

6. Бронштейн И. М., Фрайман Б. С. Вторичная электронная эмиссия. М.: Наука, 1969.
7. Грановский В. Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток. М.: Наука, 1971.
8. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
9. Баритко Э. В., Кагайн В. Э. и др. О быстродействии ФЭУ с логарифмической градуировочной характеристикой, работающих в режиме пространственного заряда.— В кн.: Фотометрия и ее метрологическое обеспечение. 3-я Всесоюз. науч.-техн. конф. Тез. докл. М., 1979.

Поступила 27/IX 1983 г.

УДК 621.928.8

## ИНДУКЦИОННОЕ УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. Коровин

(Москва)

В связи с проблемой МГД-сепарации во многих работах (см., например, библиографию в [1]) исследовались особенности движения частицы в электропроводной жидкости при наличии постоянных скрещенных электрического и магнитного полей. Практический интерес представляет также сепарация электропроводных частиц, содержащихся в диэлектрической жидкости, осуществляемая с помощью переменного магнитного поля [2]. В данной работе найдена пондеромоторная сила, действующая на сферическую проводящую частицу вблизи прямолинейного проводника, по которому протекает ток разряда батареи конденсаторов, и изучено движение частицы в вязкой жидкости под действием этой силы.

Вычислим иондеромоторную силу, действующую на проводящий шар радиуса  $a$ , находящийся на расстоянии  $l \gg a$  от оси прямолинейного цилиндрического проводника, по которому в момент времени  $t > 0$  начинает протекать разрядный ток  $Ie^{-\alpha t} \sin \omega t$  предварительно заряженной до разности потенциалов  $V$  конденсаторной батареи емкости  $C$ , включенной в цепь последовательно с индуктивностью  $L$ . Предполагается, что омическое сопротивление цепи разряда  $R \ll \sqrt{2L/C}$ , вследствие чего  $\alpha \ll \omega$ .

Введем связанную с центром шара декартову систему координат  $Oxyz$ , у которой ось  $Oy$  антипараллельна направлению тока в течение первого полупериода, а ось  $Oz$  направлена по касательной к окружности, образующейся при пересечении соосной проводнику цилиндрической поверхности, проходящей через точку  $O$ , и плоскости, перпендикулярной оси  $Oy$  (фиг. 1).

В отсутствие шара магнитное поле вне проводника в комплексной записи представляется следующим образом:

$$(1) \quad \mathbf{H}_e = [H_x e^{(i\omega - \alpha)t}, 0, H_z e^{(i\omega - \alpha)t}], \quad i = \sqrt{-1},$$

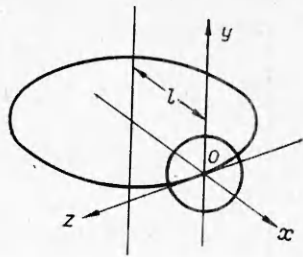
$$H_x = \frac{iI}{2\pi} \frac{z}{(x+l)^2 + z^2}, \quad H_z = -\frac{iI}{2\pi} \frac{x+l}{(x+l)^2 + z^2}, \quad I = \frac{V}{\omega L}.$$

Перейдем к сферической системе координат  $r, \vartheta, \varphi$  с центром  $O$ , в которой полярный угол  $\vartheta$  отсчитывается от направления оси  $Oz$ , а азимутальный угол  $\varphi$  — от плоскости  $y = 0$ . В этой системе координат первые два члена разложения поля (1) по степеням отношения  $r/l \ll 1$  имеют вид

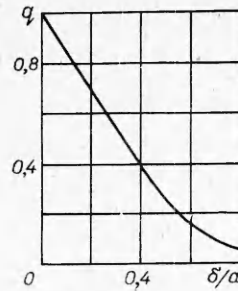
$$(2) \quad \mathbf{H}_e = (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) e^{(i\omega - \alpha)t}, \quad \mathbf{H}_1 = [-H_0 \cos \vartheta, H_0 \sin \vartheta, 0], \quad H_0 = \frac{iI}{2\pi l},$$

$$\mathbf{H}_2 = \left[ H_0 \frac{r}{l} \sin 2\vartheta \cos \varphi, H_0 \frac{r}{l} \cos 2\vartheta \cos \varphi, -H_0 \frac{r}{l} \cos \vartheta \sin \varphi \right].$$

