УДК 532.5

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОСТНОГО ПАЛЬЦЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ ЖИДКОСТИ, СМЕШИВАЮЩЕЙСЯ С ВЫТЕСНЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. Немати, Х. Саффари, Б. З. Вамерзани, Р. Азизи, С. М. Хоссейналипур, Х. Мири

Школа инженерной механики Иранского университета наук и технологий, Тегеран, Иран E-mails: nemati.arash.92@gmail.com, saffari@iust.ac.ir, b_zare@mecheng.iust.ac.ir, azz.reza74@gmail.com, alipour@iust.ac.ir, hamedmiri77@yahoo.com

С использованием закона Дарси для двухфазной жидкости и уравнения переноса численно исследуется неустойчивость процесса пальцеобразования в смешивающихся жидкостях. Изучено влияние отношения вязкости вытесняемой жидкости к вязкости вытесняющей жидкости, а также анизотропии и пористости среды на процесс пальцеобразования. Исследуется структура пальцев, а также процессы их расщепления и распространения. С использованием алгоритма обработки изображений получена оценка таких параметров неустойчивости, как время проникания (замещения), эффективность проникания, фрактальная размерность. Установлено, что с увеличением отношения вязкостей жидкостей увеличивается сложность структуры пальцев, уменьшаются эффективность и время проникания вытесняющей жидкости. Показано, что увеличение проницаемости в направлении, перпендикулярном направлению потока, приводит к интенсификации процесса неустойчивости и увеличению фрактальной размерности. При высокой проницаемости в направлении, перпендикулярном направлению потока, изменение пористости практически не оказывает влияния на процесс вязкостного пальцеобразования.

Ключевые слова: неустойчивость вязкостного пальцеобразования, закон Дарси для двухфазной жидкости, пористая среда, поток смешивающихся жидкостей.

DOI: 10.15372/PMTF20200406

Введение. Неустойчивость, возникающая на границе двух сред, в случае когда менее вязкая жидкость вытесняет более вязкую жидкость, называется неустойчивостью вязкостного пальцеобразования, или неустойчивостью Саффмана — Тейлора [1]. Это явление наблюдается при фильтрации жидкости, в процессе увеличения нефтеотдачи пласта, а также в процессах, изучаемых в гидрологии и хроматографии. Неустойчивость вязкостного пальцеобразования может иметь место в случае как смешивающихся жидкостей, так и несмешивающихся. В последнее время интенсивно исследуется процесс смешивающегося вытеснения (вытеснения жидкости, смешивающейся с вытесняющей жидкостью), в случае когда вязкость существенно зависит от концентрации раствора [2, 3].

В работе [4] изучалась неустойчивость вязкостного пальцеобразования, возникающая вследствие скачка давлений и турбулентности на границе раздела двух жидкостей. В [5]

смешивающееся вытеснение исследовалось с использованием системы дифференциальных уравнений в частных производных, в которых учитывались силы гравитации, проницаемость среды, диффузия и вязкость. В работе [6] в результате численного моделирования нелинейного процесса вязкостного пальцеобразования при смешивающемся вытеснении установлено, что взаимодействие пальцев не зависит от концентрации раствора, но зависит от давления. В [7] выполнено численное моделирование двумерного процесса замещения и установлено соотношение между подвижностью жидкости и структурой течения в неоднородной пористой среде.

В работе [8] предложены три механизма возникновения неустойчивости процесса пальцеобразования: экранирование, распространение и расщепление. При расщеплении кончики широких пальцев разделяются на несколько новых пальцев, при распространении пальцев их кончики становятся длиннее и шире, при этом крупные пальцы доминируют в потоке, подавляя более мелкие. В работе [9] для определения количества образующихся пальцев изучена длина границы раздела двух жидкостей. Для того чтобы определить, каким образом изменяется структура потока в зависимости от масштабного уровня, на котором она исследуется, и какое влияние оказывает структура потока на неустойчивость процесса пальцеобразования, в ряде работ использовалось понятие фрактальной размерности [10, 11].

