6. *Von Karman Th.* Über laminare und turbulente Reibung. — ZAMM, 1921, N 1, S. 233—252.
7. *Prandtl L.* Über den Reibungwiderstand strömender Luft.— «Ergebnisse AVA», Gottingen, 1927, III, Lieferung, 1—5.
8. *Clauser F. H.* The turbulent boundary layer.— In: Advances Appl. Mech. Vol. 4. N. Y., 1956, p. 1—51.
9. *Ludwieg H., Tillman W.* Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten.— «Ing.-Arch.», 1949, B. 17, S. 288—299.
10. *Stratford B. S.* An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise.— «J. Fluid Mech.», 1959, vol. 5, p. 17—35.

УДК 532.529:536.25

СТАЦИОНАРНЫЙ ДВУХФАЗНЫЙ ПОТОК В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СВОБОДНОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

В. А. Дубовик

(Томск)

В рамках двухскоростной и двухтемпературной модели сплошной среды рассматривается вязкостно-гравитационное течение смеси несжимаемой жидкости и частиц в вертикальной круглой трубе. Уравнения свободной конвекции записываются на основании общих уравнений движения и энергии двухфазной среды [1, 2]. Методом конечного интегрального преобразования Ханкеля строится решение для случая линейного распределения температуры стенки вдоль трубы.

Приводятся результаты расчетов поля скоростей и температур по сечению, а также безразмерного коэффициента теплоотдачи в зависимости от числа Релея и концентрации фаз. При этом предполагается, что коэффициенты динамического и теплового взаимодействия между фазами отвечают стоксовскому режиму обтекания каждой частицы, в результате чего наблюдается [3] малое скоростное и тепловое отставание фаз.

1. Рассматривается течение и теплообмен в вертикальной круглой трубе радиуса R на достаточном удалении от входа, т. е. в области с наступившей тепловой и гидродинамической стабилизацией потока. В этой области течение происходит параллельно стенке и скорости не изменяются по длине трубы. Физические свойства фаз и их концентрации, исключая плотности, считаются постоянными. Изменение истинных плотностей в зависимости от температуры аналогично однофазному течению [4, 5], предполагается линейным и учитывается лишь в тех членах уравнений движения, которые выражают подъемную силу. Незначительное изменение скоростей при свободной конвекции и малое скоростное отставание фаз позволяют в уравнениях энергии исключить из рассмотрения члены, обусловленные вязкостным взаимодействием фаз и диссипацией энергии.

При этих допущениях исходная система уравнений [1, 2] существенно упрощается.

Ось z цилиндрической системы координат ρ, φ, z направлена вверх по оси трубы. Тогда с учетом симметрии течения и теплообмена уравнения гравитационной конвекции двухфазной среды при сформулированных предположениях принимают вид:

(1.1) $$\mu_i\varphi_i\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial W_i}{\partial\rho}\right)-(-1)^i k_0(W_2-W_1)-\varphi_i\frac{\partial p_i}{\partial z}-$$
$$-\varphi_i\rho_i g[1-\beta_i(T_i-T_w)]=0;$$
$$W_i\varphi_i\rho_i c_{pi}\frac{\partial T_i}{\partial z}=\varphi_i\lambda_i\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial T_i}{\partial\rho}\right)-(-1)^i\alpha_0(T_2-T_1),$$
$$\varphi_1+\varphi_2=1,\quad (i=1,2).$$

Здесь W_i — скорость; T_i — температура; p_i — давление; φ_i — концентрация; ρ_i — истинная плотность при температуре стенки T_w; μ_i, β_i, c_{pi}, λ_i — соответственно коэффициенты динамической вязкости, объемного расширения, удельной теплоемкости при постоянном давлении, теплопроводности i-й фазы; k_0 и α_0 — коэффициенты динамического и теплового взаимодействия между фазами; g — ускорение силы тяжести; $i=1,2$ соответственно для первой и второй фаз.

В области тепловой стабилизации потока температуры, отсчитанные от температуры стенки, не изменяются по длине, т. е.

