

мени, а распределения концентраций реагирующих веществ принципиально отличаются от соответствующих распределений при диффузионном или гомогенном горении газов.

Часть топлива, попавшего в бедные области, сгорает, а часть остается несгоревшей даже, если длина камеры сгорания сколь угодно велика; топливо, попавшее в богатые области, догорит полностью, если длина камеры достаточно велика [9]. При уменьшении α от ∞ до 1 стехиометрическая поверхность вытягивается, приближаясь к выходу из камеры. Это обстоятельство приводит к снижению полноты сгорания топлива, находящегося в богатых областях, что ясно из теории диффузионного горения газов, в которой предполагается, что все несгоревшее топливо находится в таких областях. При этом полнота сгорания топлива в бедных областях растет, так как его догорание обусловлено диффузией топлива к поверхности пламени и при снижении α его площадь увеличивается. Поэтому при снижении α от ∞ до 1 эффективность процесса может меняться немонотонно. Такая закономерность действительно наблюдается в камерах сгорания газотурбинных двигателей и совершенно не характерна для горения газов как диффузионного, так и гомогенного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варшавский Г. А. Изд. Бюро новой техники.— М., 1945.
2. Spalding D. V. Fuel, 1950, 29, 25.
3. Агафонова Ф. А., Гуревич М. А., Тарасова Е. Ф. Третье Всесоюз. совещание по теории горения. Т. 2.— М.: Изд-во АН СССР, 1960.
4. Зельдович Я. Б. ЖТФ, 1949, 19, 10, 1199.
5. Вильямс Ф. А. Теория горения.— М.: Наука, 1971.
6. Gogos D., Sathal S. S., Ayyaswamy P. S. e. a. J. Fluid Mech., 1986, 171, 121.
7. Burgoyne J. H., Cohen L. Proc. Roy. Soc., 1954, A225, 1162, 375.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
9. Кузнецов В. Р., Сабельников В. А. Турбулентность и горение.— М.: Наука, 1986.
10. Талантов А. В. Основы теории горения.— Казань, 1975.
11. Шрайбер А. А., Милютин В. Н., Яценко В. П. Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом.— Киев: Наук. думка, 1980.
12. Кабанов В. В., Клубник В. С. ИФЖ, 1985, 48, 3, 396.
13. Лебедев Б. П., Тихомиров В. Г. ЖТФ, 1960, 30, 6.
14. Boysan F., Ayers W. H., Swithenbank J. e. a. J. Energy, 1982, 6, 6, 368.
15. Ziley D. G. J. Propulsion and Power, 1986, 2, 1, 66.
16. Дорошенко В. Е. Третье Всесоюз. совещание по теории горения. Т. 2.— М.: Изд-во АН СССР, 1960.

Поступила в редакцию 24/III 1987

ГЕКСАГОНАЛЬНАЯ УПАКОВКА ЯЧЕЕК ОХЛАЖДЕННЫХ ПЛАМЕН ПРИ ДИФфуЗИОННО-ТЕПЛОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

С. С. Минаев

(Новосибирск)

В последние годы достигнут существенный прогресс в нелинейном анализе устойчивости пламени [1, 2], позволяющем объяснять такие сложные явления, как пространственное расположение ячеек пламени, их стохастическое поведение [3, 4]. По-видимому, наиболее простое сравнение результатов нелинейной теории распространения пламени с экспериментом может быть получено из исследования стационарных периодических структур ячеек пламени. Пространственная упаковка ячеек пламени и зависимость амплитуды ячеек от параметров служат хорошим критерием для проверки результатов теории. Например, при гексагональной упаковке каждая ячейка граничит с шестью соседними, а при квадратной — с восемью.

Ряд нестационарных явлений на поверхности пламени можно рассматривать как потерю устойчивости стационарной периодической струк-

туры относительно возмущений с длинами волн, много большими среднего размера ячеек. Здесь в расположении большинства ячеек будет сохраняться ближний порядок, соответствующий гексагональной или квадратной упаковке.

В работе в рамках метода «узких зон» получено нелинейное уравнение эволюции фронта химической реакции из диффузионно-тепловой задачи распространения пламени, имеющего недостаток энтальпии. Последний по сравнению со свободно распространяющимся пламенем обусловлен дополнительными потерями тепла из зоны химической реакции и связан со стоком тепла в холодную стенку, расположенную в свежем газе. Показано, что полученное уравнение допускает стационарное ячеестое решение, имеющее вид гексагональной, или квадратной, решетки. Исследование на устойчивость полученных решений показывает, что гексагональная упаковка ячеек устойчива.