В данной работе с использованием пакета COMSOL Multiphysics 5.1 численно решаются уравнения переноса и уравнение закона Дарси для двухфазной жидкости. Результаты численного моделирования сравниваются с экспериментальными данными [12]. Детально исследуются структура пальцев и механизм их образования, а также неустойчивость процесса пальцеобразования. Исследуется влияние отношения вязкостей двух жидкостей, отношения проницаемости в двух направлениях, пористости среды на неустойчивость процесса пальцеобразования. Для определения некоторых количественных параметров неустойчивости процесса пальцеобразования с использованием алгоритма обработки образов выполнен анализ картины пальцев. Определено время, в течение которого пальцы распространяются на всю область (время проникания), а также фрактальная размерность. Для вычисления фрактальной размерности использовался метод определения количества блоков, необходимых для покрытия двумерной области неустойчивости. Угол наклона кривой логарифмической зависимости числа блоков от размера сетки определяет фрактальную размерность. При вычислении фрактальной размерности использовался алгоритм пакета МАТLAB. Эффективность проникания E представляет собой отношение площади, занимаемой вытесняющей жидкостью, к общей площади, находящейся за передним пальцем, и вычисляется путем деления площади ячейки, занимаемой инжектируемой жидкостью, на общую площадь ячейки.

Система уравнений. Закон Дарси описывает движение жидкости в пористой среде и связывает скорость с градиентом давления:

$$\boldsymbol{u} = -(k/\mu)\nabla p$$

 $(u - вектор скорости; k - проницаемость пористой среды; <math>\mu -$ динамическая вязкость; p -давление в жидкости). Закон Дарси для двухфазной жидкости представляет собой комбинацию закона Дарси и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varphi \right) + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{u} \right) = 0,$$

где ρ — средняя плотность; φ — пористость среды. Подставляя закон Дарси в уравнение неразрывности, получаем уравнение для определения давления

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varphi\right) + \nabla \cdot \rho\left(-\frac{k_i}{\mu}\nabla p\right) = 0 \tag{1}$$



Рис. 1. Геометрия области вычислений и краевые условия: 1 — левая граница, 2 — отверстия, 3 — верхняя граница, 4 — нижняя граница, 5 — выход

 $(k_i$ — проницаемость фазы). В случае если поток состоит из двух смешивающихся жидкостей, средние плотность и вязкость зависят от состава смеси и могут быть определены с использованием соотношений

$$s_1 + s_2 = 1;$$
 (2)

$$s_1\rho_1 + s_2\rho_2 = \rho, \qquad s_1\frac{k_{r1}}{\mu_1} + s_2\frac{k_{r2}}{\mu_2} = \frac{1}{\mu} \quad \left(k_{ri} = \frac{k_i}{k}\right),$$
(3)

где s_1, s_2 — насыщение жидкостями; ρ_1, ρ_2 — плотности; μ_1, μ_2 — динамические вязкости жидкостей; k_{r1}, k_{r2} — относительные проницаемости фаз (в случае однофазного течения отношение проницаемости фазы к проницаемости среды).

Помимо приведенных выше уравнений необходимо использовать уравнение переноса массы одной из фаз

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi c_1) + \nabla \cdot (c_1 u) = \nabla \cdot (D\nabla c_1) \qquad (c_1 = s_1 \rho_1), \tag{4}$$

где *D* — коэффициент диффузии; *с* — концентрация каждой жидкой фазы.

При известной скорости u уравнение (4) может быть решено относительно величин c_1 и s_1 . В соответствии с уравнением (2) сумма концентраций фаз равна единице, следовательно, можно определить s_2 . Далее из уравнений (3) при известных плотностях и вязкостях каждой фазы определяются плотность и вязкость в каждой ячейке, которые затем используются в уравнении (1). В результате решения этого уравнения определяется давление.

