УДК 532.59+517.95

СИММЕТРИИ И РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ

О. В. Капцов, Д. О. Капцов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия
E-mails: kaptsov@icm.krasn.ru, hot.dok@gmail.com

Вычислена группа точечных преобразований, допускаемая трехмерным уравнением Кадомцева — Петвиашвили. Приводится пример инвариантного решения. Найдены точные решения исследуемого уравнения в виде двойных волн. Полученные решения выражаются через элементарные функции и описывают взаимодействие пары солитонов. Также построены гладкие ограниченные рациональные решения.

Ключевые слова: уравнение Кадомцева — Петвиашвили, двойные волны, солитоны.

DOI: 10.15372/PMTF20210414

Введение. Двумерное уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП)

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \delta u_{yy} = 0, \qquad \delta = \pm 1$$

рассматривалось во многих работах [1–5]. Для этого уравнения найдены солитонные, рациональные, периодические и условно периодические решения. Поведение решений существенно зависит от знака коэффициента δ. При $\delta = 1$ уравнение имеет отрицательную дисперсию и описывает некоторые типы длинных волн на мелкой воде.

Трехмерный аналог уравнения КП (3dКП)

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \delta(u_{yy} + u_{zz}) = 0, \qquad \delta = \pm 1 \tag{1}$$

используется в физике плазмы [6, 7] и механике газожидкостных сред [8]. Для этого уравнения были найдены односолитонные и периодические решения [9, 10].

Допускаемая точечная группа преобразований уравнения КП вычислена в [11]. Эта группа сходна с группой симметрий уравнения Хохлова — Заболоцкой [12], но не совпадает с ней.

В данной работе определяется группа точечных симметрий уравнений 3dКП [13], зависящих от трех произвольных функций времени, приводится пример инвариантного решения, описывающего односолитонное решение. Затем строятся двухсолитонные и рациональные решения, принадлежащие классу двойных бегущих волн. При построении используются преобразование Хироты [14] и метод неопределенных коэффициентов. Ранее такой подход применялся для нахождения решений системы Буссинеска [15].

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Министерством образования и науки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение № 075-02-2021-1384).

1. Симметрии и некоторые инвариантные решения. Допускаемая алгебра точных симметрий двумерного уравнения КП найдена в [6]. Насколько известно авторам данной работы, симметрии уравнения 3dКП (1) ранее не вычислялись. Поэтому ниже приводится алгебра Ли допускаемых операторов уравнения 3dКП:

$$Y_1 = -\frac{\delta y}{2} F_t \frac{\partial}{\partial x} + F \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\delta y}{12} F_{tt} \frac{\partial}{\partial u}, \qquad Y_2 = -\frac{\delta z}{2} G_t \frac{\partial}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\delta z}{12} G_{tt} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_3 = H \frac{\partial}{\partial x} + \frac{H_t}{6} \frac{\partial}{\partial u}, \qquad Y_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_5 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y_6 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} - 3t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Здесь F, G, H — произвольные гладкие функции t. Оператор Y_3 соответствует обобщенному преобразованию Галилея вдоль оси x:

$$\tilde{x} = x + aH, \qquad \tilde{u} = u + aH_t/6$$

(a — параметр группы). Операторы Y_4, Y_5, Y_6 порождают преобразование переноса по t, вращения и растяжения соответственно. Оператор Y_1 задает преобразование

$$\tilde{y} = y + aF, \qquad \tilde{x} = x - (ay + a^2F/2)F_t, \qquad \tilde{u} = u - (ay + a^2F/2)F_{tt}/12.$$

Аналогичные преобразования задаются оператором Y_2.

Кроме того, имеют место три дискретные симметрии:

$$S_1 = \{\tilde{t} = -t,\ \tilde{x} = -x\}, \qquad S_2 = \{\tilde{y} = -y\}, \qquad S_3 = \{\tilde{z} = -z\}.$$

Рассмотрим подалгебру, порожденную тремя операторами переноса:

$$w \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} - n \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} - r \frac{\partial}{\partial t}, \qquad n, r \in \mathbb{R}.$$

Решения, инвариантные относительно группы преобразований, соответствующей этой подалгебре, имеют вид бегущей волны:

$$u = f(x + ny + rz - wt).$$

Обозначая $x + ny + rz - wt$ через φ и подставляя f в уравнение 3dКП, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$f^{\mathrm{IV}} + (\delta n^2 + \delta r^2 - w)f'' + 3(f^2)'' = 0.$$

Интегрируя его два раза и отбрасывая константы интегрирования, находим уравнение второго порядка

$$f'' + 3f^2 + (\delta n^2 + \delta r^2 - w)f = 0. \tag{2}$$

В общем случае решения последнего уравнения выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Частными решениями уравнения (2) являются функция

$$f = 2b^2/\operatorname{ch}^2(b\varphi),$$

где $b^2 = (w - \delta(n^2 + r^2))/4$, и функция

$$f = -2/\varphi^2$$

при выполнении соотношения $w = \delta(n^2 + r^2)$. Заметим, что данные решения получаются из решений уравнения Кортевега — де Фриза в результате действия допускаемой группы.