Видно, что слагаемое  $\mathbf{H}_1$  описывает однородное поле, параллельное оси  $Oz$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Магнитные поля внутри и вне шара обозначим соответственно через  $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}e^{i(\omega - \alpha)t}$  и  $\mathbf{h}_e$ . Ввиду линейности уравнений электродинамики можно положить

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{H}_e + e^{i(\omega - \alpha)t} \nabla \theta,$$

где  $\theta$  — гармоническая во внешности шара функция:

$$(3) \quad \Delta \theta = 0, \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Подставляя  $h_i$  в уравнение индукции и условие соленоидальности магнитного поля и пренебрегая малыми порядка  $\alpha/\omega$  по сравнению с единицей, имеем

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta h_r - \frac{2}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta h_\vartheta) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial h_\varphi}{\partial \varphi} + \left[ 1 + \frac{i}{2} (\kappa r)^2 \right] h_r \right\} &= 0, \\ \Delta h_\vartheta + \frac{2}{r^2} \left\{ \frac{\partial h_r}{\partial \vartheta} - \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial h_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sin^2 \vartheta} + i (\kappa r)^2 \right] h_\vartheta \right\} &= 0, \\ \Delta h_\varphi + \frac{2}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial h_r}{\partial \varphi} + \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial h_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sin^2 \vartheta} + i (\kappa r)^2 \right] h_\varphi \right\} &= 0, \\ \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 h_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta h_\vartheta) + \frac{\partial h_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2}}{\delta}, \end{aligned}$$

где  $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$  — толщина скин-слоя;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м — магнитная проницаемость вакуума;  $\sigma$  — проводимость материала частицы.

Функции  $h_r$ ,  $h_\vartheta$ ,  $h_\varphi$  должны быть ограничены в центре шара, функция  $\vartheta$  должна обращаться в нуль на бесконечности, и, кроме того, эти функции должны обеспечивать непрерывность магнитного поля на поверхности шара

$$(5) \quad r = a : \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \nabla \theta = \mathbf{h}.$$

Одно из решений системы (4) можно представить в виде [3]

$$(6) \quad h_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\chi) - i\kappa^2 r\chi, \quad h_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r\chi), \quad h_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r\chi),$$

где  $\chi$  — решение уравнения

$$(7) \quad \Delta \chi - i\kappa^2 \chi = 0.$$

Решив уравнения Лапласа (3) и Гельмгольца (7) с помощью метода разделения переменных, можно показать, что  $\theta$  и вспомогательная функция  $\chi$ , через которую выражается решение задачи (3)—(5), имеют вид

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{r^2} A_1 \cos \vartheta + \frac{1}{r^3} A_2 \sin 2\vartheta \cos \varphi, \\ \chi &= \frac{1}{\sqrt{r}} [B_1 J_{3/2}(\xi) \cos \vartheta + B_2 J_{5/2}(\xi) \sin 2\vartheta \cos \varphi], \quad \xi = \kappa r \sqrt{-i}, \end{aligned}$$

где  $A_k, B_k$  — неизвестные константы;  $J_{3/2}(\xi), J_{5/2}(\xi)$  — цилиндрические функции первого рода. Принимая во внимание (6), (5), находим  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$ , где

$$(8) \quad \begin{aligned} h_{1r} &= \frac{2}{r^{3/2}} B_1 J_{3/2}(\xi) \cos \vartheta, & h_{1\vartheta} &= \frac{1}{r^{3/2}} B_1 \sin \vartheta [J_{5/2}(\xi) - \xi J_{3/2}(\xi)], \\ h_{2r} &= \frac{6}{r^{3/2}} B_2 J_{5/2}(\xi) \sin 2\vartheta \cos \varphi, & h_{2\vartheta} &= \frac{2}{r^{3/2}} B_2 \cos 2\vartheta \cos \varphi [\xi J_{3/2}(\xi) - 2J_{5/2}(\xi)], \\ h_{1\varphi} &= 0, & h_{2\varphi} &= \frac{2}{r^{3/2}} B_2 \cos \vartheta \sin \varphi [2J_{5/2}(\xi) - \xi J_{3/2}(\xi)], \\ A_1 &= \frac{a^3 H_0}{2} \frac{J_{5/2}(\xi_0)}{J_{1/2}(\xi_0)}, & A_2 &= -\frac{a^5 H_0}{3l} \frac{J_{7/2}(\xi_0)}{J_{3/2}(\xi_0)}, \quad \xi_0 = \kappa a \sqrt{-1}, \\ B_1 &= -\frac{3a^{3/2}}{2\xi_0} \frac{H_0}{J_{1/2}(\xi_0)}, & B_2 &= \frac{5a^{5/2}}{6l\xi_0} \frac{H_0}{J_{3/2}(\xi_0)}. \end{aligned}$$

