

УДК 533.2

## ДИНАМИКА ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА

И. Ш. Ахатов, Н. К. Вахитова, А. С. Топольников

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450000 Уфа

Исследуется поведение парового пузырька в воде в условиях, моделирующих лабораторные эксперименты при лазерном воздействии. На основе разработанной математической модели анализируется влияние теплопроводности, диффузии и массообмена на динамику пузырька при сжатии и расширении. Установлено, что на стадии схлопывания на стенке пузырька происходит интенсивная конденсация, приводящая к существенному (более чем в 15 раз) уменьшению его массы, и достигаются высокие давление (до  $10^5$  атм) и температура (до  $10^4$  К). Проведено сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными по радиусу первого отскока и амплитуде расходящейся ударной волны в воде. Показано, что небольшие (около 1 %) добавки неконденсируемого газа приводят к существенному ослаблению массообмена на стенке пузырька.

**Введение.** При кратковременном облучении воды лазерным импульсом в фокальной области формируется пузырьковый зародыш, дальнейшая динамика которого определяется процессами тепло- и массообмена. Сначала за счет испарения жидкости на стенке пузырька он увеличивается в размерах. Достигнув некоторого критического радиуса и остыв до температуры окружающей воды, пузырек схлопывается под действием перепада давления насыщения в паре и атмосферного давления в жидкости. Процесс сжатия сопровождается конденсацией пара и увеличением давления и температуры в пузырьке. После коллапса пузырек вновь расширяется и совершает несколько затухающих колебаний. Экспериментально установлено, что момент первого схлопывания пузырька сопровождается световой вспышкой длительностью более 1 нс [1, 2], количество испускаемых фотонов составляет порядка  $10^8$  [3], в воде образуется расходящаяся ударная волна, интенсивность которой пропорциональна максимальному радиусу расширения пузырька [4].

В связи с локализованностью и быстротечностью процесса, существенно затрудняющими измерения в эксперименте, особую актуальность приобретает его теоретическое моделирование на основе численных расчетов. В ряде работ последних лет, посвященных изучению сходного явления — сонолюминесценции одиночного газового пузырька, показано, что для адекватного описания поведения пузырька в жидкости необходимо учитывать многие гидродинамические аспекты: сжимаемость среды, в том числе ударно-волновую, теплопроводность, массообмен, диффузию и химические реакции с участием газовых компонентов [5–8].

В настоящей работе предлагается математическая модель, описывающая динамику колебаний пузырька в воде при воздействии лазерного импульса. В основе модели лежит предположение о сферически-симметричном характере движения газа внутри пузырька и окружающей жидкости, которое в общем случае описывается системой дифференциальных

уравнений в частных производных, выражающих законы сохранения механики сплошных сред с учетом теплопроводности и диффузии. Скорость массообменных процессов на стенке пузырька, обусловленных испарением и конденсацией, определяется в соответствии с неравновесной моделью Герца — Кнудсена — Ленгмюра.

**1. Динамика парового пузырька.** Будем считать, что в начальный момент времени пузырек находится в точке максимального расширения, температура пара совпадает с температурой окружающей жидкости, а давление в пузырьке равно давлению насыщенного пара при данной температуре. Поскольку в нормальных условиях (при атмосферном давлении и комнатной температуре) давление насыщенного пара (примерно 0,02 атм) намного меньше давления в воде, пузырек начинает схлопываться.

При моделировании задачи вся пространственная область разбивается по радиальной координате на три подобласти в соответствии с алгоритмом, предложенным в [9, 10]: 1)  $0 \leq r \leq a(t)$ , занимаемую паром ( $a(t)$  — радиус пузырька); 2)  $a(t) < r \leq R(t)$ , занимаемую водой и ограниченную некоторой искусственно введенной лагранжевой границей; 3)  $R(t) < r < \infty$ , занимаемую слабосжимаемой жидкостью. Выбор  $R(t)$  определяется из условия, при котором скорость изменения радиуса  $\dot{R}(t)$  в течение всего цикла колебаний пузырька остается малой по сравнению со скоростью звука в воде. В этом случае для определения закона изменения  $R(t)$  справедливо уравнение типа уравнения Рэлея — Плессета. В настоящей работе принимается  $R_0 = 1,5a_0$  ( $a_0$  — начальный радиус пузырька).