Уравнения теплопроводности и диффузии в несжимаемом веществе, движущемся с постоянной скоростью u вдоль оси z (система координат связана с невозмущенным пламенем), имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= u \frac{\partial T}{\partial z} + \kappa \Delta T, \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= u \frac{\partial a}{\partial z} + D \Delta a.\end{aligned}\quad (1)$$

На поверхности химической реакции $z = f(x, y, t)$ имеет место разрыв потока вещества и потока тепла, а температура и концентрация на этой поверхности непрерывны:

$$\left. \frac{\partial a_2}{\partial n} \right|_{z=f} = a_2|_{z=f} = a_1|_{z=f} = 0, \quad (2)$$

$$T_2|_{z=f} = T_1|_{z=f} = T_r, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial n} - \frac{\partial T_2}{\partial n} \right) \Big|_{z=f}^* = \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right) \Big|_{z=0}^0 \exp \left[-\frac{E}{2R} \left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_r} \right) \right], \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial n} \right) \Big|_{z=f}^* = \left(\frac{\partial a_1}{\partial n} \right) \Big|_{z=0}^0 \exp \left[-\frac{E}{2R} \left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_r} \right) \right]. \quad (5)$$

Граничные условия (4), (5) получены из зависимости потоков тепла и вещества от температуры поверхности реакции [1]. Индексы 1, 2 относятся к свежей смеси и продуктам реакции соответственно; * и 0 соответствуют возмущенным и невозмущенным параметрам; T_0 , T_r , T_b — температуры нереагирующей смеси, в зонах реакции искривленного и плоского пламени; E — энергия активации; a — концентрация недостающего компонента; κ и D — коэффициенты теплопроводности и диффузии; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали. Имеется также граничное условие для температуры свежей смеси ($T_1(z=d) = T_0$), которое описывает сток тепла, например в пористую горелку, находящуюся на расстоянии d от зоны химической реакции.

Невозмущенные поля концентраций и температур, соответствующие плоскому пламени, задаются выражениями

$$\begin{aligned}T_2^0 &= T_b, \quad a_1^0 = a_0 \left(1 - \exp \left[-\frac{zu}{D} \right] \right), \\ T_1^0 &= \begin{cases} T_b + (T_b - T_0) \left(\exp \left[-\frac{zu}{\kappa} \right] - 1 \right) / \left(1 - \exp \left[-\frac{du}{\kappa} \right] \right), & z \leq d, \\ T_0, & z > d. \end{cases}\end{aligned}$$

Линейная теория неустойчивости. Рассмотрим результаты линейной теории неустойчивости. Запишем возмущенные величины для температуры и концентрации:

$$a_1 = a_1^0 + p e^{\Omega t}, \quad T_1 = T_1^0 + g e^{\Omega t}, \quad T_2 = T_2^0 + h e^{\Omega t}.$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$x \rightarrow \frac{xu}{\chi}, \quad f \rightarrow \frac{fu}{\chi}, \quad \Omega \rightarrow \frac{\Omega \chi}{u^2}, \quad \bar{z} \rightarrow \frac{a}{a_0}, \quad T \rightarrow \frac{T}{(T_b - T_0)}.$$

Применив преобразование Фурье по поперечным координатам x, y , получим решение уравнений (1) для фурье-компонент p, g, h :

$$p(\vec{k}) = p_0 e^{-r_1 z}, \quad g(\vec{k}) = g_0 e^{-r_2 z} + g_1 e^{r_3 z}, \quad h(\vec{k}) = h_0 e^{r_3 z},$$

$$r_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{Le} + \left[\left(\frac{1}{Le} \right)^2 + 4 \left(k^2 + \frac{\Omega}{Le} \right) \right]^{1/2} \right\},$$

$$r_2 = \frac{1}{2} [1 + [1 + 4(k^2 + \Omega)]^{1/2}], \quad r_3 = r_2 - 1.$$

Здесь $Le = D/\chi$ — число Льюиса. Подставляя эти решения в граничные условия, получим систему линейных уравнений относительно величин p_0, g_0, g_1, h_0, f и $\tau = \frac{T_r - T_b}{T_b - T_0}$. Последовательно исключая p_0, g_0, g_1, h_0 и τ , получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\left[(r_2 + r_3) \left(r_1 - \frac{1}{Le} \right) + \frac{Ze}{2} \left(r_2 - 1 - r_1 + \frac{1}{Le} \right) + \beta (2r_2 - 1 + r_3) \right] f = 0, \quad (6)$$

