

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ РАЗЛЕТ ПРОДУКТОВ ИСПАРЕНИЯ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИЯ

А. Т. Сапожников

(Челябинск)

Рассмотрена система автомодельных уравнений движения продуктов испарения (идеальный газ) под действием переменного энергосвыделения. Сформулированы условия существования и единственности решения задачи об испарении и разлете вещества в вакуум.

1. При решении задачи об испарении и разлете вещества в вакуум при постепенном выделении энергии обычно предполагается, что испарение происходит в слое пренебрежимо малой толщины, продукты испарения можно считать идеальным газом, изменением плотности и скорости неиспаренного вещества можно пренебречь. Таким образом, движение конденсированного вещества не рассматривается, и задача сводится к рассмотрению движения слоя идеального газа переменной массы, ограниченного поверхностью испарения с одной стороны и свободной поверхностью с другой. Такая схематизация явления принята, например, в [1-3].

При постановке задачи в указанном приближении существенным моментом является формулировка условий испарения. Эти условия связывают параметры испаренного и неиспаренного вещества по обе стороны поверхности испарения и определяют закон ее движения. Так как движение неиспаренного вещества и структура слоя, где происходит испарение, не рассматриваются, то заранее условия испарения не известны и формулируются из каких-либо физических соображений о процессе в целом. Эти условия должны обеспечивать существование и единственность решения задачи.

В данной работе на конкретном примере автомодельного движения рассмотрены существование и единственность решения задачи о разлете в вакуум продуктов поверхностного испарения твердой стенки.

2. В начальный момент времени $t = 0$ конденсированное вещество занимает полупространство $x \geq 0$ и характеризуется плотностью ρ_0 , давлением p_0 и нулевой скоростью.

В точке $x = 0$ вещество граничит с вакуумом. При $t > 0$ в веществе выделяется энергия со скоростью

$$\partial E / \partial t = Q = C m^{-\alpha} t^{\alpha-1} \quad (2.1)$$

$$\left(m = \int_0^x \rho dx \right)$$

где E — удельная внутренняя энергия, m — массовая лагранжева координата, C и α — постоянные величины, причем $C > 0$ и

$$0 < \alpha < 1 \quad (2.2)$$

Условие (2.2) означает, что в конечной массе от 0 до x за конечное время от 0 до t выделяется конечная энергия. Кроме того, при $0 < \alpha < 1$ скорость энергосвыделения уменьшается с ростом m и t .

Движение паров под действием энергосвыделения (2.1) описывается системой уравнений газодинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial m}, & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial m} \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -p \frac{\partial V}{\partial t} + Q, & E &= \frac{pV}{\gamma-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где u — скорость, V — удельный объем, γ — показатель адиабаты Пуассона. Краевое условие на свободной поверхности — $p = 0$ при $m = 0$. Предполагается, что условия испарения не добавляют параметров с независимыми размерностями к уже имеющимся определяющим параметрам задачи: $\rho_0, p_0, C, \alpha, \gamma$.

Движение с определяющими параметрами автомодельно, с показателем автомодельности, равным единице. Ограничимся условиями испарения, при которых поверхность испарения, являющаяся плоскостью, движется в глубь вещества с постоянной скоростью.

3. Введем безразмерные переменные

$$\lambda = \frac{m}{u_0 \rho_0 t}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad P = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \quad v = V \rho_0 \quad (3.1)$$

$$(u_0 = (C / \rho_0^\alpha)^{1/(2+\alpha)})$$

Система (2.3), записанная в переменных (3.1), принимает вид

$$\begin{aligned} v' &= q \lambda^{-(1+\alpha)} \Delta^{-1}, & P' &= -q \lambda^{1-\alpha} \Delta^{-1}, & U' &= -q \lambda^{-\alpha} \Delta^{-1} \\ \Delta &= \lambda^2 v - \gamma P & (q &= (\gamma-1) \rho_0^{(4+\alpha^2)/(2+\alpha)} C^{4/(2+\alpha)}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Первые два уравнения системы (3.2) можно рассматривать независимо от третьего. При известных $v(\lambda)$ и $P(\lambda)$ скорость можно найти квадратурой с аддитивной постоянной. Система (3.2) частично исследована в [3].