Для описания параметров пара внутри пузырька при  $r \leq a(t)$  и воды в прилегающей к его поверхности области  $a(t) \leq r \leq R(t)$  рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных с учетом теплопроводности в приближении сферической симметрии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u r^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u^2 r^2) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( u r^2 (e + p) - \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $e$  — плотность, скорость, давление, температура и удельная на единицу объема полная энергия соответственно;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

Система (1), (2) замыкается уравнениями состояния для пара и воды. В случае пара в настоящей работе используется зависимость Ван-дер-Ваальса

$$p_v = \frac{\rho_v B_v T_v}{1 - b_1 \rho_v} - b_2 \rho_v^2, \quad \varepsilon_v = \frac{e_v}{\rho_v} - \frac{u_v^2}{2} = \frac{B_v T_v}{\gamma - 1} - b_2 \rho_v, \quad (3)$$

где  $B_v = 458,9$  Дж/(кг · К);  $b_1 = 1,694 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/кг;  $b_2 = 1708,6$  Дж · м<sup>3</sup>/кг<sup>2</sup>;  $\gamma = 1,3$ .

Для описания параметров воды применяется уравнение состояния в форме Ми — Грюнайзена, обеспечивающее удовлетворительное согласование результатов расчетов с экспериментальными данными в области сильного сжатия и умеренного растяжения [10]:

$$p_l = p_c(\rho_l) + \Gamma(\rho_l) c_v \rho_l T_l, \quad \varepsilon_l = e_l / \rho_l - u_l^2 / 2 = \varepsilon_c(\rho_l) + c_v T_l.$$

Здесь

$$p_c(\rho_l) = A \left( \frac{\rho_l}{\rho_{l0}} \right)^{2/3} \exp \left( b \left[ 1 - \left( \frac{\rho_l}{\rho_{l0}} \right)^{-1/3} \right] \right) - K \left( \frac{\rho_l}{\rho_{l0}} \right)^{4/3},$$

$$\varepsilon_c(\rho_l) = \frac{3A}{\rho_{l0} b} \exp \left( b \left[ 1 - \left( \frac{\rho_l}{\rho_{l0}} \right)^{-1/3} \right] \right) - \frac{3K}{\rho_{l0}} \left( \frac{\rho_l}{\rho_{l0}} \right)^{1/3},$$

значения  $A = 3,492 \cdot 10^8$  Па,  $K = 8,283 \cdot 10^8$  Па,  $b = 16,0558$ ,  $c_v = 3270$  Дж/(кг · К),  $\rho_{l0} = 998$  кг/м<sup>3</sup> выбираются из условия наилучшей аппроксимации данных эксперимента;  $\Gamma(\rho_l)$  — коэффициент Грюнайзена, задаваемый в виде аналитической функции плотности.

Граничные условия на поверхности пузырька формулируются с учетом происходящих здесь процессов испарения и конденсации. Приравнивая тепловые потоки, получим уравнение, связывающее температурные градиенты для пара и воды:

$$\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=a} - \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r} \Big|_{r=a} = jl(p_v|_{r=a}).$$

Здесь  $l$  — удельная теплота парообразования;  $j$  — скорость фазовых переходов при испарении и конденсации:

$$j = (\alpha/\sqrt{2\pi B_v})(p_S(T_l|_{r=a})/\sqrt{T_l|_{r=a}} - \Gamma_v p_v|_{r=a}/\sqrt{T_v|_{r=a}}), \quad (4)$$

которая выражается обобщенным равенством Герца — Кнудсена — Ленгмюра с учетом поправок, учитывающих подвижность межфазной границы [11]:

$$\Gamma_v = \exp(-\Omega^2) - \Omega\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Omega} \exp(-x^2) dx\right), \quad \Omega = \frac{j\sqrt{B_v T_v|_{r=a}}}{\sqrt{2p_v|_{r=a}}} = -\frac{u_v|_{r=a} - \dot{a}}{\sqrt{2B_v T_v|_{r=a}}}.$$

В общем случае на стенке пузырька вводится также скачок температуры

$$[T] = T_l|_{r=a} - T_v|_{r=a} = 0,45jT_S/(\sqrt{2B_v T_S} \rho_v|_{r=a}).$$

Скорость и давление пара и жидкости при  $r = a(t)$  связаны следующими соотношениями:

$$u_v|_{r=a} = \dot{a} - j/\rho_v|_{r=a}, \quad u_l|_{r=a} = \dot{a} - j/\rho_l|_{r=a}, \\ p_v|_{r=a} = p_l|_{r=a} + 2\sigma/a + 4\mu_l u_l|_{r=a}/a = p_l|_{r=a} + 2\sigma/a + (4\mu_l/a)(\dot{a} - j/\rho_l),$$

где  $\sigma$ ,  $\mu_l$  — поверхностное натяжение и динамическая вязкость воды.

