УДК 517.95
DOI: 10.15372/PMTF202415509

АНАЛИЗ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ ВЕЩЕСТВА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВЯЗКОСТИ И ДИФФУЗИИ

Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак

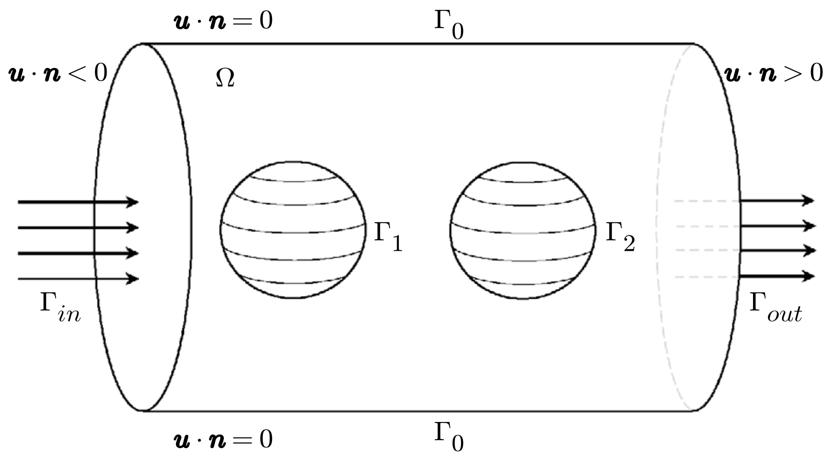
Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
E-mails: alekseev@iam.dvo.ru, uliyaspivak@gmail.com

Рассматривается краевая задача для нелинейной модели массопереноса, обобщающей классическое приближение Буссинеска при неоднородных граничных условиях Дирихле для скорости и смешанных краевых условиях для концентрации вещества. Предполагается, что коэффициенты вязкости и диффузии, а также сила плавучести в уравнениях модели зависят от концентрации. Разрабатывается математический аппарат для исследования рассматриваемой задачи. На его основе доказывается теорема о глобальном существовании слабого решения, приводятся достаточные условия для данных задачи, обеспечивающие локальную единственность слабых решений.

Ключевые слова: обобщенная модель массопереноса Буссинеска, бинарная жидкость, неоднородные граничные условия, глобальная разрешимость, локальная единственность

Введение. В последнее время активно проводятся исследования качественных свойств решений уравнений тепломассопереноса с переменными коэффициентами, зависящими от температуры или концентрации растворенного вещества. Работы в этой области можно разделить на несколько направлений: 1) развитие методов нахождения точных решений указанных уравнений (см. [1–5]); 2) изучение качественных свойств решений уравнений тепломассопереноса с помощью метода Ли — Овсянникова (см., например, [6–8]); 3) анализ разрешимости и единственности решений краевых задач для указанных выше уравнений. Работы [9–13] посвящены теоретическому анализу краевых задач для стационарных уравнений тепломассопереноса с переменными коэффициентами при однородных и неоднородных краевых условиях Дирихле для всех переменных. Настоящая работа является продолжением работ [11, 13], в которых исследовалась разрешимость задачи Дирихле для модели массопереноса Буссинеска с переменными коэффициентами. В отличие от [11, 13] в данной работе изучается новая краевая задача для модели Буссинеска с переменными коэффициентами, описывающая течение бинарной жидкости при смешанных краевых условиях для концентрации. На основе разработанного математического аппарата доказываются ее глобальная разрешимость и локальная единственность решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2024-1440 от 28.02.2024 по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров).



Геометрия области течения в случае цилиндрического канала с двумя препятствиями Γ_1 и Γ_2 внутри него при неоднородных граничных условиях для скорости и температуры на входе Γ_{in} и выходе Γ_{out}