(1.2) $$T_i-T_w=\vartheta_i(\rho)\quad (i=1,2),$$

а продольные градиенты температур в каждой точке потока, в том числе и на стенке, являются постоянными

(1.3) $$\frac{\partial T_1}{\partial z}=\frac{\partial T_2}{\partial z}\frac{\partial T_w}{\partial z}=A=\mathrm{const}.$$

Для удобства дальнейших вычислений систему (1.1) с учетом (1.2), (1.3) запишем в безразмерной форме:

(1.4) $$\varphi_1\left(\frac{d^2U_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_1}{dr}\right)+k(U_2-U_1)+\varphi_1\,\mathrm{Ra}\,\theta_1=\varphi_1P_1;$$
$$\varphi_2\delta_1\left(\frac{d^2U_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_2}{dr}\right)+k(U_1-U_2)+\varphi_2\delta_2\,\mathrm{Ra}\,\theta_2=\varphi_2P_2;$$
$$\varphi_1U_1=\varphi_1\left(\frac{d^2\theta_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta_1}{dr}\right)+\alpha(\theta_2-\theta_1);$$
$$\varphi_2\delta_3U_2=\varphi_2\delta_4\left(\frac{d^2\theta_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta_2}{dr}\right)+\alpha(\theta_1-\theta_2),$$

где введены следующие обозначения:

$$U_i=W_i\frac{\mu_1}{\rho_1 gR^2};\quad \theta_i=\vartheta_i\frac{\mu_1\lambda_1}{AgR^4\rho_1^2c_{p1}},\quad (i=1,2),\quad r=\frac{\rho}{R};$$
$$k=\frac{k_0R^2}{\mu_1};\quad \alpha=\frac{\alpha_0R^2}{\lambda_1};\quad \delta_1=\frac{\mu_2}{\mu_1};\quad \delta_2=\frac{\rho_2\beta_2}{\rho_1\beta_1};$$
$$\delta_3=\frac{\rho_2c_{p2}}{\rho_1c_{p1}};\quad \delta_4=\frac{\lambda_2}{\lambda_1};\quad P_1=1+\frac{1}{g\rho_1}\frac{dp_1}{dz};\quad P_2=\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{1}{g\rho_1}\frac{dp_2}{dz};$$

$\mathrm{Ra}=\frac{AgR^4\beta_1}{\mu_1\lambda_1}\rho_1^2c_{p1}$ — число Релея первой фазы.

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (1.4) при граничных условиях

(1.5) $$U_i=\theta_i=0\quad (i=1,\ 2),\ r=1;$$
$$\frac{dU_i}{dr}=\frac{d\theta_i}{dr}=0\quad (i=1,2),\quad r=0.$$

Методом конечного интегрального преобразования Ханкеля решение краевой задачи (1.4), (1.5) получается в виде:

(1.6)
$$U_i = 2\sum_{n=1}^{\infty} U_{in}\frac{\mathcal{J}_0(H_n r)}{H_n\mathcal{J}_1(H_n)}, \quad (i=1,2);$$
$$\theta_i = 2\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{in}\frac{\mathcal{J}_0(H_n r)}{H_n\mathcal{J}_1(H_n)}, \quad (i=1,2);$$
$$\theta_{1n} = \frac{\varphi_1}{D_n}[\varphi_1 P_1(\varphi_2 B_{2n} + C) + \varphi_2 P_2(\varphi_2 B_{1n} + C)];$$
$$\theta_{2n} = \frac{\varphi_1}{D_n}[\varphi_1 P_1(\varphi_2 A_{2n} + C) + \varphi_2 P_2(\varphi_2 A_{1n} + C)];$$
$$U_{1n} = \frac{\alpha\varphi_2}{D_n}[\varphi_1 P_1(A_{2n} - B_{2n}) + \varphi_2 P_2(A_{1n} - B_{1n})] - H_n^2\theta_{1n};$$
$$U_{2n} = \frac{\alpha\varphi_1}{\delta_3 D_n}[\varphi_1 P_1(B_{2n} - A_{2n}) + \varphi_2 P_2(B_{1n} - A_{1n})] - \frac{\delta_4 H_n^2}{\delta_3}\theta_{2n},$$