Закон изменения внешнего радиуса области сжимаемой жидкости  $R(t)$  выражается обобщенным равенством Рэлея — Плессета в форме [12]

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{C_l}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}}{3C_l}\right) \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{C_l}\right) \frac{p_l|_{r=R} - p_{l0}}{\rho_{l0}} + \frac{R}{\rho_{l0} C_l} \frac{d}{dt} (p_l|_{r=R} - p_{l0}), \quad (5)$$

где  $C_l = 1500$  м/с — скорость звука в воде;  $p_{l0} = 1$  атм — начальное давление в жидкости.

В настоящей работе значения термодинамических коэффициентов пара и воды ( $\lambda_v$ ,  $\lambda_l$ ,  $\mu_l$ ,  $\sigma$ ,  $p_S$ ,  $l$ ) аппроксимируются аналитическими формулами на основе известных табличных данных [13].

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (1), (2) в области  $0 \leq r \leq R(t)$  в течение всего времени колебаний пузырька сопряжено со значительными временными затратами. Поэтому на медленной стадии процесса, характеризующейся малыми числами Маха, вместо равенств (1), (2) используются гомобарическое приближение для пара и условие несжимаемости для воды [14]. В результате решение полной системы дифференциальных уравнений осуществляется только в узком временном интервале, когда скорость сжатия-расширения пузырька сравнима со скоростью звука в паре.

Расчеты для гомобарической модели проводятся с помощью неявной конечно-разностной схемы второго порядка аппроксимации, уравнение Рэлея — Плессета (5) решается методом Рунге — Кутты пятого порядка точности. Полная система уравнений (1), (2) решается численно с использованием схемы Годунова.

На рис. 1, 2 представлены результаты численных расчетов схлопывания парового пузырька с  $a_0 = 1$  мм. В начальный момент пар внутри пузырька находится в состоянии насыщения при заданной температуре жидкости  $T_{l0} = 296$  К. На рис. 1 показаны зависимости радиуса пузырька и массы пара  $m$  от времени. Точки соответствуют моментам

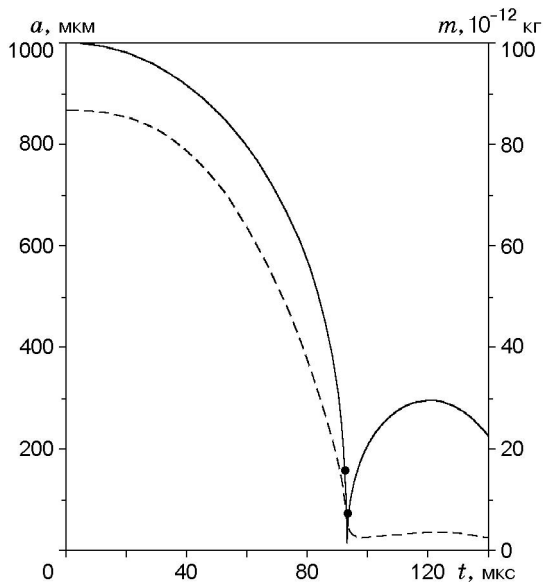


Рис. 1

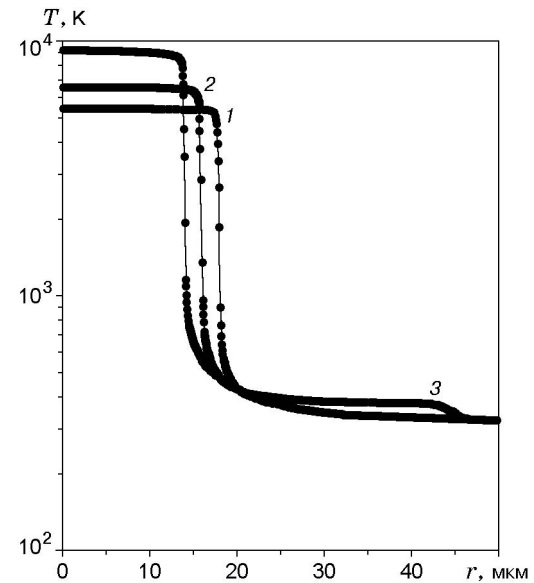


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость радиуса пузырька (сплошная линия) и массы пара (штриховая линия) от времени при  $a_0 = 1$  мм,  $\alpha = 0,075$  (точки — моменты перехода от медленной стадии к быстрой и наоборот)