1. Постановка основной задачи. Функциональные пространства. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ, состоящей из двух участков: Γ_D и Γ_N. Рассматривается следующая краевая задача, описывающая движение бинарной жидкости в рамках обобщенной модели Буссинеска для массопереноса [14]:

$$-\operatorname{div}(\nu(\varphi)\nabla\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} + b(\varphi)\varphi\boldsymbol{G}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{1.1}$$

$$-\operatorname{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\varphi = f \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{u}\big|_\Gamma = \boldsymbol{g}, \qquad \varphi\big|_{\Gamma_D} = \psi, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_N} = \chi. \tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости; φ — концентрация растворенного вещества; $p = P/\rho_0$; P — давление; $\rho_0 = \text{const}$ — плотность жидкости; $\nu = \nu(\varphi) > 0$ — коэффициент кинематической (молекулярной) вязкости; $\lambda = \lambda(\varphi) > 0$ — коэффициент диффузии; $b \equiv b(\varphi)$ — коэффициент массового расширения; $\boldsymbol{G} = -(0, 0, G)$ — гравитационное ускорение; $\boldsymbol{f}$, f — объемные плотности внешних сил и внешних источников вещества соответственно. Ниже задачу (1.1)–(1.3) для заданных функций $\nu(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$, $b(\varphi)$, k, $\boldsymbol{f}$, f, $\boldsymbol{g}$, ψ, χ будем называть задачей 1.

В отличие от [9, 11] в данной работе рассматриваются неоднородные граничные условия для скорости и концентрации. Это позволяет применить разрабатываемую теорию для широкого класса физически содержательных задач, в частности для задачи о течении бинарной жидкости в канале (см. рисунок).

При изучении задачи 1 будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. При этом D означает либо область Ω, либо подмножество $Q \subset \Omega$, либо границу Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot\,,\cdot)_{s,Q}$ обозначены норма, полунорма и скалярное произведение в $H^s(Q)$ соответственно. Нормы и скалярное произведение в $L^2(Q)$ или в $L^2(\Omega)$ обозначаются через $\|\cdot\|_Q$, $(\cdot\,,\cdot)_Q$ или $\|\cdot\|_\Omega$, $(\cdot\,,\cdot)$. Через X^* обозначено пространство, двойственное гильбертову пространству X, запись $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ означает отношение двойственности для пары X и X^*.

Введем следующие функциональные пространства:

$$H^1_{\rm div}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)\colon \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0\}, \qquad H^1_0(\Omega) = \{h \in H^1(\Omega)\colon h\big|_\Gamma = 0\},$$

$$L^2_0(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega)\colon (h, 1) = 0\}, \qquad V = \{\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^3\colon \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0\},$$

$$\mathcal{T} = \{h \in H^1(\Omega)\colon h\big|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Заметим, что каждое из пространств $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$, $\mathcal{T}$ является гильбертовым по норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Определим произведения пространств $X = H^1_0(\Omega)^3 \times \mathcal{T}$ и $W = V \times \mathcal{T} \subset X$ с нормой $\|\boldsymbol{x}\|^2_X = \|\boldsymbol{u}\|^2_{1,\Omega} + \|\varphi\|^2_{1,\Omega}$ для $\boldsymbol{x} \equiv (\boldsymbol{u}, \varphi) \in X$ и обозначим через X^* пространство $H^{-1}(\Omega)^3 \times H^{-1}(\Omega)$, двойственное X.

Далее предполагается, что выполняются следующие условия.

1.1. Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, открытые участки Γ_D и Γ_N границы Γ удовлетворяют условиям $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = 0$, $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$.

1.2. $\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$, $f \in \mathcal{T}^*$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$.

1.3. $\boldsymbol{g} \in H^{1/2}(\Gamma)^3$, $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{n})_{\Gamma^{(i)}} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_N} \geqslant 0$.

1.4. Для любой функции $\varphi \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $b(\varphi) \in L^p(\Omega)$, где $p \geqslant 3/2$ — фиксированное число, не зависящее от φ, векторная функция $\boldsymbol{b}(\varphi) \equiv b(\varphi)\boldsymbol{G}$ удовлетворяет условию

$$\|\boldsymbol{b}(\varphi)\|_{L^p(\Omega)^3} \leqslant \hat{\beta}_p \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad p \geqslant 3/2. \tag{1.4}$$

Здесь $\hat{\beta}_p$ — положительная константа, зависящая от p. Кроме того, для любой пары функций $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$, принадлежащих шару $B_r = \{\varphi \in H^1(\Omega)\colon \|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant r\}$ радиусом r, справедливо неравенство

$$\|\boldsymbol{b}(\varphi_1) - \boldsymbol{b}(\varphi_2)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant L_b \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in B_r, \tag{1.5}$$

где L_b — константа, которая зависит от b и r, но не зависит от $\varphi_1, \varphi_2 \in B_r$.