Зная  $\mathbf{h}$ , нетрудно найти распределение токов Фуко  $\mathbf{j}$  внутри шара:

$$\mathbf{j} = (\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2)e^{i(\omega - \alpha)t}, \quad \mathbf{j}_k = \text{rot } \mathbf{h}_k, \quad k = 1, 2$$

или в проекциях

$$(9) \quad \begin{aligned} j_{1r} &= j_{1\vartheta} = j_{2r} = 0, & j_{1\varphi} &= -\frac{i\kappa^2}{\sqrt{r}} B_1 J_{3/2}(\xi) \sin \vartheta, \\ j_{2\vartheta} &= \frac{2i\kappa^2}{\sqrt{r}} B_2 J_{5/2}(\xi) \cos \vartheta \sin \varphi, & j_{2\varphi} &= \frac{2i\kappa^2}{\sqrt{r}} B_2 J_{5/2}(\xi) \cos 2\vartheta \cos \varphi. \end{aligned}$$

Далее, пренебрегая малыми порядка  $\alpha/\omega$  и  $(a/l)^2$  по сравнению с единицей, с помощью (8), (9) вычислим плотность ponderomotorной силы  $\mathbf{f}$ , усредненной по периоду тока:

$$\begin{aligned} f_r &= -\frac{\mu_0}{2} e^{-2\alpha t} \text{Re} [j_{1\varphi}^* (h_{1\vartheta} + h_{2\vartheta}) + j_{2\varphi}^* h_{1\vartheta}], \\ f_{\vartheta} &= \frac{\mu_0}{2} e^{-2\alpha t} \text{Re} [j_{1\varphi}^* (h_{1r} + h_{2r}) + j_{2\varphi}^* h_{1r}], \quad f_{\varphi} = -\frac{\mu_0}{2} e^{-2\alpha t} \text{Re} [j_{2\vartheta}^* h_{1r}], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{j}_k^* = (j_{kr}^*, j_{k\vartheta}^*, j_{k\varphi}^*)$  — вектор, комплексно-сопряженный  $\mathbf{j}_k$ . Переходя к декартовой системе координат и интегрируя  $\mathbf{f}$  по объему шара, находим суммарную ponderomotorную силу  $\mathbf{F}$ , действующую на шар:

$$(10) \quad \begin{aligned} F_x &= \frac{\mu_0 a^3}{4\pi} \left(\frac{a}{l}\right)^3 I^2 e^{-2\alpha t}, \quad F_y = F_z = 0, \\ q &= \frac{0,5(\beta_1^2 + \beta_2^2) - \zeta^{-1}(3\beta_1\gamma_2 + 2\beta_2\gamma_1) + 2\zeta^{-2}(3\beta_1\beta_2 + \gamma_1^2) - 6\zeta^{-3}\beta_1\gamma_1}{\gamma_1(\gamma_2 - 2\zeta^{-1}\beta_2 + 2\zeta^{-2}\gamma_1)}, \\ \beta_{1,2} &= \text{sh } 2\zeta \mp \sin 2\zeta, \quad \gamma_{1,2} = \text{ch } 2\zeta \mp \cos 2\zeta, \quad \zeta = \frac{2a}{\delta}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом приближении главный момент ponderomotorных сил равен нулю. Из формулы (10) легко вычисляется сила  $\mathbf{F}_{\infty}$ , действующая на идеально проводящий шар:

$$F_{\infty x} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} F_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{a}{l}\right)^3 I^2 e^{-2\alpha t}, \quad F_{\infty y} = F_{\infty z} = 0.$$