Рис. 2. Пространственные распределения температуры вблизи коллапса при  $a_0 = 1$  мм,  $\alpha = 0,075$  (точки — значения температуры в расчетных ячейках):  
 1 —  $t = -4,76$  нс; 2 —  $t = 0,45$  нс; 3 —  $t = 7,22$  нс

перехода от расчетов по упрощенным моделям описания среды (гомобарической для пара и модели несжимаемой жидкости для воды) к расчетам по полной и обратно. Минимальный радиус пузырька при схлопывании равен 14 мкм, при этом масса пара составляет примерно 6 % начального значения. Последнее обстоятельство объясняется тем, что при сжатии на стенке пузырька происходит конденсация пара, скорость которой определяется формулой (4). Входящий в нее коэффициент аккомодации  $\alpha$  выбирается из условия соответствия расчетных данных результатам лабораторных экспериментов. В настоящей работе этот коэффициент равен 0,075 и определен по экспериментальным значениям величины первого отскока для начального радиуса пузырька  $a_0 = 1$  мм.

Следует отметить, что за счет конденсации на стадии сжатия пузырька давление пара внутри него растет не так быстро, как в газовом пузырьке с постоянной массой. В результате возможен более глубокий коллапс и как следствие достижение значительно больших давления и температуры в пузырьке.

Распределения по радиусу температуры в паре и жидкости для трех последовательных моментов времени, близких к моменту достижения радиусом минимального значения, показаны на рис. 2. При сжатии пузырька нагрев газа внутри него происходит практически равномерно, за исключением тонкого пограничного слоя вблизи поверхности, где температура резко понижается до температуры воды. В результате уменьшается вероятность образования в пузырьке сходящейся ударной волны, поскольку всякое нелинейное возмущение на поверхности при распространении к центру пузырька попадает в область с возрастающей скоростью звука и вырождается в слабое акустическое. Как следует из результатов расчетов, при расширении пузырек генерирует ударную волну в воде (кри-

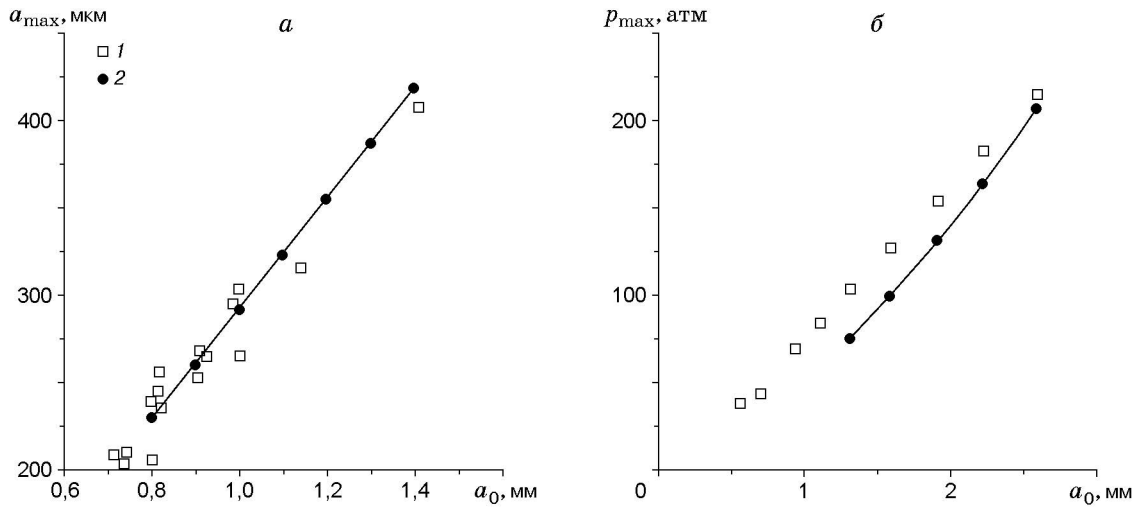


Рис. 3. Зависимости максимального радиуса первого отскока (*a*) и амплитуды ударной волны в воде на расстоянии 3 мм от центра пузырька (*б*) от начального радиуса пузырька:

1 — результаты лабораторных экспериментов; 2 — расчетные значения

вая 3 на рис. 2). Максимальные давление и температура пара в центре пузырька составляют  $10^5$  атм и  $10^4$  К соответственно.