Область вычислений. Область вычислений представляет собой прямоугольник длиной 35 см, шириной 20 см (рис. 1) и подобна ячейке Хеле-Шоу, которая обычно используется при экспериментальном исследовании течения в пористой среде. Пористость и проницаемость в ячейке полагаются однородными. Однако проницаемость может зависеть от направления. В качестве начальных условий принимаются равенства нулю давления и насыщенности инжектируемой жидкости. Через два отверстия диаметром 2 мм, расположенных на одной из сторон прямоугольной области, впрыскивается поток жидкости с постоянной нормальной составляющей скорости, равной 16,9 см/с. Поток свободно вытекает с другой стороны прямоугольной области, где поддерживается постоянное давление. Верхняя и нижняя стороны прямоугольной области являются стенками. Таким образом, на границах прямоугольной области задаются следующие условия:

— на выходе из прямоугольной области

$$p = 0, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0;$$



Рис. 2. Зависимость времени проникания t_b от скорости инжекции v_{in} : линия — результаты численного моделирования, точки — экспериментальные данные [12]

— на верхней и нижней сторонах прямоугольной области

$$u_2 = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0;$$

— во входных отверстиях

$$u_1 = u_{10}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = u_{10}, \qquad c_1 = c_{in};$$

— на левой стороне прямоугольной области (за исключением входных отверстий)

$$u_1 = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0.$$

Здесь u_1, u_2 — вертикальная и горизонтальная составляющие вектора скорости; c_{in} — концентрация впрыскиваемой жидкости; u_{10} — постоянная скорость во входном отверстии. Условия для производных от давления и концентрации записаны с учетом закона Дарси.

В прямоугольной области использовалась двумерная неструктурированная сетка с треугольными конечными элементами. С учетом результатов предварительных численных экспериментов при численном решении задачи использовалась сетка, содержащая 400 000 конечных элементов. Поскольку в данной работе численно исследуется неустойчивость процесса вязкостного пальцеобразования, для того чтобы определить структуру течения на большом промежутке времени, расчетная сетка должна быть достаточно мелкой. Это условие является причиной достаточно больших вычислительных затрат и одним из ограничений при проведении численного моделирования. Линейная система уравнений решалась с использованием решателя PARDISO [13].

Результаты численного моделирования. Полученное численно решение сравнивалось с решениями, приведенными в работах [12, 14]. При этом установлено качественное соответствие структур течения. На рис. 2 приведена зависимость времени проникания t_b от скорости инжекции v_{in} . Видно, что результаты численного моделирования и экспериментальные данные различаются менее чем на 5 %.

При исследовании структуры пальцев результаты численного решения системы уравнений использовались для построения изолиний концентрации. Для получения количественных характеристик течения картина изолиний была обработана с помощью алгоритма обработки изображений. Результаты исследования позволяют сделать следующие выводы. Неустойчивость возникает непосредственно после начала инжекции. При этом



Рис. 3. Тангенциальное течение в окрестности входного отверстия ($\mu_1/\mu_2 = 42.4, k_x/k_y = 10, \varphi = 0.52$)



Рис. 4. Структура пальцев при $k_x/k_y = 10, \varphi = 0,52$: $a - \mu_1/\mu_2 = 15, \delta - \mu_1/\mu_2 = 68,5$

вблизи отверстий появляется большое количество тонких пальцев. В результате коалесценции они сливаются в большие пальцы [6], часть которых, подавляя другие, становятся еще больше (происходит процесс экранирования и распыления). Вдоль границы, на которой расположены отверстия, возникает тангенциальное течение, интенсивность которого со временем уменьшается (рис. 3).

Постепенно рассматриваемая область заполняется большим количеством пальцев. Инжектируемая жидкость течет по каналам, создаваемым этими пальцами, образующиеся новые пальцы создают новые каналы. Затем кончики широких пальцев расщепляются на несколько новых пальцев (механизм расщепления).