Приведенный на фиг. 2 график свидетельствует о сильной зависимости  $F_x$  от относительной толщины скин-слоя  $\delta/a$ . В случае толстого скин-слоя главный член разложения  $F_x$  по степеням  $(a/\delta)^4 < 1$  имеет вид

$$F_x \simeq \frac{2\mu_0}{315\pi} \left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 I^2 e^{-2\alpha t}.$$

Пользуясь формулой (10), рассмотрим влияние переменного магнитного поля на гравитационное оседание одиночной проводящей частицы в покоящейся жидкости вблизи вертикального проводника, по которому

при  $t > 0$  протекает разрядный ток. Вызываемое пондеромоторной силой горизонтальное движение частицы находится из решения задачи

$$(11) \quad \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_p \frac{d^2 l}{dt^2} = -6 \rho \nu a \frac{dl}{dt} - \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \frac{d^2 l}{dt^2} - 6 \rho a^2 \sqrt{\pi \nu} \int_0^t \frac{d^2 l(\tau)}{d\tau^2} \times \\ \times \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left(\frac{a}{l}\right)^3 I^2 e^{-2\alpha t}, \\ t = 0: l = l_0, \quad \frac{dl}{dt} = 0,$$

где  $\rho$ ,  $\nu$  — плотность и кинематическая вязкость жидкости;  $\rho_p$  — плотность материала частицы. Слагаемые, стоящие в правой части уравнения (11), описывают стоксовскую силу сопротивления, эффект присоединенных масс, силу Бассе и пондеромоторную силу. Пренебрегая изменением  $F_x$ , связанным с перемещением частицы за время разряда батареи конденсаторов, проведем в (11) преобразование Лапласа. При  $\rho \neq 1,6\rho_p$  операторное решение задачи (11)  $X(s) \doteq l(t)$  можно представить следующим образом:

$$(12) \quad X(s) = \frac{l_0}{s} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{s(s+2\alpha)} \left( \frac{1}{\sqrt{s} - \lambda_1} - \frac{1}{\sqrt{s} - \lambda_2} \right), \\ \lambda_{1,2} = -b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - b_2}, \quad \lambda_3 = \frac{3q\mu_0}{8\pi^2 \rho_1 l_0^3} I^2, \\ b_1 = \frac{9\rho \sqrt{\nu}}{2a\rho_1}, \quad b_2 = \frac{9\rho\nu}{a^2\rho_1}, \quad \rho_1 = 2\rho_p + \rho.$$

Оригиналы каждого из сомножителей, входящих в (12), имеются в таблице, приведенной в [4]. Применяя теорему умножения и воспользовавшись формулой 3.383,1 из [5], можно найти оригинал функции  $X(s)$ :

$$(13) \quad l(t) = l_0 + \frac{\lambda_3}{2\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)} [\eta(t, \alpha, \lambda_1) - \eta(t, \alpha, \lambda_2)], \\ \eta(t, \alpha, \lambda_k) = \frac{1}{\lambda_k^2 + 2\alpha} \left\{ \lambda_k e^{-2\alpha t} \left[ 1 - 2\lambda_k \sqrt{\frac{t}{\pi}} \Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2\alpha t\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\alpha}{\lambda_k} e^{\lambda_k^2 t} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\lambda_k \sqrt{t}} e^{-u^2} du \right] \right\} - \frac{1}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2,$$

где  $\Phi(1/2, 3/2; 2\alpha t)$  — вырожденная гипергеометрическая функция. Предельный вид закона горизонтального движения частицы (13) при  $\sqrt{t} \gg \gg \max(|\lambda_1|^{-1}, \alpha^{-1/2})$

$$l - l_0 = \frac{\mu_0 q}{48\alpha\rho\nu l_0^3} \left(\frac{c}{\pi} I\right)^2 \left[ 1 - \frac{a}{\sqrt{\pi\nu t}} \right],$$

получаемый с помощью асимптотических разложений интеграла ошибок и вырожденной гипергеометрической функции при больших значениях их аргументов [6], позволяет оценить максимальное перемещение частицы под действием переменного магнитного поля, генерируемого разрядным током.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Повх И. Л., Чекин Б. В. Магнитогидродинамическая сепарация. Киев: Наукова думка, 1978.
2. Schlömann E. Separation of nonmagnetic metals from solid waste by permanent magnets. I. Theory. — J. Appl. Phys., 1975, vol. 46, N 11.
3. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964.

Поступила 7/XII 1983 г.