Результаты расчетов настоящей работы сравнивались с экспериментальными данными [4, 15]. На рис. 3 приведены зависимости максимального радиуса пузырька во время первого отскока и амплитуды расходящейся ударной волны в воде (на расстоянии 3 мм от его центра) от начального размера пузырька.

**2. Влияние добавок неконденсируемого газа.** В условиях эксперимента в пузырьке, сгенерированном с помощью лазерного импульса, содержится не только водяной пар, но и примеси других газов. Последние могут появиться в результате рекомбинации плазмы после фокусировки лазерного луча, химических реакций внутри пузырька или диффузии из окружающей жидкости. Для того чтобы оценить влияние примеси неконденсируемого газа на динамику паровой полости, рассмотрим модель двухкомпонентной парогазовой среды внутри пузырька.

В данном случае уравнения (1) описывают законы сохранения массы и импульса для смеси в целом. Уравнение энергии с учетом диффузионных добавок записывается в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (ur^2(e + p)) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho r^2 D \frac{\partial k}{\partial r} (i_v - i_g) \right),$$

где  $k$ ,  $D$  — массовая доля пара и коэффициент бинарной диффузии смеси;  $i = \varepsilon + p/\rho$  — энтальпия; индексы  $v$  и  $g$  соответствуют параметрам пара и газа.

Для вычисления  $k$  уравнение бинарной диффузии запишем в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho r^2 D \frac{\partial k}{\partial r} \right).$$

Связь между параметрами отдельных компонентов и смеси в целом задается с помощью равенств  $\rho_v = k\rho$ ,  $\rho_g = (1 - k)\rho$ ,  $u = ku_v + (1 - k)u_g$ ,  $p = p_v + p_g$ ,  $\varepsilon = k\varepsilon_v + (1 - k)\varepsilon_g$ ,  $\rho_v(u - u_v) = -\rho_g(u - u_g) = \rho D \partial k / \partial r$ ,  $T = T_v = T_g$ .

В качестве неконденсируемого газа будем рассматривать воздух. Его уравнение состояния, так же как и для водяного пара, зададим в виде зависимости Ван-дер-Ваальса (3), в которой примем  $B_g = 284,75$  Дж/(кг · К),  $b_{1g} = 1,294 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/кг,  $b_{2g} = 166,7$  Дж · м<sup>3</sup>/кг<sup>2</sup>,

$\gamma_g = 1,4$ . Коэффициент бинарной диффузии водяного пара в воздухе определяется как функция температуры:  $D = 2,16 \cdot 10^{-5} (T/273)^{1,8}$ .

Массовая доля компонентов парогазовой смеси при колебаниях пузырька может меняться не только из-за испарения или конденсации, но и в результате диффузии газа из жидкости сквозь стенку пузырька.

Рассмотрим уравнение диффузии воздуха в воде в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{a^2 \dot{a}}{r^2} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{D_l}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad (6)$$

с граничными условиями

$$c|_{r=\infty} = c_\infty, \quad c|_{r=a(t)} = c_a(t),$$

где  $c$  — массовая доля газа;  $D_l$  — коэффициент диффузии.

Решение уравнения (6) можно приближенно представить в виде

$$c(r, t) = c_\infty + (c_a(t) - c_\infty) \exp(-(r - a(t))/\delta(t)), \quad (7)$$

где  $\delta$  — эффективная толщина диффузионного слоя вблизи поверхности пузырька. Подставляя (7) в (6), получим следующую оценку для приращения массы газа в пузырьке:

$$\Delta m_g \approx 4\sqrt{2D_l \Delta t} \pi a_{\max}^2 c_\infty \rho_{l0},$$

где  $\Delta t$  — время колебаний пузырька. Выбрав характерные значения параметров задачи:  $D_l \approx 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta t \approx 10^{-4} \text{ с}$ ,  $a_{\max} \approx 10^{-3} \text{ м}$ ,  $c_\infty \approx 10^{-5}$ , получим  $\Delta m_g \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ кг}$ , что на 3–4 порядка меньше начальной массы пузырька (см. рис. 1).