Проведено исследование влияния ряда параметров на процесс образования пальцев. Одним из основных параметров, влияющих на неустойчивость, является отношение вязкостей μ_1/μ_2 . Чем больше отношение вязкостей, тем более сложной становится структура пальцев, при этом механизм расщепления становится доминирующим, пальцы — более тонкими (рис. 4). По мере образования новых пальцев площадь, занимаемая инжектируемой жидкостью, уменьшается, поэтому пальцы быстрее распространяются по всей ячейке. В результате уменьшаются эффективность проникания и время проникания.

Зависимости, полученные в результате применения алгоритма обработки изображений, приведены на рис. 5. По мере усложнения структуры пальцев увеличивается фрактальная размерность, которая является мерой сложности процесса развития неустойчивости.



Рис. 5. Зависимости эффективности проникания E(1) и фрактальной размерности $D_f(2)$ от отношения вязкостей жидкостей $(k_x/k_y = 10, \varphi = 0.52)$



Рис. 6. Структура пальцев при $\mu_1/\mu_2 = 42,4, \varphi = 0,52$: $a - k_x/k_y = 0,2, \delta - k_x/k_y = 10$

Многие пористые среды являются анизотропными (проницаемость зависит от направления потока). Например, в двумерном случае проницаемость в направлении потока k_x может отличаться от проницаемости в направлении, перпендикулярном направлению потока, k_y . Проведены вычисления при различных значениях отношения k_x/k_y .

На рис. 6 показана структура пальцев при $k_x/k_y = 0.2$; 10,0. Чем больше проницаемость в направлении, перпендикулярном направлению потока, тем существеннее проявляется неустойчивость и тем сложнее становится структура течения. Это обусловлено тем, что жидкость быстрее распространяется в поперечном направлении, позволяя пальцам расширяться в том же направлении. В результате пространство, в котором они могут расщепляться, увеличивается.

При малых отношениях k_x/k_y расщепление пальцев происходит чаще, и направления, в которых происходит расщепление, образуют большие углы с направлением инжекции. При больших отношениях k_x/k_y пальцы расщепляются преимущественно в направлении инжекции. На рис. 7 приведены зависимости эффективности проникания и фрактальной размерности от отношения k_x/k_y . Распространение жидкости в направлении, перпендикулярном направлению потока, позволяет увеличить эффективность проникания при малых значениях отношения k_x/k_y . При увеличении проницаемости в поперечном направлении



Рис. 7. Зависимости эффективности проникания E(1) и фрактальной размерности $D_f(2)$ от отношения k_x/k_y ($\mu_1/\mu_2 = 42,4, \varphi = 0,52$)



Рис. 8. Зависимости времени проникания t_b (1) и отношения времени проникания к пористости t_b/φ (2) от пористости при $\mu_1/\mu_2 = 42.4$, $k_x/k_y = 10$

в 10 раз эффективность проникания увеличивается приблизительно на 6 %. Поэтому для заполнения всей ячейки требуется больше времени (увеличивается время проникания). При малых отношениях k_x/k_y усложнение структуры пальцев и увеличение их количества приводят к увеличению фрактальной размерности.

При постоянной проницаемости пористость не влияет на неустойчивость процесса образования пальцев и их структуру. При изменении пористости механизм образования пальцев и процесс распространения их в ячейке практически не меняются. При увеличении пористости параметры процесса неустойчивости практически не меняются, за исключением времени проникания (рис. 8). Увеличение времени проникания обусловлено тем, что объем пор в ячейке увеличивается, поэтому при постоянной скорости потока для заполнения одного и того же объема пространства требуется большее количество инжектируемой в ячейку жидкости. На рис. 8 приведена зависимость от пористости отношения времени проникания к пористости. Видно, что отношение t_b/φ является константой. Это свидетельствует о том, что пористость практически не влияет на процесс возникновения неустойчивости.

