# К АВТОМОДЕЛЬНЫМ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ ГАЗА

*А. Н. Черепанов (Новосибирск)*

Рассмотрим одномерное нестационарное движение проводящего газа во внешнем магнитном поле, направленном перпендикулярно движущейся среде. Положим, что газ идеальный, вязкость и теплопроводность отсутствуют, тогда в приближении магнитной гидродинамики система уравнений, описывающих движение проводящего газа в магнитном поле, будет иметь вид

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{r^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{\alpha}vH)=\frac{1}{4\pi r^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^{\alpha}}{\sigma}\frac{\partial H}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right),\qquad P=R\rho T \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{1}{r^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{\alpha}v\rho)$$

$$c_v\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v\frac{\partial T}{\partial r}\right)=-\frac{P}{r^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{\alpha}v)+\frac{1}{16\pi^2\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2$$

Обозначения здесь общепринятые. В плоскосимметричном случае $\alpha=0$, в случае цилиндрической симметрии $\alpha=1$.

Будем полагать далее, что проводимость газа зависит лишь от температуры и определяется соотношением

$$\sigma=CT^n \quad (n\geqslant 0) \tag{0.2}$$

Если движение газа сопровождается возникновением ударной волны, то к системе (0.1) необходимо добавить соотношения на ее фронте. Предполагая, что ударная волна газодинамическая, запишем

$$\rho_1(v_1-D)=\rho_2(v_2-D),\quad P_1+\rho_1(v-D)^2=P_2+\rho_2(v_2-D)^2$$

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{P_1}{\rho_1}+\frac{(v_1-D)^2}{2}=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{P_2}{\rho_2}+\frac{(v_2-D)^2}{2},\quad H_1=H_2 \tag{0.3}$$

Индексом 1 обозначены физические величины перед ударной волной, индексом 2 — за ударной волной, $D$ — скорость ударной волны, $\varkappa$ — показатель адиабаты.

Найдем преобразование, оставляющее неизменным вид уравнений (0.1), (0.3). Пусть

$$r=\varepsilon_1 r,\ t=\varepsilon_2 t,\ H=\varepsilon_3 H,\ v=\varepsilon_4 v,\ P=\varepsilon_5 P,\ \rho=\varepsilon_6\rho \tag{0.4}$$

Здесь $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$, $\varepsilon_5$, $\varepsilon_6$ — некоторые постоянные коэффициенты, определяющие преобразование соответствующих переменных величин, при котором вид уравнений (0.1), (0.3) остается неизменным.

Подставив (0.4) в (0.1), получим следующую двупараметрическую группу преобразований, справедливую и для соотношений (0.3):

$$r=\varepsilon_1 r,\quad t=\varepsilon_1^{\frac{2(n+1)}{2n+1}}t,\quad H=\varepsilon_1^{m}H,\quad v=\varepsilon_1^{\frac{-1}{2n+1}}v$$

$$P=\varepsilon_1^{2m}P,\quad \rho=\varepsilon_1^{2\left(m+\frac{1}{2n+1}\right)}\rho,\quad T=\varepsilon_1^{\frac{-2}{2n+1}}T$$

Согласно [1], автомодельные решения системы (0.1) будут иметь вид

$$H=H_0r^{m}h(\xi),\quad v=v_0r^{\frac{-1}{2n+1}}u(\xi),\quad T=T_0r^{\frac{-2}{2n+1}}\theta(\xi),\quad \rho=\rho_0r^{2m+\frac{2}{2n+1}}\chi(\xi) \tag{0.5}$$

Автомодельная переменная

$$\xi=C_0r\,/\,t^{\frac{2n+1}{2(n+1)}},\quad C_0=C^{\frac{1}{2(n+1)}}\,c_v^{\frac{-n}{2(n+1)}} \tag{0.6}$$

Здесь $H_0$, $v_0$, $\rho_0$ и $T_0$ — некоторые размерные константы.

