопытное «еретическое» выступление видного логика Дж. Булоса в статье с многозначительным названием «Должны ли мы верить в теорию множеств?». Он рассматривает некоторое кардинальное число k, являющееся пределом последовательности все более мощных алефов, и спрашивает, существует ли k множеств, поскольку k есть очень большое число. Ниже приведена обширная цитата, позволяющая более отчетливо видеть место философских (читай, интенсиональных) рассмотрений в математической теории.

«Итак, в чем проблема с утверждением, что ZFC (теория Цермело – Френкеля с континуум-гипотезой) неверна, потому что она говорит нам, что существует k объектов, которых на самом деле нет. …Действительно, при этом можно спросить, откуда известно, что такого числа объектов нет? Но ответ: “Будьте серьёзны. Конечно же, не может быть такого числа существующих вещей. Я не могу *доказать*, что их не существует, не в большей степени, чем я не могу *доказать*, что не существует духов, в осторожном ожидании их появления, в случае если Zeitgeist будет подготовлен к признанию их существования. Но не может существовать такого числа k и духов. Вы прекрасно знаете это, и вы также знаете, что любая теория, которая говорит вам противоположное, есть просто дурь”, – этот ответ, хотя он и не *предлагает резонов* для полагания того, что есть меньше объектов, чем k, не проявляет никаких иллюзий в отношении того, что может быть названо метафизическим реализмом.

Короче, этот вопрос вполне разумно задать. Трудность, однако, состоит в том, что мало что может быть сказано по этому поводу, положительно или отрицательно, за исключением того, что стандартная теория множеств дает утвердительный ответ, в то время как здравый смысл или другие соображения не согласуются с ним. В философии достаточно частой стратегией является попытка отбросить в сторону или преуменьшить философскую проблему, которую невозможно решить, как указание на философскую путаницу, но попытка сказать, что есть подобная путаница в вопросе о правильности теории множеств, которая утверждает существование *k*, просто не разбирается» [6, p.129].

Этот пассаж показывает ясно, как далеко разошлись собственно математика и философия в самой возможности постановки вопросов о природе математических сущностей. В какой степени высокие материи теории множеств могут выходить за пределы здравого смысла? Есть аналог подобного рода дилеммы, опять-таки связанный с Б. Расселом. Теория объектов А. Майнонга была очень убедительной в свете исследований школы австрийского реализма, в частности работ Ф. Брентано. Возражения Рассела в его статье «Об обозначении» не в последнюю очередь были мотивированы отказом здравого смысла принять «онтологические трущобы» Майнонга (более поздняя терминология). Возвращаясь к теме интенсионального и экстенсионального, можно в какой-то мере связать с первым аспект осмысленности, который отходит на задний план в случае второго.

Как видно, первоначальная идея Ф. Рамсея, которая мыслилась как спасение логицизма, сыграла на руку тенденции отделения математических вопросов от философских. Стоит заметить, что несмотря на последующие усилия в рамках этой тенденции преуменьшить, а то и вовсе устранить интенсиональности, например в духе У. Куайна, развитие модальных логик вновь обозначило важность интенсиональных аспектов в конструировании формальных систем. Это возрождение интенсионального достигло максимального успеха в доказательстве второй теоремы К. Гёделя о неполноте арифметики.

Литература

1. *Коффа А.* Семантическая традиция от Канта до Карнапа: к Венскому вокзалу / Пер с англ. В.В. Целищева. – М.: Канон+, 2019.

2. *Куайн У.* Расселовская теория типов // Рассел Б. Введение в математическую философию / Пер. с англ. В.В. Целищева, В.А. Суровцева. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007. – С. 222–236.

3. *Мисак Ч.* Философия должна быть полезной (перевод Целищева В.В.) // Целищев В.В. Философский раскол: логика vs метафизика. М.: Канон+, 2021. – С. 91–100.

4. *Рассел Б.* Введение в математическую философию / Пер. с англ. В.В. Целищева, В.А. Суровцева. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007.

5. *Суровцев В.А.* Рамсей и программа логицизма. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012.

6. *Boolos G.* Must we believe in set theory? // Boolos G. Logic, Logic and Logic. – Cambridge: Harvard University Press, 1998. – P. 120–132.

7. *Grattan-Guiness I.* Dear Russell – Dear Jourdain: London: Duckworth, 1977.

8.*Gray J.* Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics Princeton University Press, 2008.

9. *Hintikka J.* The Principles of Mathematics Revisited. – Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

10. *Landini G.* Russell. – Routledge, 2011.

11. *Russell B.* Principles of Mathematics. Routledge, 2009.

References

1. Coffa A. Semanticheskaya tradiciya otKanta do Karnapa: k Venskomy vokzalu. [The semantictradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station] Moscow: Canon+, 2019. (In Russ.)

2. Quine W. Rasselovskaya teoria tipov. [Russell's type theory]. / Rassel B. Vvedenie v matematicheskyu filosofiu. [Russell B. Introduction in mathematical philosophy] – Novosibirsk: Sib.univer.isd-vo, 2007, P.222-236. (In Russ.)

3. Misak Ch. Filosofia dolzna bit poleznoy. [Philosophy must be useful]. // Zelischev V.V. Filosofski raskol: logica vs metafizika. [Tselishchev V.V. Philosophical schism: logic vs metaphysics.] Moscow: Canon+, 2021, P.91-100. (In Russ.)

4. Russell B. Vvedenie v matematicheskuyu filosofiu. [Introduction in mathematical philosophy]. – Novosibirsk: Sib.univer.isd-vo, 2007, P.222-236. (In Russ.)

5. Surovtsev V.A. Ramsey i programma logicisma. [Ramsey and program of logicism]. Tomsk, Tomsk University Publishing, 2012. (In Russ.)

6. *Boolos G.* Must We Believe in Set Theory? // Boolos G. Logic, logic and logic. Cambridge: Harvard University Press, 1998. P. 120-132.

7. *Grattan-Guiness I.* Dear Russell – Dear Jourdain: L.: Duckworth, 1977.

8. *Gray J.* Plato's Ghost: The modernist transformation of mathematics. Princeton University Press, 2008.

9. *Landini G.* Russell. Routledge. 2011.

10. *Hintikka J.* The Principles of Mathematics Revisited. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

11. *Russell B.* Principles of mathematics. Routledge, 2009.

Информация об авторах

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор, кафедра гносеологии и истории философии Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2); научный руководитель Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).

leitval@gmail.com

Хлебалин Александр Валерьевич – кандидат философских наук, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).

sasha_khl@mail.ru

Information about the authors

Tselishchev Vitaliy Valentinovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, the Department of Gnoseology and History of Philosophy at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia); Scientific Director at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia).

leitval@gmail.com

Khlebalin Aleksandr Valerievich – Candidate of Sciences (Philosophy), Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Akademy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090 Russia).

sasha_khl@mail.ru

Дата поступления 01.02.2021