Используя другие трехмерные подалгебры алгебры симметрий, можно свести уравнение 3dКП к другим обыкновенным дифференциальным уравнениям. Однако поиск решений таких уравнений часто существенно затруднен.

2. Двойные волны и рациональные решения. Для построения решений 3dКП будем использовать преобразование Хироты

$$u = 2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \tau, \tag{3}$$

где τ — новая функция t, x, y, z. Подставляя (3) в уравнение 3dКП и дважды интегрируя его по x, получаем следующее билинейное уравнение:

$$\tau\tau_{tx} - \tau_t\tau_x + \tau\tau_{xxxx} - 4\tau_x\tau_{xxx} + 3\tau_{xx}^2 + \delta(\tau\tau_{yy} - \tau_y^2 + \tau\tau_{zz} - \tau_z^2) = 0. \tag{4}$$

При $\tau_z = 0$ получается известное билинейное уравнение, соответствующее двумерному уравнению КП.

Будем искать двойные бегущие волны уравнения (4), т. е. решения вида

$$\tau = g(\varphi_1, \varphi_2),$$

где $\varphi_i = k_i + n_i y + r_i t + w_i t$ $(i = 1, 2)$; $k_i, n_i, r_i, w_i \in \mathbb{R}$. Предположим, что функция τ является многочленом второго порядка от экспонент:

$$\tau = 1 + s_1 f_1 + s_2 f_2 + s_{20} f_1^2 + s_{12} f_1 f_2 + s_{02} f_2^2, \tag{5}$$

где $s_1, s_2, s_{20}, s_{12}, s_{02} \in \mathbb{R}$; $f_i = \mathrm{e}^{\varphi_i}$. Подставляя (5) в (4), получаем многочлены относительно f_1, f_2. Приравнивая к нулю коэффициенты этого многочлена, находим нелинейную алгебраическую систему относительно k_i, n_i, r_i, w_i, s_1, s_2, s_{20}, s_{12}, s_{20}. Для построения решений этой системы целесообразно использовать системы компьютерной алгебры типа Maple или REDUCE.

Приведем одно из решений нелинейной алгебраической системы:

$$\begin{gathered} s_{12} = s_1 s_2\,\frac{3(k_1^2k_2 - k_1k_2^2)^2 - \delta(k_1n_2 - k_2n_1)^2 - \delta(k_1r_2 - r_1k_2)^2}{3(k_1^2k_2 + k_1k_2^2)^2 - \delta(k_1n_2 - k_2n_1)^2 - \delta(k_1r_2 - r_1k_2)^2}, \\ w_i = \frac{-k_i^4 + \delta(n_i^2 + r_i^2)}{k_i}. \end{gathered} \tag{6}$$

Если s_1, s_2, s_{12} — положительные числа, то функция τ определяет двухсолитонное решение уравнения 3dКП.

Пусть при $\delta = 1$ выполняется соотношение

$$3(k_1^2k_2 - k_2^2k_1)^2 = (k_1n_2 - k_2n_1)^2 + (k_1r_2 - r_1k_2)^2.$$

Тогда в формуле (6) $s_{12} = 0$. В этом случае (при $s_1 > 0$, $s_2 > 0$) получаем резонансное решение уравнения 3dКП. Для двумерного уравнения КП такие решения найдены в [2]. На рис. 1 представлено решение (6) при $z = -1$, $t = 0$.

При $\delta = -1$ можно построить гладкие ограниченные решения уравнения 3dКП с комплексными параметрами k_i, n_i. Например, если $k_1 = 1+i$, $k_2 = \bar{k}_1$, $n_1 = -1+4i$, $n_2 = \bar{n}_1$, $s_1 = s_2 = r_1 = r_2 = 1$, то решение уравнения 3dКП является гладким и ограниченным. Это решение локализовано вблизи плоскости $x - y + z - 3t = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^4$. На рис. 2 представлено данное решение при $z = -1$, $t = 0$.