Безразмерные функции $h(\xi)$, $u(\xi)$ и т. д. определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получим из (0.1) с учетом (0.5)

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{N}h' + \xi^{-(m+1+\alpha)}(\xi^{\alpha+m-N_1}uh)' - \frac{\xi^{-(m+1+\alpha)}}{A}\left[\frac{\xi^{\alpha+2nN_1}}{\theta^n}(\xi^m h)'\right]' = 0 \\
-\frac{1}{N}u' + \frac{u}{\xi}(\xi^{-N_1}u)' + \frac{\xi^{-(2m+N)}}{\chi}[\xi^{2m}(\chi\theta + Bh^2)]' = 0 \\
-\frac{1}{N}\chi' + \xi^{-(\alpha+2m+1+2N_1)}(\xi^{\alpha+2m+N_1}u\chi)] = 0 \\
-\frac{1}{N}\theta' + \xi^{-2nN_1}u(\xi^{-2N_1}\theta) + (\varkappa - 1)\xi^{-(\alpha+1)}\theta(\xi^{\alpha-N_1}u)' - K\frac{\xi^{-(2m+N_1)}}{\theta^n\chi}(\xi^m h)'^2 = 0
\end{gathered}
\tag{0.7}
$$

Здесь приняты следующие обозначения для безразмерных параметров:

$$
A = 4\pi C T_0^n v_0, \quad B = H_0^2/8\pi P_0, \quad K = \frac{2B(\varkappa-1)}{A}, \quad N = \frac{2(n+1)}{2n+1}, \quad N_1 = \frac{1}{2n+1}
$$

При этом $T_0 = C_0^{-2N}/R$, $v_0 = C_0^{-N}$, $\rho_0 = P_0 C_0^{2N}$. Штрих означает дифференцирование по $\xi$.

Таким образом, решение системы уравнений в частных производных (0.1) сводится к решению нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка. Для отдельных значений параметра $m$ приведем некоторые частные решения системы (0.7), имеющие вид

$$
h = C_1\xi^\nu, \quad u = C_2\xi^\mu, \quad \chi = C_3\xi^\delta, \quad \theta = C_4\xi^\varepsilon \tag{0.8}
$$

При $m = -N(1+\alpha)$, $\varkappa = 2$

$$
\nu = (1+\alpha)N, \quad \mu = N, \quad \delta = \frac{N}{1-N}[(1-2N)\alpha - 1], \quad [\varepsilon = \frac{N}{1-N}(\alpha + 3 - 2N)
$$

$C_2 = 1$, а $C_1$, $C_3$ и $C_4$ — произвольные константы. Подставив (0.8), с учетом (0.6) и последних соотношений, в (0.5), получим для физических величин

$$
\begin{gathered}
H = H_0\frac{C_1}{t^{1+\alpha}}, \quad \rho = \rho_0 r^{2N_1 - \frac{N(3+2N)}{1-N}} t^{-\alpha + \frac{N\alpha+1}{N-1}} \\
T = T_0 C_4 r^{-2N_1 + \frac{N(\alpha-3-2N)}{1-N}} t^{\frac{\alpha-3-2N}{N-1}}, \qquad v = \frac{r}{t}
\end{gathered}
\tag{0.9}
$$

При $m = -2N(1+\alpha)/[2 + (1+\alpha)(\varkappa-1)]$

$$
\nu = -m, \quad \mu = N, \quad \delta = 2\frac{\alpha + 2m + N_1 + N}{(1+\alpha)(\varkappa-1)}, \quad \varepsilon = 2N
$$

$$
C_2 = \frac{2}{2 + (1+\alpha)(\varkappa-1)}, \quad C_4 = \frac{C_2(1-C_2)}{2m + \delta + 2N}
$$

$C_1$ и $C_2$ — произвольные константы.