Введем новые переменные s, l, z по формулам

$$s = \lambda^2, \quad l = \gamma P / s v, \quad z = (\lambda^{2+\alpha} v^2)^{-1} \quad (3.3)$$

В новых переменных первые два уравнения системы (3.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \frac{z [2qz - (2+\alpha)(l-1)]}{2s(l-1)} \\ \frac{dl}{ds} &= \frac{qz(l+\gamma) - 2l(l-1)}{2s(l-1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приравняв нулю числители правых частей уравнений (3.4), получим два частных решения

$$\begin{aligned} l &\equiv 0, \quad z \equiv 0 \\ l &= l_1 = \gamma \frac{2+\alpha}{2-\alpha}, \quad z = z_1 = \frac{2+\alpha}{2q} (l_1 - 1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Первое решение соответствует $\rho \equiv 0$ и не представляет интереса. Второе решение вместе с уравнением для скорости приводит к

$$v = z_1^{-1/2} \lambda^{(2+\alpha)/2}, \quad P = \frac{2+\alpha}{2-\alpha} \lambda^{(2-\alpha)/2} z_1^{-1/2}, \quad U = -\frac{2+\alpha}{\alpha} \lambda^{-\alpha/2} + U_0 \quad (3.6)$$

Здесь U_0 — произвольная константа. Частное решение (3.6) указано в [3]. Поделив первое уравнение (3.4) на второе, получим

$$\frac{dz}{dl} = \frac{z [2qz - (2+\alpha)(l-1)]}{qz(l+\gamma) - 2l(l-1)} \quad (3.7)$$

Таким образом, задача интегрирования системы (3.2) свелась к интегрированию (3.7), так как при известной зависимости $z(l)$ решение остальных уравнений сводится к квадратурам.

Для анализа существования и единственности решения задачи о разлете паров в вакуум рассмотрим поле интегральных кривых уравнения (3.7). Интегральные кривые схематически показаны на фиг. 1. Стрелки указывают направление роста переменной s .

В особую точку A (седло) с координатами $l = l_1$, $z = z_1$ входят две интегральные кривые.

Из второго уравнения (3.4) следует, что в окрестности точки A для s справедливо соотношение

$$l = \psi |s|^y + l_1$$

где ψ — произвольная константа. Отметим, что $y > 0$ вдоль интегральной кривой I (фиг. 1) при всех допустимых значениях α , q и γ . Вдоль этой интегральной кривой $s = \lambda^2 \rightarrow 0$ при $l \rightarrow l_1$. Вдоль второй интегральной кривой в точке A $y < 0$, поэтому $s \rightarrow \pm \infty$ при $l \rightarrow l_1$. Из (3.3) следует, что в окрестности точки A

$$P = \frac{l_1}{\gamma \sqrt{z_1}} s^{(2-\alpha)/4}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{z_1}} s^{-(2+\alpha)/4} \quad (3.8)$$

Из формул (3.8) видно, что $P \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$ при подходе к точке A по первой кривой, т. е. точка A в этом случае соответствует границе с вакуумом.

Особая точка $l = 0$, $z = 0$ является узлом. Как показывает анализ системы (3.4), переменная $s \rightarrow +\infty$ при подходе по обоим направлениям к точке O . С приближением к особой точке $l = 1$, $z = 0$ переменная $s \rightarrow \text{const} \neq 0$.

Бесконечно удаленная точка $l = \infty$, $z = \infty$ также является особой. Интегральные кривые входят в нее по направлению $dz/dl = \alpha/q$. При этом переменная $s \rightarrow 0$ по закону $s = Hl^{-2/(2-\alpha)}$, где H — произвольная константа. Для плотности, давления и скорости в окрестности точки $l = \infty$, $z = \infty$ справедливы формулы

$$P \rightarrow P_1 = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{q}{\alpha H}}, \quad \rho = \rho_0 \sqrt{\frac{\alpha}{q} H} s^{\alpha/2} \rightarrow 0, \\ U = \frac{q}{\gamma(1-\alpha)P_1} s^{(1-\alpha)/2} + U_0$$

где U_0 — произвольная константа. Таким образом, точка $l = \infty$, $z = \infty$ соответствует границе с поршнем постоянного ненулевого давления.