1.5. $\nu \in C^0(\mathbb{R})$, $\lambda \in C^0(\mathbb{R})$, и существуют константы $\nu_{\min}$, $\nu_{\max}$, $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$, такие что $0 < \nu_{\min} \leqslant \nu(\tau) \leqslant \nu_{\max}$, $0 < \lambda_{\min} \leqslant \lambda(\tau) \leqslant \lambda_{\max}$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$.

Ниже используются следующие неравенства:

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leqslant C_s \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad 1 \leqslant s \leqslant 6; \tag{1.6}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^s(\Omega)^3} \leqslant C_s \|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} \quad \forall \boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^3, \quad 1 \leqslant s \leqslant 6; \tag{1.7}$$

$$|(\varphi \boldsymbol{q}, \boldsymbol{v})| \leqslant \hat{C}_p \|\boldsymbol{q}\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \boldsymbol{q} \in L^p(\Omega)^3, \quad \varphi \in H^1(\Omega), \quad \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^3; \tag{1.8}$$

$$|(q\varphi, h)| \leqslant \hat{C}_p \|q\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \quad \forall q \in L^p(\Omega), \quad \varphi, h \in H^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Здесь C_s — константа, зависящая от Ω; $s \in [1, 6]$; C^p — константа, зависящая от Ω и p при $p \geqslant 3/2$ (см. [13]). Из оценки (1.8) и свойства (1.5) для $\boldsymbol{b}(\varphi)$ следует оценка для разности $\boldsymbol{b}(\varphi_1) - \boldsymbol{b}(\varphi_2)$:

$$\begin{aligned} |((\boldsymbol{b}(\varphi_1) - \boldsymbol{b}(\varphi_2))\varphi, \boldsymbol{v})| &\leqslant \hat{C}_p \, \|\boldsymbol{b}(\varphi_1) - \boldsymbol{b}(\varphi_2)\|_{L^p(\Omega)} \, \|\varphi\|_{1,\Omega} \, \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \leqslant \\ &\leqslant \hat{C}_p L_b \, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \, \|\varphi\|_{1,\Omega} \, \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega), \quad \boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^3. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Наряду с неравенствами (1.6)–(1.9) будем использовать другие важные неравенства и свойства билинейных и трилинейных форм. Запишем их в виде следующей леммы. Доказательство леммы следует из результатов, полученных в [15–17].

Лемма. *Пусть выполняются условия* 1.1, 1.4, 1.5 *и* $\boldsymbol{u} \in H^1_{\operatorname{div}}(\Omega)$ *— заданная функция. Тогда существуют положительные константы* δ_0, δ_1, γ_1, γ_1', γ_2, γ_2', γ_3, *зависящие от* Ω, *и константа* β_p, *зависящая от* Ω, p, *такие что выполняются следующие соотношения:*

$$|(\nu(\varphi)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})| \leqslant \nu_{\max} \, \|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} \, \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^3, \quad \varphi \in H^1(\Omega); \tag{1.11}$$

$$(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{v}) \geqslant \delta_0 \, \|\boldsymbol{v}\|^2_{1,\Omega}, \quad (\nu(\varphi)\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{v}) \geqslant \nu_* \, \|\boldsymbol{v}\|^2_{1,\Omega} \quad \forall \boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \quad \varphi \in H^1(\Omega); \tag{1.12}$$

$$|((\boldsymbol{w}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leqslant \gamma_1' \|\boldsymbol{w}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_1 \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega} \|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \boldsymbol{w},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega)^3; \tag{1.13}$$

$$((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = -((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^3, \quad \boldsymbol{w}\in H^1(\Omega)^3; \tag{1.14}$$

$$|(\lambda(\eta)\nabla\varphi,\nabla h)| \leqslant \lambda_{\max} \|\eta\|_{1,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi,\eta,h\in H^1(\Omega); \tag{1.15}$$

$$(\nabla h,\nabla h) \geqslant \delta_1 \|h\|^2_{1,\Omega}, \quad (\lambda(\varphi)\nabla h,\nabla h) \geqslant \lambda_* \|h\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\varphi\in H^1(\Omega), \quad h\in\mathcal{T}; \tag{1.16}$$