$$
\begin{gathered}
H = H_0 C_1 t^{-\frac{2(\alpha+1)}{2+(\alpha+1)(\varkappa-1)}}, \quad \rho = \rho_0 C_3 \frac{r^{2(m+N_1)+\gamma}}{t^\gamma} \\
T = T_0 C_4 \frac{r^2}{t^2}, \quad v = \frac{r}{t} \qquad \left(\gamma = \frac{\alpha + 2m + N_1 + N}{(1+\alpha)(\varkappa-1)}\right)
\end{gathered}
\tag{0.10}
$$

При $m = -{}^1/_3(1 + 4N_1)$, $\alpha = 0$

$$
\nu = {}^4/_3 N, \quad \mu = N, \quad \delta = {}^2/_3 N, \quad \varepsilon = 2N_1, \quad C_2 = {}^2/_3
$$

$$
C_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{C_3}{B}\right)^{1/2}, \quad C_4 = \left[\frac{K}{6B}\frac{N}{3N_1 + (\varkappa-1)N}\right]^{1/(n+1)}
$$

Здесь только одна произвольная константа $C_3$.

$$
H = H_0 C_1 r t^{-4/3}, \quad \rho = \rho_0 C_3 t^{-2/3}, \quad T = T_0 C_4 t^{-2N_1/N}, \quad v = \frac{r}{t} \tag{0.11}
$$

Заметим, что в решениях вида (0.9) и (0.10) магнитное поле не зависит от координаты и является лишь функцией времени.

**1. Некоторые интегралы системы (0.7).** В случае

$$m = -\frac{1 + 2N_1 + \alpha}{2} \tag{1.1}$$

порядок системы (0.7) можно понизить на единицу путем интегрирования третьего уравнения и подстановки полученного выражения для

$$\chi = \frac{C_1 \xi^N}{N^{-1}\xi^N - u} \tag{1.2}$$

в оставшиеся три (предполагается, что $u \neq N^{-1}\xi^N$).

Если принять далее $N_1 = {}^1/_2(1+\alpha)$ $(n = (1-\alpha)/2\,(1+\alpha))$, то интегрируется одновременно и первое уравнение (0.7) один раз, после чего получим систему трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$-\beta h' + \xi^{-\frac{\alpha+3}{2}} uh - \frac{1}{A\theta^n}\xi^{\frac{1+\alpha}{2}} (\xi^{-(1+\alpha)} h)' = C$$

$$-\beta u' + \frac{u}{\xi}\left(\xi^{-\frac{1+\alpha}{2}} u\right)' + \frac{1}{\chi}\xi^{\frac{3\alpha+1}{2}} [\xi^{-2(1+\alpha)} (\chi\theta + Bh^2)]' = 0 \tag{1.3}$$

$$-\beta\theta' + \xi^{-\frac{1-\alpha}{2}} u\,(\xi^{-1-\alpha}\theta)' + (\varkappa - 1)\,\xi^{-1-\alpha}\theta\left(\xi^{-\frac{1-\alpha}{2}} u\right)' - \frac{K}{\theta^n \xi}\xi^{\frac{3(1+\alpha)}{2}} \left(\frac{h}{\xi^{1+\alpha}}\right)'^2 = 0$$

Здесь $\beta = 2/3 + \alpha$, а $\chi(\xi)$ определяется формулой (1.2) при $N = 3 + \alpha/2$.

При малом параметре гидромагнитного взаимодействия

$$BA \ll 1 \tag{1.4}$$

когда влиянием электромагнитного поля на движение проводящей среды можно пренебречь, уравнения (1.3) интегрируются в конечном виде, если положить $\varkappa = 2$, $\alpha = 1$.