Заключение. Исследованы неустойчивость процесса вязкостного пальцеобразования и зависимость этого процесса от отношений вязкостей жидкостей и проницаемостей в продольном и поперечном направлениях, а также от пористости среды.

Установлено, что возникновению неустойчивости соответствует образование большого количества небольших пальцев, которые в результате коалесценции увеличиваются. Эти пальцы либо распространяются по всей ячейке, либо расщепляются на новые пальцы. С увеличением отношения вязкостей жидкостей происходит расщепление большего количества пальцев, при этом их структура усложняется. В результате увеличиваются время проникания и фрактальная размерность, но уменьшается эффективность проникания. При увеличении проницаемости в направлении, перпендикулярном направлению потока, характер неустойчивости становится более сложным и нерегулярным, угол между направлением потока и направлением, в котором происходит расщепление пальцев, увеличивается. При неизменной проницаемости изменение пористости практически не оказывает влияния на процесс образования пальцев и их структуру.

ЛИТЕРАТУРА

- Taylor G. I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. 1 // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1950. V. 201, N 1065. P. 192–196.
- Mishra M., Martin M., De Wit A. Miscible viscous fingering with linear adsorption on the porous matrix // Phys. Fluids. 2007. V. 19, N 7. 073101.
- Tan C., Homsy G. Stability of miscible displacements in porous media: Rectilinear flow // Phys. Fluids. 1986. V. 29, N 11. P. 3549–3556.
- 4. Hill S. Channeling in packed columns // Chem. Engng Sci. 1952. V. 1, N 6. P. 247–253.
- Peaceman D., Rachford H. (Jr) Numerical calculation of multidimensional miscible displacement // Soc. Petroleum Engrs J. 1962. V. 2, N 4. P. 327–339.
- Zimmerman W., Homsy G. Three-dimensional viscous fingering: A numerical study // Phys. Fluids. Fluid Dynamics. 1992. V. 4, N 9. P. 1901–1914.
- Waggoner J., Castillo J., Lake L. W. Simulation of EOR processes in stochastically generated permeable media // SPE Reservoir. Evaluat. Engng. 1992. V. 7, N 2. P. 173–180.
- Homsy G. M. Viscous fingering in porous media // Annual Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19, N 1. P. 271–311.
- Kopf-Sill A. R., Homsy G. Nonlinear unstable viscous fingers in Hele-Shaw flows.
 1. Experiments // Phys. Fluids. 1988. V. 31, N 2. P. 242–249.
- 10. Jiao C., Maxworthy T. An experimental study of miscible displacement with gravity-override and viscosity-contrast in a Hele-Shaw cell // Experiments Fluids. 2008. V. 44, N 5. P. 781–794.
- Ferer M., Ji C., Bromhal G. S., et al. Crossover from capillary fingering to viscous fingering for immiscible unstable flow: Experiment and modeling // Phys. Rev. E. 2004. V. 70, N 1. 016303.
- Hosseinalipoor S. M., Nemati A., Zare Vamerzani B., Saffari H. Experimental study of finger behavior due to miscible viscous and gravity contrast in a porous model // Energy Sources. Pt A. 2019. P. 1–14.
- Schenk O., Gärtner K., Fichtner W., Stricker A. PARDISO: a high-performance serial and parallel sparse linear solver in semiconductor device simulation // Future Generat. Comput. Systems. 2001. V. 18, N 1. P. 69–78.
- 14. Nemati A., Zare B., Saffari H., Hosseinalipoor S. M. An experiment model for visualizing viscous fingering instability // Abstr. of the 2nd Nat. conf. of applied mechanical engineering, Shahrekord (Iran), 31 Oct. 2018. Shahrekord: Shahrekord Univ., 2018.

Поступила в редакцию 20/IX 2019 г., после доработки — 13/I 2020 г. Принята к публикации 27/I 2020 г.