$$|(\boldsymbol{w}\cdot\nabla\varphi,h)| \leqslant \gamma_2' \|\boldsymbol{w}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_2 \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \quad \forall \boldsymbol{w}\in H^1(\Omega)^3, \quad \varphi,h\in H^1(\Omega); \tag{1.17}$$

$$|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi,h)| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} \|\varphi\|_{L^4(\Omega)} \|h\|_{1,\Omega} \quad \forall\varphi\in H^1(\Omega), \quad h\in\mathcal{T}; \tag{1.18}$$

$$|(\boldsymbol{b}(\eta)\varphi,\boldsymbol{v})| \leqslant \beta_p \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall\eta,\varphi\in H^1(\Omega), \quad \boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^3. \tag{1.19}$$

Здесь $\nu_* = \delta_0\nu_{\min}$; $\lambda_* = \delta_1\lambda_{\min}$; $\beta_p = \hat\beta_p\hat C_6$; *константы* $\nu_{\min}$, $\lambda_{\min}$ *определены в условии* 1.5, *а константы* $\hat\beta_p$, $\hat C_6$ — *в* (1.4), (1.9).

2. Глобальная разрешимость задачи 1. Сформулируем слабую постановку задачи 1. Для этого умножим первое уравнение в (1.1) на функцию $\boldsymbol{v}\in V$, уравнение (1.2) — на $h\in\mathcal{T}$ и проинтегрируем результат по Ω, используя формулы Грина. В результате получаем слабую формулировку задачи 1, заключающуюся в нахождении пары функций (слабого решения) $(\boldsymbol{u},\varphi)\in H^1(\Omega)^3\times H^1(\Omega)$, удовлетворяющих соотношениям

$$(\nu(\varphi)\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}) + ((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle + (\boldsymbol{b}(\varphi)\varphi,\boldsymbol{v}) \quad \forall\boldsymbol{v}\in V; \tag{2.1}$$

$$(\lambda(\varphi)\nabla\varphi,\nabla h) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi,h) = \langle f,h\rangle + (\chi,h)_{\Gamma_N} \quad \forall h\in\mathcal{T}; \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \boldsymbol{u}\big|_\Gamma = \boldsymbol{g}, \qquad \varphi\big|_{\Gamma_D} = \psi. \tag{2.3}$$

Следует отметить, что тождества (2.1), (2.2) не содержат давление p, однако оно однозначно восстанавливается по известной паре $(\boldsymbol{u},\varphi)\in H^1(\Omega)^3\times H^1(\Omega)$ с помощью теоремы де Рама (см. [15, 16]).

Будем искать решение $(\boldsymbol{u},\varphi)\in H^1(\Omega)^3\times H^1(\Omega)$ задачи (2.1)–(2.3) в виде $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \tilde{\boldsymbol{u}}$, $\varphi = \varphi_0 + \tilde\varphi$. Здесь $\tilde{\boldsymbol{u}}\in V$, $\tilde\varphi\in\mathcal{T}$ — новые искомые функции; $\boldsymbol{u}_0\equiv\boldsymbol{u}_{\varepsilon_0}\in H^1_{\rm div}(\Omega)$, $\varphi_0 = \varphi_{\varepsilon_0}\in H^1(\Omega)$ — значения при $\varepsilon=\varepsilon_0$ лифтингов, т. е. надлежащих продолжений граничных функций $\boldsymbol{g}$ и ψ внутрь Ω в виде функций $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ и φ_δ, удовлетворяющих условиям

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon\big|_\Gamma = \boldsymbol{g}, \quad \|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leqslant C_\varepsilon \|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma}, \quad |(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_\varepsilon,\boldsymbol{v})| \leqslant \varepsilon \|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\boldsymbol{v}\in V,$$

$$\varphi_\delta\big|_{\Gamma_D} = \psi, \quad \|\varphi_\delta\|_{L^4(\Omega)} \leqslant \delta, \quad \|\varphi_\delta\|_{1,\Omega} \leqslant C_\delta^\psi \equiv M_\delta(\|\psi\|_{1/2,\Gamma}) \quad \forall\delta\in(0,1],$$