В окрестности любой неособой точки (l_0, z_0)

$$\frac{dl}{ds} = \frac{qz \cdot (l_0 + \gamma) - 2l_0(l_0 - 1)}{2(l_0 - 1)s} = \frac{\Phi}{s} \neq 0$$

откуда

$$s = Ne^{l/\Phi}$$

Здесь N — ненулевая произвольная константа, т. е. в неособых точках уравнения (3.7) $s \neq 0$. Итак, точка A является единственной точкой, которая соответствует границе с вакуумом, поэтому краевое условие для уравнения (3.7), соответствующее границе с вакуумом, это $z = z_1$ при $l = l_1$ вдоль кривой I (фиг. 1).

4. Поскольку течение паров может быть разрывным (с ударной волной), то для построения разрывных автомодельных решений рассмотрим

связь между l и z по обе стороны разрыва. Из соотношений Гюгонио

$$\begin{aligned} V_+ - V_- &= -W^{-1}(u_+ - u_-), \quad u_+ - u_- = W^{-1}(p_+ - p_-) \\ E_+ - E_- &= 1/2(p_+ + p_-)(V_- - V_+) \end{aligned}$$

следует связь между $(l, z)_-$ и $(l, z)_+$ в виде

$$z_+ = z_- \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2l_-} \right)^2, \quad l_+ = \frac{2\gamma - (\gamma - 1)l_-}{\gamma - 1 + 2l_-} \quad (4.1)$$

Здесь W — скорость ударной волны, индекс минус относится к состоянию перед фронтом, плюс — за фронтом. Из формул (4.1) следует, что точки прямой $l = 1$ переходят в себя, т. е. $l = 1$ соответствует слабому разрыву. Это следует и из формулы для l (3.3), которую можно переписать в виде $l = (cp/\lambda)^2$, поскольку скорость звука $c = \sqrt{\gamma p V}$ в идеальном газе.

Точки с $l_- < 1$ переходят в точки с $l_+ > 1$, при этом $z_+ > z_-$, а значит и $p_+ > p_-$, что соответствует ударной волне сжатия. Точки с $l_- > 1$ переходят в точки с $l_+ < 1$, при этом $z_+ < z_-$, что соответствует ударной волне разрежения. Ударные волны разрежения в идеальном газе механически неустойчивы, поэтому точки с

$l > 1$ не могут соответствовать состояниям перед фронтом скачка. Возможные ударные переходы показаны на фиг. 2. Область возможных состояний перед фронтом заштрихована горизонтально, за фронтом — вертикально. Линия $l = 0$ переходит в линию $l = 2\gamma/(\gamma - 1)$.

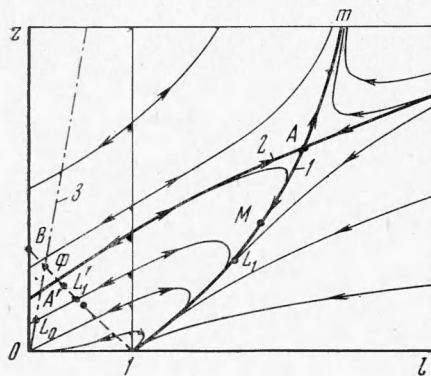
Пунктирная линия IB на фиг. 1 есть геометрическое место состояний перед фронтом скачка, которые переходят в точки кривой I .

5. Приведенных сведений об интегральных кривых уравнений (3.4) и (3.7), а также о свойствах автомодельных ударных волн достаточно, чтобы перейти к рассмотрению существования и единственности решения задачи о разлете паров в вакуум. Решение уравнения (3.7), которое удовлетворяет условию $z = z_1$ при $l = l_1$ вдоль кривой I , существует и единственно, если краевое условие в плоскости испарения в переменных l, z изображается:

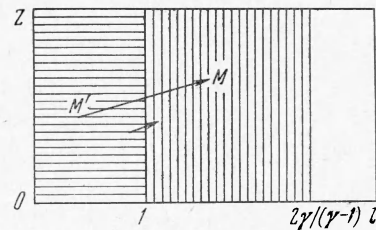
- 1) точкой, принадлежащей кривой I ;
- 2) линией, имеющей одну точку пересечения с кривой I , но не имеющей общих точек с треугольником $10B$;
- 3) точкой, принадлежащей треугольнику $10B$.

В остальных случаях решения нет или оно не единственно.

Действительно, в первом случае решение непрерывно и состоит из куска сепаратрисы MA , где M — точка, соответствующая поверхности испарения. Если эта точка совпадает с A , то задача решается с помощью частного решения (3.6).