Действительно, опустив в третьем уравнении системы (1.3) последний член (предположение (1.4)) и положив $\varkappa = 2$, найдем

$$\theta(\xi) = C_2 \frac{\xi^{\frac{3+\alpha}{2}}}{-\beta\xi^{\frac{3+\alpha}{2}} + u} \tag{1.5}$$

Здесь $\alpha$ может равняться как нулю, так и единице. Из второго уравнения (1.3) при $\alpha = 1$ с учетом (1.2, 1.4, 1.5) получим

$$u^3 - 3\beta\xi^2 u^2 + 2(\beta^2\xi^2 - C_3)\xi^2 u + 2\xi^2(2C_2 + C_3\beta\xi^2) = 0$$

Теперь из первого уравнения системы (1.3) найдем $h(\xi)$ $(\alpha = 1,\ n = 0)$

$$h(\xi) = \xi^2 \exp\left[-\frac{\beta R_m}{2}\xi^2 + \beta R_m \int \frac{u d\xi}{\xi}\right]\left\{-C_4 R_m \int \exp\left[\frac{\beta R_m}{2}\xi^2 - \beta R_m \int \frac{u d\xi}{\xi}\right]\frac{d\xi}{\xi} + C_5\right\}$$

Произвольные константы $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ и $C_5$ находятся из граничных условий.

Заметим, что условию (1.1), при котором существует интеграл (1.2), соответствует случай постоянства массы вещества в рассматриваемой области движения $\Omega$, т. е.

$$\int_\Omega \rho d\Omega = \text{const}$$

**2. Движение проводящего газа в магнитном поле под действием поршня.** Положим, что в момент времени $t = 0$ сжимаемый газ занимает полупространство $r > 0$ и ограничен плоским $(\alpha = 0)$ или цилиндрическим $(\alpha = 1)$ бесконечно проводящим поршнем, который начинает двигаться вдоль оси $r$ в момент времени $t = 0$. При этом по газу будет распространяться ударная волна, возмущающая начальное распределение физических величин.

Рассмотрим случай $m = 0$, $n \geqslant 0$. Тогда автомодельное решение системы (0.1) будет иметь вид

$$H = H_0 h(\xi), \quad v = v_1 t^{-1/2(n+1)} u_1(\xi), \quad P = P_0 G(\xi)$$
$$T = T_1 t^{-1/(n+1)} \theta_1(\xi), \quad \rho = \rho_1 t^{1/(n+1)} \chi_1(\xi)$$
$$u_1 = \xi^{-1/(2n+1)} u(\xi), \quad \theta_1 = \xi^{-2/(2n+1)} \theta(\xi), \quad \chi_1 = \xi^{2/(2n+1)} \chi(\xi)$$

Здесь $H_0$, $v_1$, $P_0$, $T_1$ и $\rho_1$ — соответствующие размерные константы.

В начальный момент времени имелось следующее распределение физических величин по координате $r$

$$H = H_0, \qquad v = 0, \qquad T = T_0 r^{-2/(2n+1)}, \qquad \rho = \rho_0 r^{2/(2n+1)}$$

Обозначим через $\xi_s$ и $\xi_0$ положения поршня и ударной волны соответственно в пространстве автомодельной переменной $\xi$.

Из условия автомодельности задачи имеем закон движения поршня

$$r_s = \frac{\xi_s}{C_0} t^{\frac{2n+1}{2(n+1)}}$$

(индекс $s$ здесь и далее будет означать условие на поршне). Скорость движения поршня

$$v_s = \frac{1}{N} \frac{\xi_s}{C_0} t^{-1/2(n+1)}$$

Перейдем к переменной $\zeta = \xi / \xi_0$ и запишем систему (0.7) при $m = 0$ в виде