C_ε — константа, зависящая от ε и Ω; M_δ — семейство непрерывных неубывающих функций Ψ: $(0,\infty)\to(0,\infty)$ с $\Psi(0)=0$; C_δ^ψ — константа, зависящая от δ и ψ. Значение ε_0 для ε выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\|\boldsymbol{u}_{\varepsilon_0}\|_{1,\Omega} \leqslant C_{\varepsilon_0} \|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma}, \quad |((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{\varepsilon_0},\boldsymbol{v})| \leqslant (\nu_*/2) \|\boldsymbol{v}\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\boldsymbol{v}\in V. \tag{2.4}$$

Соответствующее значение δ_0 параметра δ выбирается ниже. Подробное доказательство существования гидродинамического u_ε либо температурного T_δ лифтинга с указанными выше свойствами при выполнении условий $\boldsymbol{g}\in H^{1/2}(\Gamma)$, $(\boldsymbol{g},\boldsymbol{n})_{\Gamma(i)} = 0$, $i=1,2,\ldots,N$ (см. условие 1.3) и условия $\psi\in H^{1/2}(\Gamma)$ (см. условие 1.2) приведено в [16]. Следует отметить также работу [18], в которой подробно обсуждаются вопросы, связанные с построением гидродинамических лифтингов, и связь этих вопросов с так называемой проблемой Лерэ для уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости.

Подставляя введенное представление решения $\boldsymbol{u}$ в (2.1), (2.2), получаем следующие соотношения относительно пары $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\varphi})$:

$$(\nu(\varphi_0+\tilde{\varphi})\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}, \nabla\boldsymbol{v}) + ((\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) + ((\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) + ((\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle - \\ - (\nu(\varphi_0+\tilde{\varphi})\nabla\boldsymbol{u}_0, \nabla\boldsymbol{v}) - ((\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{b}(\varphi_0+\tilde{\varphi})(\varphi_0+\tilde{\varphi}), \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v}\in V; \tag{2.5}$$

$$(\lambda(\varphi_0+\tilde{\varphi})\nabla\tilde{\varphi}, \nabla h) + (\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) + (\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\varphi_0, h) + (\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) = \\ = \langle f, h\rangle + (\chi, h)_{\Gamma_N} - (\lambda(\varphi_0+\tilde{\varphi})\nabla\varphi_0, \nabla h) - (\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\varphi_0, h) \quad \forall h\in\mathcal{T}. \tag{2.6}$$

Для доказательства существования решения $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\varphi}) \in V\times\mathcal{T}$ задачи (2.5), (2.6) применим теорему Шаудера о неподвижной точке. Для этого введем оператор $F\colon W\to W$, действующий по формуле $F(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{w}, \eta)$ — заданная пара переменных; $\boldsymbol{y} = (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\varphi}) \in W$ — решение линейной задачи

$$a_1^{\boldsymbol{w},\eta}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) \equiv (\nu(\varphi_0+\eta)\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}, \nabla\boldsymbol{v}) + ((\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) + ((\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) + ((\boldsymbol{w}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) = \\ = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{v}\rangle + (\boldsymbol{b}(\varphi_0+\eta)(\varphi_0+\tilde{\varphi}), \boldsymbol{v}) \quad \forall\boldsymbol{v}\in V; \tag{2.7}$$

$$a_2^{\boldsymbol{w},\eta}(\tilde{\varphi}, h) \equiv (\lambda(\varphi_0+\eta)\,\nabla\tilde{\varphi}, \nabla h) + (\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) + (\boldsymbol{w}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) = \\ = \langle f_1, h\rangle - (\boldsymbol{w}\cdot\nabla\varphi_0, h) \quad \forall h\in\mathcal{T}. \tag{2.8}$$

Здесь функционалы $\boldsymbol{f}_1\colon V\to\mathbb{R}$ и $f_1\colon \mathcal{T}\to\mathbb{R}$ определяются формулами

$$\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle - (\nu(\varphi_0+\eta)\nabla\boldsymbol{u}_0, \nabla\boldsymbol{v}) - ((\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}); \tag{2.9}$$

$$\langle f_1, h\rangle = \langle f, h\rangle - (\lambda(\varphi_0+\eta)\nabla\varphi_0, \nabla h) - (\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\varphi_0, h). \tag{2.10}$$