Фиг. 1



Фиг. 2

Второй случай сводится к первому, но начальные значения l и z не заданы заранее, а определяются пересечением сепаратрисы I и линии, соответствующей краевому условию.

В третьем случае решение разрывно и состоит из куска интегральной кривой L_0L_1' и куска кривой L_1A , где L_0 — точка, соответствующая поверхности испарения, L_1' — точка пересечения интегральной кривой и линии $1B$, L_1 — точка, в которую переходит точка L_1' на ударной волне (фиг. 1).

Рассмотрим случай нарушения условий существования и единственности решения уравнения (3.7). Если точка, соответствующая поверхности испарения, не принадлежит треугольнику $1OB$ и не лежит на сепаратрисе I , то из фиг. 1 видно, что нет интегральной кривой (непрерывной или разрывной), которая соединяла бы эту точку с точкой A с сохранением монотонности изменения переменной s . (Решение, в котором переменная $s = \lambda^2$ меняется немонотонно, не имеет физического смысла.) Если краевому условию на поверхности испарения соответствует линия, принадлежащая треугольнику $1OB$, то существует бесконечное множество разрывных решений, начинающихся в точках этой линии. Решения строятся так же, как в третьем случае.

При известных значениях l и z на поверхности испарения для построения единственного решения уравнений (3.4) необходимо и достаточно задать скорость поверхности испарения D . Это следует из (3.4). Для нахождения зависимости $U(\lambda)$ необходимо и достаточно задать скорость паров u_1 на поверхности испарения. Это следует из третьего уравнения системы (3.2).

Из структуры решения уравнения (3.7) следует, что возможны два качественно различных режима автомодельного разлета паров:

- 1) непрерывное течение;
- 2) течение с ударной волной.

Решение задачи о разлете паров в вакуум существует и единственно, если из условий испарения могут быть определены скорость поверхности испарения и скорость паров на ней, а также давление и плотность или их связь.

В [3] при энерговыделении вида (2.1) сформулированы следующие условия испарения. Закон движения поверхности испарения задается уравнением

$$\int_0^t Q(m_1, t) dt = c_v(T_1 - T_0) + \theta = \beta \quad (5.1)$$

из которого следует, что скорость поверхности $D = (\alpha\beta)^{-1/\alpha} C^{1/\alpha}$.

Здесь m_1 координата поверхности испарения, T_0 и C_v — начальная температура и теплоемкость конденсированного вещества, T_1 и θ — температура и удельная теплота испарения. Согласно уравнению (5.1) поверхность испарения в момент времени t находится в точке, где температура за счет энерговыделения поднялась от начальной до температуры испарения и выделилась энергия, равная теплоте испарения. Остальные условия испарения имеют вид

$$(u_1 - D)\rho_1 = -D\rho_0, \quad p_1 = RT_1\rho_1 \quad (5.2)$$

где ρ_1 , p_1 и u_1 — плотность, давление и скорость паров, R — универсальная газовая постоянная. В переменных l , z эти условия дают прямую

$$z = l(\tau\lambda_1^\alpha)^{-1} \quad (\tau = RT_1/u_0^2, \quad \lambda_1 = D/u_0) \quad (5.3)$$

Прямая (5.3) проходит через начало координат, поэтому уравнение (3.7) имеет бесконечное число разрывных решений, которые начинаются в точках интервала 0Φ прямой (5.3) (фиг. 1). Уравнения (3.4) и (3.2) в этом случае тоже имеют бесконечное число решений, поэтому условия испарения (5.1), (5.2) следует признать неудачными.

Рассмотренный пример автомодельного неадиабатического движения показывает, что физическая непротиворечивость условий испарения еще не обеспечивает существования и единственности решения задачи. Исследование условий испарения с этой точки зрения является обязательным.

Автор благодарен В. Ф. Куропатенко и В. Е. Неуважаеву за помощь и интерес к работе.

Поступила 25 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев Ю. В., Крохин О. Н. Испарение вещества под действием излучения лазера. ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 4.
2. Виленская Г. Г., Немчинов И. В. Численный расчет движения и нагрева излучением ОКГ плазмы, образовавшейся при вспышке поглощения в парах твердого тела. ПМТФ, 1969, № 6.
3. Балакин В. Б. Разлет слоя переменной массы при постепенном выделении энергии. Инж.- физ. ж., 1968, т. 14, № 6.