где $Ze = \frac{E(T_b - T_0)}{RT_b^2}$ — число Зельдовича; $\beta = \frac{Ze}{2} \exp[-d]$. Для длинноволновых возмущений $4(k^2 + \Omega) \ll 1$ упростим (6):

$$\Omega - (l - 1)k^2 + 4k^4 + \beta = 0, \quad (7)$$

$$l = Ze/2 \cdot (Le - 1).$$

При $\beta = 0$ (т. е. $d \rightarrow \infty$) дисперсионное соотношение (7) соответствует линейной части уравнения Сивашинского [2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (l - 1) \Delta f + 4 \Delta^2 f = 0.$$

При $0 < \beta < (l - 1)^2/16 = \beta_c$ область неустойчивости уменьшается — неустойчивы возмущения с волновыми векторами, расположенными в диапазоне $k_0^2 - \left(k_0^2 - \frac{\beta}{4} \right)^{1/2} < k^2 < k_0^2 + \left(k_0^2 - \frac{\beta}{4} \right)^{1/2}$, где $k_0^2 = (l - 1)/8$. Важно, что максимальный инкремент имеют возмущения с волновыми векторами, равными по модулю k_0 и $\Omega_{\max} = (l - 1)^2/16 - \beta$. При $\beta > \beta_c$ пламя устойчиво относительно всех возмущений. В случае $\beta_c - \beta \ll \beta_c$ пламя неустойчиво относительно возмущений с волновыми векторами, расположенными в узкой зоне вблизи k_0 ; нелинейные эффекты приводят к ограничению амплитуды возмущений и на поверхности пламени образуется стационарный рельеф.

Нелинейное уравнение для поверхности пламени. Остановимся на вопросе об учете нелинейных членов в эволюционном уравнении для поверхности пламени. Для этого решение системы (1) ищем в виде одномерной локально нормальной волны [5]. В этом методе предполагается, что наибольшие потоки температуры и концентрации совпадают с направлением нормали к поверхности пламени:

$$\vec{\nabla} T \simeq \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n}, \quad \vec{\nabla} a \simeq \vec{n} \frac{\partial a}{\partial n}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \simeq -w_n \frac{\partial T}{\partial n}, \quad \frac{\partial a}{\partial t} \simeq -w_n \frac{\partial a}{\partial n}. \quad (8)$$

Здесь $\vec{n} = (1/\sqrt{1 + (\nabla f)^2}, -\nabla f/\sqrt{1 + (\nabla f)^2})$ — единичный вектор нормали к поверхности реакции; $w_n = \frac{\partial f}{\partial t} / \sqrt{1 + (\nabla f)^2}$ — нормальная скорость перемещения зоны реакции. Используя (8), из системы (1) получим квази-

одномерные уравнения для температуры и концентрации

$$(v + K) \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = 0, \quad (9)$$

$$(v + K \text{Le}) \frac{\partial a}{\partial n} + \frac{\partial^2 a}{\partial n^2} = 0, \quad (10)$$

где $v = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + 1 \right) / \sqrt{1 + (\nabla f)^2}$; $K = \text{div } \vec{n}$ — кривизна поверхности реакции. Решая (9) и (10), из граничных условий (2)–(5) и граничного условия при $z = d$ можно получить следующие выражения:

$$\frac{(v + K)(\tau + 1)[1 - \exp(-d)]}{(1 - \exp[-(v + K)L])} = \exp\left[\frac{Ze}{2}\tau\right], \quad (11)$$

$$v + \text{Le}K = \exp\left[\frac{Ze}{2}\tau\right]. \quad (12)$$

Здесь $L = (d - f)\sqrt{1 + (\nabla f)^2}$ — расстояние по нормали от поверхности реакции до поверхности $z = d$. При выводе (11) и (12) в граничном условии (4) поток тепла от фронта пламени в продукты горения считался пренебрежимо малым по сравнению с потоком тепла в свежий газ ($\frac{\partial T}{\partial n} \approx 0$). Заметим, что температура на поверхности пламени в точке максимума ($K > 0$) больше, чем в точке минимума ($K < 0$). Этот вывод следует из (12).