Билинейное уравнение (4) имеет решение в виде тройных бегущих волн:

$$\tau = 1 + s_1f_1 + s_2f_2 + s_3f_3 + s_{12}f_1f_2 + s_{13}f_1f_3 + s_{13}f_1f_3 + s_{23}f_2f_3 + s_{123}f_1f_2f_3. \tag{7}$$

Здесь $s_1, s_2, s_3, s_{12}, s_{13}, s_{23}, s_{123} \in \mathbb{R}$; $f_i = \mathrm{e}^{k_ix + n_iy + r_iz + w_it}$. При этом должны выполняться равенства

$$w_i = \frac{-k_i^4 \pm n_i^2 \pm r_i^2}{k_i}, \qquad s_{123} = s_{12}s_{13}s_{23}, \qquad \begin{vmatrix} k_1 & n_1 & r_1 \\ k_2 & n_2 & r_2 \\ k_3 & n_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

и соотношения, аналогичные соотношению (6) для s_{12}, s_{13}, s_{23}.

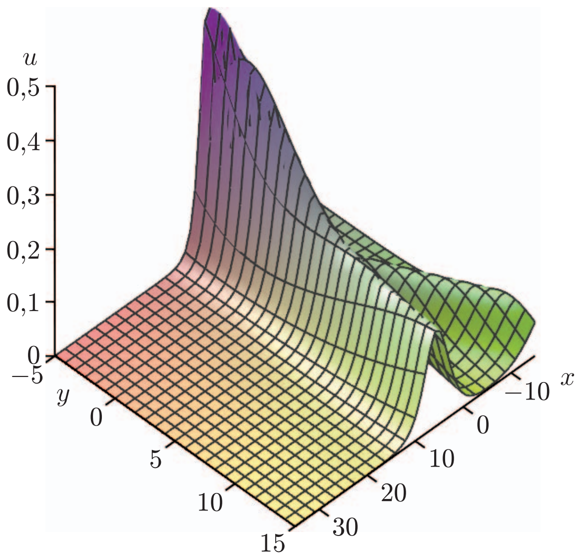

Рис. 1

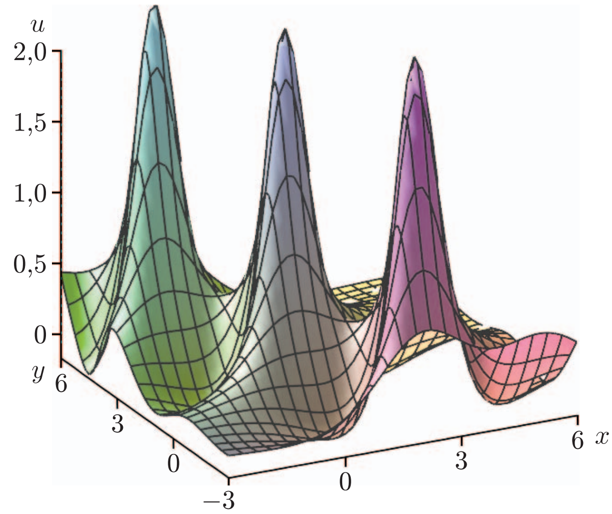

Рис. 2

Рис. 1. Решение уравнения 3dКП, соответствующее формуле (6)

Рис. 2. Решение уравнения (1) с комплексными параметрами

Построим рациональные решения уравнения 3dКП в виде двойных волн. Для этого будем искать решения билинейного уравнения (4) в виде многочлена второго порядка

$$\tau = s_0 + s_1\varphi_1 + s_2\varphi_2 + s_{20}\varphi_1^2 + s_{12}\varphi_1\varphi_2 + s_{02}\varphi_2^2,$$

где $\varphi = k_i x + n_i y + r_i z + w_i t$. Подставляя τ в (4), получаем многочлен относительно t, x, y, z. Приравнивая его коэффициенты к нулю, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений. Эта система имеет много решений, в данной работе приводятся лишь некоторые из них, имеющие наиболее компактный вид.

Одно из полиномиальных решений уравнения (4) записывается в виде

$$\tau = 1 + (k_1 x - (3k_1^4 - n_1^2)t/k_1 + n_1 y)^2 + 3k_1^4 z^2.$$

Заметим, что вдоль прямых, являющихся пересечением плоскостей $k_1 x + n_1 y = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$ (в пространстве $\mathbb{R}^3(x,y,z)$), решение соответствующего 3dКП не стремится к нулю при $|x| \to \infty$, $|y| \to \infty$, но является ограниченным. Подобные решения имеют большее сходство с солитонами, чем с так называемыми лампами.

Следующее решение уравнения (4) имеет вид

$$\tau = 1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2, \tag{8}$$

при этом параметры n_1, w_1, w_2 задаются формулами

$$n_1 = \left(k_1 n_2 \pm \sqrt{3(k_1^2 + k_2^2)^3 - (k_1 r_2 - k_2 r_1)^2}\,\right)/k_2^2, \qquad w_2 = \left(n_2^2 + r_2^2 \mp 3(k_1^2 + k_2^2)\right)/k_2,$$

$$w_1 = \left(3k_1(k_1^2 + k_2^2) - k_1(3n_2^2 + r_2^2) + 2k_2 r_1 r_2 + 2n_1 k_2 n_2\right)/k_2^2.$$

Функция (8) также определяет гладкое ограниченное решение уравнения 3dКП, например при $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $n_2 = 3$, $r_1 = 0{,}5$, $r_2 = 0{,}2$.