Таким образом, оценка интенсивности диффузии газа из воды внутрь пузырька позволяет сделать вывод, что указанный процесс в течение одного периода колебаний пузырька значительного влияния на решение не оказывает. Это подтверждается экспериментальными измерениями, в которых установлено, что интенсивность светового импульса как одна из основных характеристик процесса не зависит от сорта и массы растворенного в воде газа [2]. Поэтому в настоящей работе будем считать, что диффузия воздуха через границу пузырька отсутствует.

Численные расчеты задачи для двухкомпонентной газовой смеси проводились для начальных концентраций газа порядка 1 %. Остальные параметры выбирались такими же, как и в случае парового пузырька. В результате расчета схлопывания пузырька с  $a_0 = 1 \text{ мм}$  и  $k_0 = 0,99$  получены следующие значения основных характеристик: минимальный радиус 16,5 мкм, радиус первого отскока 360 мкм, масса пузырька в коллапсе  $8 \cdot 10^{-12} \text{ кг}$ . Сравнение этих данных со значениями для парового пузырька (14 мкм, 290 мкм,  $5,5 \cdot 10^{-12} \text{ кг}$  соответственно) показывает, что малая добавка газа приводит к значительному изменению решения.

Для объяснения указанного эффекта рассмотрим пространственное распределение концентрации пара на стадии сжатия пузырька. На рис. 4 видно, что концентрация пара однородна ( $k = 0,99$ ) практически во всей области, занимаемой пузырьком, за исключением малой окрестности вблизи его стенки, в которой концентрация газа резко возрастает (до 30–40 %). В результате такого распределения вблизи межфазной поверхности образуется тонкий пограничный слой с высоким содержанием газа, что приводит к существенному ослаблению массообмена. На рис. 5 представлены зависимости радиуса отскока и максимальной температуры смеси в центре пузырька от начальной концентрации газа. Увеличение последней от 0 до 10 % приводит к возрастанию  $a_{\max}$  от 290 до 620 мкм и соответствующему уменьшению пиковой температуры от  $10^4$  до  $5,2 \cdot 10^3 \text{ К}$ .

**Заключение.** Предложена математическая модель, описывающая сферически-симметричное движение пузырька в жидкости с учетом тепло- и массообмена для двухкомпонентной газовой смеси.

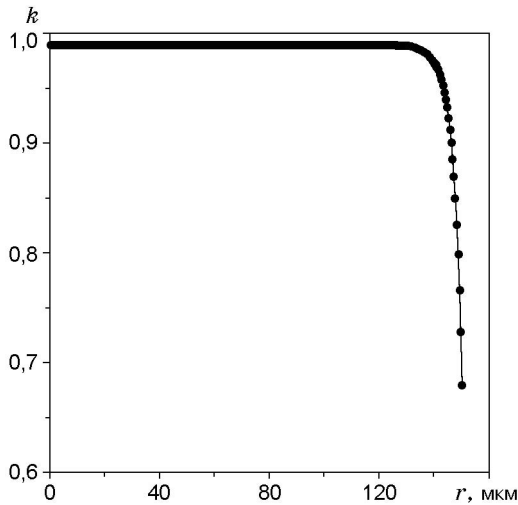


Рис. 4

Рис. 4. Распределение концентрации пара по радиусу внутри пузырька на стадии сжатия ( $t = -530$  нс относительно времени коллапса) при  $a_0 = 1$  мм,  $\alpha = 0,075$ ,  $k_0 = 0,99$  (точки — значения концентрации в расчетных ячейках)

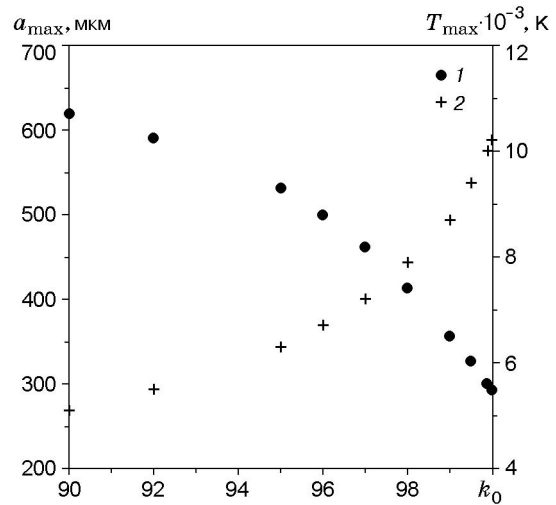


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость радиуса отскока (1) и максимальной температуры в центре пузырька (2) от начальной концентрации пара при  $a_0 = 1$  мм,  $\alpha = 0,075$