Исключая из (11) и (12) τ , в слабонелинейном приближении $|\nabla f| \ll 1$ получим эволюционное уравнение для поверхности реакции

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (l - 1)\Delta f + \beta f + \frac{1}{2}\beta f^2 - \frac{1}{2}(\nabla f)^2 + \frac{1}{2}(\Delta f)^2 \left(1 + (\nabla f)^2 + \frac{1}{3}(\Delta f)^2\right) + \\ + \frac{1}{6}\beta f(2f^2 - 3f\Delta f - 3(\nabla f)^2) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Подчеркнутыми членами в уравнении можно пренебречь, так как нелинейные члены со вторыми производными меньше $(\nabla f)^2$, с коэффициентом β малы, поскольку $\beta \approx \beta_c = 4k_0^2$. Из сравнения результата линейной теории неустойчивости (7) с линейной частью (13) следует, что полученное таким образом уравнение необходимо дополнить членом $4\Delta^2 f$, который описывает затухание коротковолновых возмущений и не может быть получен в рамках метода локально нормальной волны (в этом методе учитываются возмущения поверхности пламени с низшими производными, не выше второй):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (l - 1)\Delta f + \beta f + 4\Delta^2 f - \frac{1}{2}(\nabla f)^2 + \frac{1}{2}\beta f^2 = 0. \quad (14)$$

Стационарные решения и их устойчивость. Покажем, что стационарное решение уравнения (14) описывает поверхность пламени, имеющую вид гексагональной решетки. Действительно, при уменьшении значений $\beta < \beta_c$ и $\beta_c - \beta \ll \beta_c$ на поверхности пламени становятся неустойчивыми возмущения с волновыми векторами, близкими к k_0 . Поскольку все ячейки пламени должны иметь одинаковый размер порядка $2\pi/k_0$ (иначе они будут неустойчивы), то поверхность пламени они могут заполнить в виде гексагональной, или квадратной, решетки. Для решения, описывающего гексагональную упаковку ячеек, поверхность пламени зададим выражением

$$\begin{aligned} f = a_0 + 2 \sum_{i=1}^3 a_1 \cos(\vec{q}_i \vec{r}) + 2 \sum_{i=1}^3 a_2 \cos(2\vec{q}_i \vec{r}) + 2a_3 [\cos(\vec{q}_1 - \vec{q}_2, \vec{r}) + \\ + \cos(\vec{q}_1 - \vec{q}_3, \vec{r}) + \cos(\vec{q}_2 - \vec{q}_3, \vec{r})] + O(a_1^3), \\ \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 = 0, \quad |\vec{q}_i| = k_0. \end{aligned}$$

Подставляя это решение в уравнение (14), найдем связь коэффициентов a_0 , a_2 и a_3 с a_1 :

$$a_0 = 3k_0^2 a_1^2 / \beta, \quad a_2 = -a_1^2 / 72k_0^2, \quad a_3 = -a_1^2 / 32k_0^2.$$

Коэффициент a_1 связан с надкритичностью $h = \beta_c - \beta$ выражением

$$\frac{35}{288} a_1^2 - \frac{1}{2} k_0^2 a_1 - h = 0,$$

отсюда

$$a_1 = \frac{72}{35} k_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{72}{35} k_0^2\right)^2 + \frac{288}{35} h}.$$

Первое решение (со знаком плюс перед радикалом) характеризуется тем, что с уменьшением β до β_c на первоначально плоской поверхности пламени скачком возбуждаются ячейки с конечной амплитудой $a_{1c} = \frac{144}{35} k_0^2 \ll 1$. Второе решение описывает мягкий режим возбуждения возмущений, амплитуда ячеек вблизи порога неустойчивости пропорциональна надкритичности h .

Чтобы ответить на вопрос, какое из полученных решений реализуется в действительности, необходимо исследовать эти решения на устойчивость. Уравнение для возмущений поверхности η имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (l-1) \Delta \eta + 4\Delta^2 \eta + \beta \eta + \beta \eta f - (\vec{\nabla} f, \vec{\nabla} \eta) = 0. \quad (15)$$

Возмущения искривленной поверхности должны иметь характерный размер такой же, как и размер ячейки пламени, так как наиболее быстро растут волны с волновыми векторами, близкими к k_0 . Поскольку $(l-1) \Delta \eta + 4\Delta^2 \eta + \beta_c \eta \approx 0$, то (15) можно записать в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\beta [1+f] - \beta_c) \eta - (\vec{\nabla} f, \vec{\nabla} \eta) = 0. \quad (16)$$

Член $(\vec{\nabla} f, \vec{\nabla} \eta)$ не определяет возникновения неустойчивости, он описывает перенос начальных возмущений в области локальных максимумов и минимумов искривленной поверхности пламени. Действительно, решение уравнения $\frac{\partial \eta}{\partial t} - \gamma \eta + \alpha \sin x \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ с начальными условиями $t=0$, $\eta = \cos x$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\sin x$ имеет вид

$$\eta = \frac{e^{\gamma t} (\text{sh}(\alpha t) + \cos x \cdot \text{ch}(\alpha t))}{\text{ch}(\alpha t) + \cos x \cdot \text{sh}(\alpha t)}.$$

Видно, что при $\gamma < 0$ решение устойчиво, а нелинейный член $\alpha \sin x \frac{\partial \eta}{\partial x}$, являющийся одномерным аналогом члена $(\vec{\nabla} f, \vec{\nabla} \eta)$, не определяет возникновения неустойчивости (при $t \rightarrow \infty$, $\eta \sim e^{\gamma t}$).