$$u' = \frac{\zeta^N F}{\zeta^{2N} F^2 - \varkappa\theta} \left[ N_1 \frac{u^2}{\zeta} + \frac{\varkappa(\alpha - N_1)}{\zeta^{N+1}} \frac{\theta u}{F} - \frac{Kh'^2}{\zeta^{N-1}\theta^n \chi F} - 2B \frac{hh'}{\chi} \right]$$
$$\chi' = -\frac{\chi}{\zeta^N F} \left[ u' + (\alpha + N_1) \frac{u}{\zeta} \right]$$
$$\theta' = \frac{\theta}{\zeta^{N+1} F} \{ [2N_1 - (\varkappa - 1)(\alpha - N_1)] u - (\varkappa - 1) \zeta u' \} + \frac{Kh'^2}{\zeta^{N-1}\theta^n \chi F} \tag{2.1}$$
$$h'' = A\theta^n \left\{ \left[ -\beta_1 \zeta^{N_1} + \frac{u}{\zeta} + \frac{n}{A} \frac{\theta'}{\theta^{n+1}} - \frac{\alpha + 2nN_1}{A} \frac{1}{\zeta\theta^n} \right] h' + \left( \frac{u'}{\zeta} + \frac{\alpha - N_1}{\zeta^2} u \right) h \right\}$$
$$F = -\beta_1 + \zeta^{-N} u, \quad \beta_1 = \frac{\xi_0^N}{N}$$

Граничные условия следуют из соотношений на ударной волне (0.3)

$$u = \frac{2}{\varkappa + 1} \beta_1 \left( 1 - \frac{\varkappa}{\beta_1} \right), \quad \chi = \left[ \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} + \frac{2\varkappa}{\beta_1^2 (\varkappa + 1)} \right]^{-1}$$
$$\theta = \beta_1^2 \left( 2 - \frac{\varkappa + 1}{\beta_1^2} \right) \frac{\varkappa - 1 + 2\varkappa / \beta_1^2}{(\varkappa + 1)^2}, \quad h = 1 \quad \text{при} \quad \zeta = 1 \tag{2.2}$$

и условия на поршне $u_s = \beta_1 \zeta_s^N$, $h' = 0$ при $\zeta = \zeta_s$. Последнее условие в (2.2) $h'(\zeta_s) = 0$ означает отсутствие диффузии магнитного поля в движущийся бесконечно проводящий поршень. Заменой переменных

$$u = \beta \zeta^N w(\zeta), \qquad \chi = \chi(\zeta), \qquad \theta = \beta^2 \zeta^{2N} z(\zeta) \tag{2.3}$$

уравнения (2.1) приведем к виду

$$\frac{d\zeta}{dw} = \zeta \frac{F_1^2 - \varkappa z}{Nw(\varkappa z - F_1^2) + N_1 w^2 F_1 - \Phi + \varkappa(\alpha - N_1) wz\Phi} = \varphi$$
$$\Phi = K_1 \zeta^{-(2n+3)N} \frac{y^2}{\chi z^n} + \frac{2B_1 Fhy}{\zeta^{2N}\chi}$$
$$\frac{d\chi}{dw} = -\frac{\chi}{F_1} [1 + (N + N_1 + \alpha) w\varphi], \qquad \frac{dh}{dw} = y\varphi$$
$$\frac{dz}{dw} = z \left\{ \frac{1 - \varkappa}{F_1} + \left[ -2N + \frac{2N_1 - (\varkappa - 1)(1 + \alpha)}{F_1} w + \frac{K_1 y^2}{\zeta^{(2n+3)N} \chi F_1 Z^{n+1}} \right] \varphi \right\} \tag{2.4}$$

$$\frac{dy}{dw}=\left\{\left[1+A_1\zeta^{2(n+1)}z^nF_1+n\left(2N-\frac{1}{z\varphi}\frac{dz}{dw}\right)-\alpha-2nN_1\right]y+\right.$$
$$\left.+A_1\zeta^{2(n+1)}z^n\left[(1+\alpha)w+\frac{1}{\varphi}\right]h\right\}\varphi$$

$$F_1=1-w,\ K_1=\beta_1^{-(2nN+3)}K,\ B_1=\beta_1^{-2}B,\ A_1=\beta_1^{2n+1}A$$

Граничные условие примут вид

$$\zeta=1,\quad \chi=\left[\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{2\varkappa}{\beta_1^2(\varkappa+1)}\right]^{-1},\quad z=\left[\frac{2}{\varkappa+1}-\frac{\varkappa-1}{\beta_1^2(\varkappa+1)}\right]\left[\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{2\varkappa}{\beta_1^2(\varkappa+1)}\right]$$
$$h=1\ \text{ при }\ w=\frac{2}{\varkappa+1}\left(1-\frac{\varkappa}{\beta_1^2}\right),\quad y=0\ \text{ при }\ w=1 \tag{2.5}$$