Следует отметить, что нелинейное уравнение (4) имеет решения, являющиеся тройными волнами. Вид решений задается формулой (7), где $f_i = k_i x + n_i y + r_i z + w_i t$. Поскольку

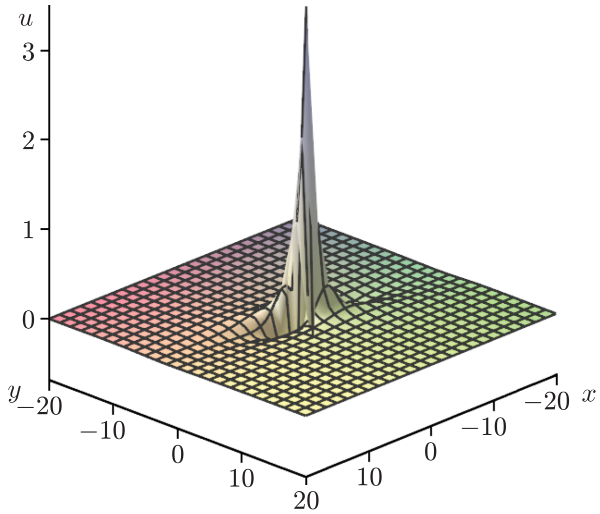

Рис. 3. Функция u при $t = 0$

эти решения очень громоздкие и не являются гладкими при $s_{123} \neq 0$, в данной работе они не рассматриваются.

В заключение приведем еще два решения двумерного уравнения КП при $\delta = -1$. Первое решение имеет вид

$$u = \frac{2(14t^2 + 12tx + 44ty - 2x^2 - 4xy + 6y^2 + 6t - 2x - 2y + 1)}{(25t^2 - 6tx + 10ty + x^2 + 2xy + 5y^2 - 3t + x + y + 1)^2}.$$

Функция u при $t = 0$ представлена на рис. 3. Второе решение является сингулярным и задается формулой

$$u = \frac{32(3t + 1)^2}{(27t^2 + 12tx + 18ty + 6t + 4x + 6y + 6)^2}.$$

Таким образом, в работе представлена часть найденных решений уравнения 3dКП.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Satsuma J.** N-soliton solution of the two-dimensional Korteweg — de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1976. V. 40, iss. 1. P. 286–290.
2. **Miles J.** Resonantly interacting solitary waves // J. Fluid Mech. 1977. V. 79, pt 1. P. 171–179.
3. **Кричевер И. М.** Эллиптические решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили и интегрируемые системы частиц // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 4. С. 45–54.
4. **Абловиц М.** Солитоны и методы обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. М.: Мир, 1987.
5. **Kodama Y.** KP solitons and the grassmannians: Combinatorics and geometry of two-dimensional wave patterns. Singapore: Springer, 2017.
6. **Инфельд Э.** Нелинейные волны, солитоны и хаос / Э. Инфельд, Дж. Роуландс. М.: Физматлит, 2006.
7. **Кузнецов Е. А., Мушер С. Л.** Влияние коллапса звуковых волн на структуру бесстолкновительных ударных волн в замагниченной плазме // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1986. Т. 91, № 5. С. 1605–1619.
8. **Луговцов А. А.** Распространение нелинейных волн в газожидкостной среде. Точные и приближенные аналитические решения волновых уравнений // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 1. С. 54–61.

9. **Junqi H.** An algebraic method exactly solving two high-dimensional nonlinear evolution equations // Chaos, Solitons Fractals. 2005. V. 23. P. 391–398.
10. **Bulut H., Aksan E., Kayhan M., Sulaiman T.** New solitary wave structures to the $(3+1)$ dimensional Kadomtsev — Petviashvili and Schrodinger equation // J. Ocean Engng Sci. 2019. V. 4. P. 373–378.
11. **Schwarz F.** Symmetries of the two-dimensional Korteweg — de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51, N 8. P. 2387–2388.
12. **Симметрии** и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А. М. Виноградова, И. С. Красильщика. М.: Факториал, 1997.
13. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
14. **Hirota R.** The direct method in soliton theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
15. **Kaptsov O., Kaptsov D.** Exact solution of Boussinesq equations for propagation of nonlinear waves // Europ. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. P. 723–733.

Поступила в редакцию 29/IV 2021 г.,
после доработки — 29/IV 2021 г.
Принята к публикации 31/V 2021 г.