Таким образом, рельеф поверхности будет устойчив, если в любой точке поверхности выполняется условие: $\beta(1+f) - \beta_c \geq 0$. Подставляя в это неравенство минимальное значение f , убеждаемся, что устойчиво первое решение (со знаком плюс перед радикалом). Однако эта форма поверхности пламени становится неустойчивой при всех значениях параметра β , лежащих в диапазоне $0 < \beta < \beta_c - 16(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})k_0^6$. По-видимому, такую форму поверхности пламени можно наблюдать на плоских горелках [6]. Параметр β можно варьировать, меняя расход газа через горелку. При уменьшении β до β_c на первоначально плоской поверхности скачком возбуждается гексагональная структура ячеек с конечной амплитудой a_{1c} . Стационарная структура будет существовать при $\beta_c - 16(3 - 2\sqrt{2})k_0^6 \leq \beta \leq \beta_c$. Дальнейшее уменьшение β ведет к неустойчивости структуры, но, по-видимому, в некотором диапазоне значений β

на поверхности пламени будет сохраняться «ближний порядок», соответствующий гексагональной упаковке ячеек.

Кроме рассмотренных гексагональных рельефов в работе исследовалась квадратная упаковка ячеек. Решение, соответствующее такой форме поверхности пламени, задавалось в виде

$$f = b_0 + 2b_1 [\cos(\vec{q}_1 \vec{r}) + \cos(\vec{q}_2 \vec{r})] + 2b_2 [\cos(2\vec{q}_1 \vec{r}) + \cos(2\vec{q}_2 \vec{r})] + 2b_3 [\cos(\vec{q}_1 + \vec{q}_2, \vec{r}) + \cos(\vec{q}_1 - \vec{q}_2, \vec{r})] + O(b_1^3),$$

где $(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0$. Это решение справедливо лишь при малой надкритичности параметра h . Из уравнения (14) следует связь коэффициентов b_0 и b_1 с h

$$b_0 = 72k_0^2 h / \beta, \quad b_1 = 6\sqrt{h}.$$

Критерий устойчивости квадратной решетки можно записать в том же виде, что и для гексагональной: $\beta(1 + f_{\min}) - \beta_c \geq 0$. Подставляя в это неравенство $f_{\min} = b_0 - 2b_1$, получим, что такая форма поверхности устойчива, если выполняется условие

$$(72k_0^2 - 1)(\beta_c - \beta) - 24\beta\sqrt{\beta_c - \beta} \geq 0.$$

Если $72k_0^2 - 1 < 0$, то очевидно, что это условие не выполняется. В случае $k_0^2 > \frac{1}{72}$ получим, что ни при каких значениях $\beta < \beta_c$ невозможно удовлетворить условию устойчивости

$$\sqrt{\beta_c - \beta} \geq \frac{1 - 72k_0^2}{48} + \sqrt{\left(\frac{1 - 72k_0^2}{48}\right)^2 + \beta_c}.$$

Поэтому можно сделать вывод о неустойчивости квадратной упаковки ячеек пламени.

В заключение отметим, что уравнение, близкое к (14) (без члена $\beta f^2/2$), численно исследовалось в [7] применительно к задаче о диффузионно-тепловой неустойчивости пламени, распространяющегося в системе с постоянным ускорением. В [7] показано, что при уменьшении ускорения до критического значения на поверхности пламени образуется рельеф, имеющий вид гексагональной решетки. Однако вопрос об устойчивости такого рельефа в работе [7] не рассматривался.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
2. Sivashinsky G. I. Ann. Rev. Fluid Mech., 1983, 15, 174.
3. Michelson D. I., Sivashinsky G. I. Acta Astronautica, 1977, 4, 1177.
4. Vickmaster J. J. Appl. Math., 1984, 44, 40.
5. Порога Б. Е. ФГВ, 1985, 21, 3.
6. Гейдон А. Г., Вольфгард Х. Г. Пламя, его структура, излучение и температура.— М.: Металлургиздат, 1959.
7. Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I. J. Appl. Math., 1979, 37, 686.

Поступила в редакцию 18/V 1987,
после доработки — 10/VIII 1987