Условия на поршне $w = 1$ определяют величину

$$\xi_0=\frac{\xi_s}{\zeta_s} \tag{2.6}$$

Точка $w = 1$ (поверхность поршня) является особой. Будем искать асимптотические разложения функций $\chi$ и $z$ вблизи $w = 1$ в виде

$$\chi = C_1F_1^{\nu}(w),\ z = C_2F_1^{\mu}(w)$$

Тогда из системы (2.4), имея в виду, что при $w = 1$ $y \to 0$, найдем

$$\nu=\frac{N_1+\alpha}{N},\quad \mu=-\frac{(\varkappa-1)(N_1-\alpha)+2N_1}{N}$$

Коэффициенты разложения $C_1$ и $C_2$ определяются из условия сшивки численного решения с асимптотическим.

Система (2.4) с граничными условиями (2.5) может быть решена численным методом. Поскольку в граничные условия (2.5) явно входит величина $\beta_1 = \xi_0^N / N$, то значение параметра $\xi_0$ следует считать заданным, тогда постоянная $\xi_s$ определится из (2.6).

Выясним смысл безразмерных параметров $A$ и $B$, входящих в систему (2.1) (или $A_1$, $B_1$ в (2.4) ). Для этого положим, что

$$R_m=4\pi\sigma_2v_2r_1,\qquad D_1=\frac{H_0^2}{8\pi P_2} \tag{2.7}$$

Здесь $R_m$ — магнитное число Рейнольдса, $\sigma_2$, $v_2$ и $D_1$ — значения проводимости, скорости и отношения магнитного давления к статическому давлению газа на ударной волне, а $r_1$ — расстояние от поверхности поршня до фронта ударной волны. Тогда с учетом соотношений (0.5) при $\xi = \xi_0$, $r = r_1$ из (2.7) получим $R_m = A\theta^n(\xi_0)\ u\ (\xi_0)$, $D_1 = B / \chi(\xi_0)\ \theta(\xi_0)$, при этом величины $u(\xi_0)$, $\chi(\xi_0)$ и $\theta(\xi_0)$ определяются первыми тремя равенствами из (2.2).

Численные расчеты проведены на ЭВМ М-20 для случая сильной ударной волны. Граничные условия при этом имеют вид

$$\zeta=1,\quad \chi=\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1},\quad z=\frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}$$
$$h=1\ \text{при}\ w=\frac{2}{\varkappa+1},\qquad y=0\ \text{при}\ w=1$$

Последние уже не зависят от $\xi_0$, и поэтому для решения задачи можно вначале задать величину $\xi_s$ (положение поршня), а затем определить параметр $\xi_0$ (положение ударной волны) из (2.6).

На фигуре приведены зависимости $\theta_1(\zeta) / \theta_1(1)$ и $\chi_1(\zeta) / \chi_1(1)$ от $\zeta$ для случая движения газа в магнитном поле (сплошные линии) и в случае, когда магнитного поля нет (пунктир) при $\alpha = 0$, $\varkappa = 5/3$, $n = 3/2$, $\xi_s = 1$, $B_1 = 1$ ($D_1 = 0.44$), $A_1 = 5(R_m = 0.3)$ и $A_1 = 16.6(R_m \approx 1)$. Здесь имеется в виду, что для сильной ударной волны

$$R_m=\frac{2^{n+1}(\varkappa-1)^n}{(\varkappa+1)^{2n+1}}A_1,\quad D_1=\frac{\varkappa^2-1}{4}B_1$$

Отметим, что наличие магнитного поля приводит к торможению ударной волны и уменьшению скорости движения газа по сравнению с движением без магнитного поля.