где постоянные A_{in}, B_{in} ($i=1$, 2), c, D_n определяются выражениями:

$$A_{1n} = (\varphi_1 H_n^2 + k)(\varphi_1 H_n^2 + \alpha) + \varphi_1^2\,\mathrm{Ra};$$
$$A_{2n} = (\varphi_1 H_n^2 + \alpha)k + \frac{\varphi_1\delta_1\alpha H_n^2}{\delta_3};$$
$$B_{1n} = (\varphi_1 H_n^2 + k)\alpha + \frac{\varphi_1 k H_n^2\delta_4}{\delta_3};$$
$$B_{2n} = k\alpha + \frac{\varphi_1 H_n^2}{\delta_3}(\delta_4 k + \delta_1\alpha) + \frac{\varphi_1\varphi_2}{\delta_3}(\delta_1\delta_4 H_n^4 + \delta_2\delta_3\mathrm{Ra}),\ C = \frac{k\alpha\varphi_1}{\delta_3};$$
$$D_n = \varphi_2(A_{1n}B_{2n} - A_{2n}B_{1n}) + C(A_{1n} - A_{2n} + B_{2n} - B_{1n}),$$

($\mathcal{J}_0$ и $\mathcal{J}_1$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка; H_n являются корнями уравнения $\mathcal{J}_0(H)=0$).

Если физические свойства фаз одинаковые, т. е. $\delta_i=1$ ($i=1$, 2, 3, 4), $P_1=P_2=P$ или концентрация второй фазы равна нулю, то в этих случаях из (1.6) получается решение задачи о взаимодействии свободной и вынужденной конвекции для однофазной среды [4,5]:

$$U_1 = U_2 = -2P\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{Ra} + H_n^4}\frac{J_0(H_n r)}{H_n\mathcal{J}_1(H_n)};$$
$$\theta_1 = \theta_2 = 2P\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{\mathrm{Ra} + H_n^4}\frac{\mathcal{J}_0(H_n r)}{\mathcal{J}_1(H_n)}.$$

2. По формулам (1.6) были проведены расчеты при следующих константах: $\delta_1=11{,}9$; $\delta_2=1{,}3$; $\delta_3=0{,}4$; $\delta_4=0{.}17$; $P_1/P_2=2$. Коэффициенты k_0 и α_0, согласно [1, 6], брались в виде

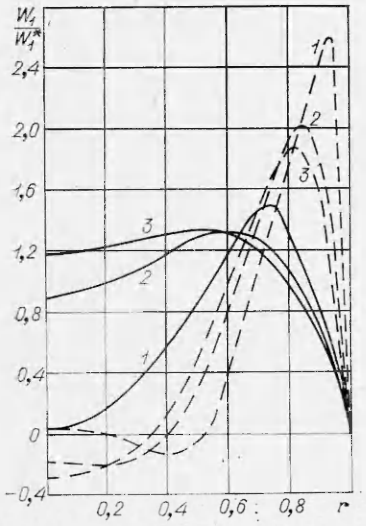
$$k_0 = \frac{9}{2}\frac{\mu_1}{l^2}\varphi_2; \qquad \alpha_0 = 3\frac{\lambda_1}{l^2}\varphi_2,$$

где l — радиус частиц второй фазы. Отсюда безразмерные комплексы k и α вычислялись по формулам

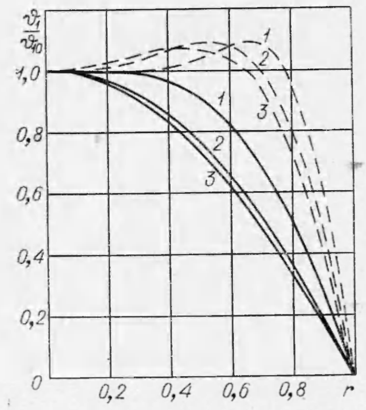
$$k = \frac{9}{2}\left(\frac{R}{l}\right)^2 \varphi_2; \qquad \alpha = 3\left(\frac{R}{l}\right)^2 \varphi_2.$$

На фиг. 1, 2 показаны профили скорости и температуры первой фазы при $R/l = 10^2$, отнесенные соответственно к средней по сечению скорости W_1^*, и температуре на оси трубы ϑ_{10}. Сплошные линии отвечают $\mathrm{Ra} = 625$, штриховые — $\mathrm{Ra} = 10^4$. Кривые *1 — 3* соответствуют $\varphi_2 = 0$; 0,2; 0,4.

Из фиг. 1, 2 видно, что при больших положительных числах Ra основное изменение температуры, а следовательно, и рост скорости происхо-



Фиг. 1



Фиг. 2

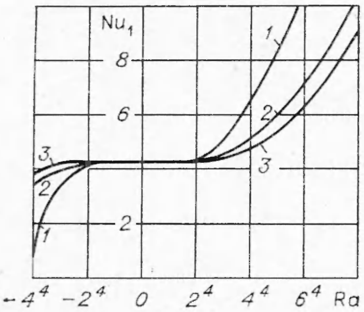
дит в пристенной области. С увеличением концентрации примеси возрастание скорости и температуры в потоке при одном и том же Ra происходит медленнее, чем для однофазной среды.