Используя (1.11)–(1.13), (1.15)–(1.19), (2.4), получаем

$$|(\nu(\varphi_0+\eta)\nabla\boldsymbol{u}_0, \nabla\boldsymbol{v})| \leqslant \nu_{\max} C_{\varepsilon_0}\,\|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma}\,\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall\eta\in\mathcal{T}, \quad \boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^3; \tag{2.11}$$

$$(\nu(\varphi_0+\eta)\nabla\boldsymbol{v}, \nabla\boldsymbol{v}) \geqslant \nu_*\,\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall\eta\in\mathcal{T}, \quad \boldsymbol{v}\in V; \tag{2.12}$$

$$(\nu(\varphi_0+\eta)\nabla\boldsymbol{v}, \nabla\boldsymbol{v}) + ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) \geqslant (\nu_*/2)\,\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall\eta\in\mathcal{T}, \quad \boldsymbol{v}\in V; \tag{2.13}$$

$$|(\lambda(\varphi_0+\eta)\nabla\varphi_0, \nabla h)| \leqslant \lambda_{\max}\,\|\varphi_0\|_{1,\Omega}\,\|h\|_{1,\Omega} \leqslant \lambda_{\max} C_\delta^\psi\,\|h\|_{1,\Omega} \quad \forall\eta, h\in\mathcal{T}; \tag{2.14}$$

$$|(\lambda(\varphi_0+\eta)\nabla h, \nabla h)| \geqslant \lambda_*\,\|h\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall\eta, h\in\mathcal{T}; \tag{2.15}$$

$$|((\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v})| \leqslant \gamma_1\,\|\boldsymbol{u}_0\|_{1,\Omega}^2\,\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_1 C_{\varepsilon_0}^2\,\|\boldsymbol{g}\|_{1,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{v}\|_V \quad \forall\boldsymbol{v}\in V; \tag{2.16}$$

$$|(\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\varphi_0, h)| \leqslant \gamma_2\,\|\boldsymbol{u}_0\|_{1,\Omega}\,\|\varphi_0\|_{1,\Omega}\,\|h\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_2\,\|\boldsymbol{u}_0\|_{1,\Omega}\,C_\delta^\psi\,\|h\|_{1,\Omega}, \quad h\in\mathcal{T}; \tag{2.17}$$

$$|(\boldsymbol{w}\cdot\nabla\varphi_0, h)| \leqslant \gamma_2'\,\|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega}\,\|\varphi_0\|_{L^4(\Omega)}\,\|h\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_2'\delta\,\|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega}\,\|h\|_{1,\Omega} \quad \forall\boldsymbol{w}\in V, \quad h\in\mathcal{T}; \tag{2.18}$$

$$|(\boldsymbol{b}(\varphi_0+\eta)(\varphi_0+\tilde{\varphi}), \boldsymbol{v})| \leqslant \beta_p\,\|\varphi_0+\tilde{\varphi}\|_{1,\Omega}\,\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall\eta\in\mathcal{T}, \quad \boldsymbol{v}\in V. \tag{2.19}$$

Из (2.11), (2.14), (2.16), (2.17), (2.19) следует, что $\boldsymbol{f}_1\in H^{-1}(\Omega)^3$, $f_1\in\mathcal{T}^*$ и

$$\|\boldsymbol{f}_1\|_{-1,\Omega} \leqslant M_{\boldsymbol{f}_1} \equiv \|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega} + M_{\boldsymbol{g}}, \qquad M_{\boldsymbol{g}} = \nu_{\max} C_{\varepsilon_0}\,\|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma} + \gamma_1 C_{\varepsilon_0}^2\,\|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma}^2; \tag{2.20}$$

$$\|f_1\|_{\mathcal{T}^*} \leqslant M_{f_1} = \|f\|_{\mathcal{T}^*} + \lambda_{\max} C_\delta^\psi + \gamma_2 C_{\varepsilon_0}\,\|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma} C_\delta^\psi + \gamma_p C_\delta^\psi. \tag{2.21}$$