На основе принятой модели проведены численные расчеты схлопывания сферической паровой полости в воде, индуцированной воздействием лазерного импульса. Показано, что динамика пузырька в значительной степени определяется процессами испарения и конденсации на его стенке. За счет уменьшения массы пара при сжатии пузырька внутри него достигаются высокие значения давления и температуры, вызывающие свечение в пузырьке. Численные результаты удовлетворительно согласуются с данными лабораторных экспериментов.

Из проведенных исследований следует, что диффузия газа из окружающей жидкости практически не влияет на динамику паровой полости. Тем не менее присутствие газа внутри пузырька даже в малых количествах (порядка 1 % массы пара) приводит к значительному ослаблению коллапса.

Авторы выражают благодарность Р. И. Нигматулину и Р. Х. Болотновой за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бузуков А. А., Тесленко В. С. Сонолюминесценция при фокусировке лазерного излучения в жидкость // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 14, вып. 5. С. 286–289.
2. Baghdassarian O., Tabbert B., Williams G. A. Luminescence characteristics of laser-induced bubbles in water // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83, N 12. P. 2437–2440.
3. Ohl C. D., Lindau O., Lauterborn W. Luminescence from spherically and aspherically collapsing laser induced bubbles // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80, N 2. P. 393–396.
4. Lindau O., Lauterborn W. Laser-produced cavitation — studied with 100 million frames per second // Nonlinear acoustics at the turn of millennium: AIP conf. proc., Göttingen, Germany, 1–4 Sept. 1999. Melville; N. Y.: Amer. inst. of phys., 2000. V. 524. P. 385–388.

5. **Vuong V. Q., Szeri A. J.** Sonoluminescence and diffusive transport // *Phys. Fluids*. 1996. V. 8, N 9. P. 2354–2364.
6. **Yasui K.** Alternative model of single-bubble sonoluminescence // *Phys. Rev. E*. 1997. V. 56, N 6. P. 6750–6760.
7. **Moss W. C., Young D. A., Harte J. A., et al.** Computed optical emissions from a sonoluminescing bubble // *Phys. Rev. E*. 1999. V. 59, N 3. P. 2986–2992.
8. **Storey B. D., Szeri A. J.** Water vapour, sonoluminescence and sonochemistry // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 2000. V. 456. P. 1685–1709.
9. **Nigmatulin R. I., Akhatov I. Sh., Vakhitova N. K., Topolnikov A. S.** Bubble collapse and shock wave formation in sonoluminescence // *Nonlinear acoustics at the turn of millennium: AIP conf. proc., Göttingen, Germany, 1–4 Sept. 1999. Melville; N. Y.: Amer. inst. of phys., 2000. V. 524. P. 433–436.*
10. **Nigmatulin R. I., Akhatov I. Sh., Vakhitova N. K., et al.** Mathematical modeling of a single bubble and multibubble dynamics in a liquid // *Proc. of the Intern. conf. on multiphase systems, Ufa, 15–17 June 2000. Ufa: Gilem Publ.: Pol Publ., 2000. P. 294–301.*
11. **Schrage R. W.** A theoretical study of interphase mass transfer. N. Y.: Columbia U. P. Press, 1953.
12. **Нигматулин Р. И., Ахатов И. Ш., Вахитова Н. К.** Вынужденные колебания газового пузырька в сферическом объеме сжимаемой жидкости // *ПМТФ*. 1999. Т. 40, № 2. С. 111–118.
13. **Ривкин С. Л., Александров А. А.** Теплофизические свойства воды и водяного пара. М.: Энергия, 1980.
14. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1, 2.
15. **Ohl C. D., Kurz T., Geisler R., et al.** Bubble dynamics, shock waves and sonoluminescence // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1999. V. 357. P. 269–294.

*Поступила в редакцию 22/V 2001 г.*

---