Из расчетов, проведенных при различных значениях Ra, следует, что скорость в ядре потока уменьшается с увеличением Ra и тем быстрее чем меньше концентрация второй фазы. Если для однофазной среды вблизи оси вогнутость профиля скорости возникает при $\mathrm{Ra} = 64{,}14$ [5], то в потоке с инородными частицами вогнутость появляется при $\mathrm{Ra} > 64{,}14$, дальнейшее развитие которой приводит к изменению направления течения в ядре потока. При отрицательных Ra, что соответствует подогреву снизу, скорость потока увеличивается в середине трубы и уменьшается вблизи стенки с увеличением Ra. Последнее приводит к возникновению обратного течения у стенки. С ростом же концентрации второй фазы при одном и том же значении $\mathrm{Ra} < 0$ скорость в ядре потока убывает, а вблизи стенки — возрастает. При Ra, близких к нулю, независимо от концентрации второй фазы распределения скорости и температуры по сечению трубы мало отличаются от соответствующих распределений однофазного потока.

На фиг. 3 показана зависимость Nu_1 (число Нуссельта) от Ra и концентрации φ_2, рассчитанная при $R/l = 10^2$. Кривые *1 — 3* соответствуют $\varphi_2 = 0$; 0,2; 0,4. При вычислении использовалась средняя массовая температура первой фазы $\theta_1^* = 2\int_0^1 \theta_1 U_1/U_1^*\, r\,dr$, т. е. число Nu_1 рассчитывалось по формуле

$$\mathrm{Nu}_1 = -\frac{2}{\theta_1^*}\frac{d\theta_1}{dr}\bigg|_{r=1} = 4\,\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\theta_{1n}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{H_n^2}U_{1n}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{H_n^2}\theta_{1n}U_{1n}}.$$

Из фиг. 3 видно, что при $-4^4 < \mathrm{Ra} < 0$ число Nu_1 возрастает с увеличением концентрации, а при $\mathrm{Ra} > 0$ — наоборот. С увеличением Ra независимо от концентрации Nu_1 растет; при $\mathrm{Ra} \to 0$ приближается к постоянному значению 4,36, что характерно для чисто вынужденной конвекции однофазной среды.



Фиг. 3

Для однородного потока при значении $\mathrm{Ra} = -104{,}9$ у стенки возникает обратное течение, что приводит уже при $\mathrm{Ra} \leqslant -168$ к нарушению устойчивости и изменению характера теплоотдачи, а при $\mathrm{Ra} < -250$ течение становится турбулентным [5]. Для потока с инородными частицами, как показывают расчеты, обратное течение у стенки возникает при $\mathrm{Ra} < -104{,}9$ (например, при $\varphi_2 = 0{,}2$ и $\mathrm{Ra} = -187$ обратное течение у стенки еще отсутствует), а изменение числа Нуссельта остается прежним даже при $\mathrm{Ra} < -250$. На основании этого можно предположить, что переход ламинарного двухфазного течения в турбулентное наступает при числах Ra меньших, чем для однородного потока.

На фиг. 1—3 кривые *1* совпадают с соответствующими кривыми для однофазного потока, которые приведены в [5].

Расчеты, проведенные при $R/l = 10^4$; 10^5, показывают, что размеры частиц при одной и той же концентрации второй фазы существенного вклада в распределение скоростей и температур не вносят. Во всех случаях различие между рассматриваемыми величинами первой и второй фаз незначительно, т. е. предположение о стоксовском режиме обтекания частиц выполняется. Следовательно, полученные решения являются справедливыми для потоков с инородными частицами в трубах с соотношением $R/l > 10^2$.

Поступила 13 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дейч М. Е., Филиппов Г. А.* Газодинамика двухфазных сред. М., «Энергия», 1968.
2. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.
3. *Крайко А. Н., Ткаленко Р. А.* К решению прямой задачи теории сопла Лаваля для двухфазной смеси при малом отставании частиц.— ПМТФ, 1973, № 4.
4. *Остроумов Г. А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
5. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.
6. *Салтанов Г. А., Ткаленко Р. А.* Обтекание клина сверхзвуковым двухфазным потоком.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 2.