Кроме того, форма $a_2^{\boldsymbol{w},\eta}$: $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, определенная в (2.8), непрерывна и коэрцитивна с константой λ_*, введенной в (1.16), при этом выполняются оценки

$$a_2^{\boldsymbol{w},\eta}(h,h) \geqslant \lambda_{\min}(\nabla h, \nabla h) \geqslant \lambda_* \|h\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall h \in \mathcal{T}; \tag{2.22}$$

$$|\langle f_1, h\rangle - (\boldsymbol{w} \cdot \nabla\varphi_0, h)| \leqslant (M_{f_1} + \gamma_2'\delta \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega}) \|h\|_{1,\Omega} \quad \forall h \in \mathcal{T}. \tag{2.23}$$

Тогда из теоремы Лакса — Мильграма следует, что для любой пары $(\boldsymbol{w},\eta) \in V \times \mathcal{T}$ существует единственное решение $\tilde\varphi = \tilde\varphi_{\boldsymbol{w},\eta} \in \mathcal{T}$ задачи (2.8), причем

$$\|\tilde\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant c_*\gamma_2'\delta \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega} + c_* M_{f_1}, \qquad c_* = 1/\lambda_*. \tag{2.24}$$

Вернемся к задаче (2.7), полагая $\tilde\varphi = \tilde\varphi_{\boldsymbol{w},\eta}$. Из (2.19), (2.20), (2.24) следует, что для правой части задачи, полученной из задачи (2.7), справедливы неравенства

$$|\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{v}\rangle - (\boldsymbol{b}(\varphi_0+\eta)(\varphi_0+\tilde\varphi), \boldsymbol{v})| \leqslant M_{\boldsymbol{f}_1} + \beta_p \|\varphi_0 + \tilde\varphi\|_{1,\Omega} \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \leqslant$$
$$\leqslant [M_{\boldsymbol{f}_1} + \beta_p(c_*\gamma_2'\delta \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega} + c_*\tilde M_{f_1} + C_\delta^\psi)] \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Кроме того, из оценок (2.11)–(2.13) и второго тождества в (1.14) следует, что билинейная форма $a_1^{\boldsymbol{w},\eta}$: $V \times V \to \mathbb{R}$, введенная в (2.7), непрерывна и коэрцитивна с константой $\nu_*/2$. Вновь применяя теорему Лакса — Мильграма, можно сделать вывод, что для любой пары $(\boldsymbol{w},\eta) \in V \times \mathcal{T}$ существует единственное решение $\tilde{\boldsymbol{u}} \in V$ задачи (2.7) и выполняется оценка

$$(\nu_*/2) \|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{1,\Omega} \leqslant \beta_p c_*\gamma_2'\delta \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega} + U_\delta, \quad U_\delta \equiv \beta_p c_* M_{f_1} + \beta_p C_\delta^\psi + M_{\boldsymbol{f}_1}. \tag{2.25}$$

Предположим, что $\nu_* \leqslant 2\beta_p c_*\gamma_2'$, и выберем значение δ_0 для δ из условия

$$\beta_p c_*\gamma_2'\delta_0 = \nu_*/4, \qquad \delta_0 = \nu_*/(4\beta_0\gamma_2' c_*). \tag{2.26}$$

С учетом (2.26) из (2.25), (2.24) получаем

$$(\nu_*/2) \|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{1,\Omega} \leqslant (\nu_*/4) \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega} + U_{\delta_0}, \qquad \|\tilde\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant (\nu_*/4\beta_p) \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega} + c_* M_{f_1}. \tag{2.27}$$

Определим выпуклое замкнутое множество K в W формулами

$$K = \{(\boldsymbol{w},\eta) \in W\colon \quad \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega} \leqslant M_{\boldsymbol{u}}, \quad \|\eta\|_{1,\Omega} \leqslant M_{\tilde\varphi}\}; \tag{2.28}$$

$$M_{\boldsymbol{u}} = (4/\nu_*) U_{\delta_0}, \qquad M_{\hat\varphi} = \beta_p^{-1} U_{\delta_0} + c_0 M_{f_1}. \tag{2.29}$$

Введенный выше оператор F отображает множество K в себя. Следовательно, для любой пары $(\boldsymbol{w},\eta) \in K$ решение $(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde\varphi)$ задачи (2.7), (2.8) удовлетворяет оценкам

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{1,\Omega} \leqslant M_{\tilde{\boldsymbol{u}}}, \qquad \|\tilde\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant M_{\tilde\varphi}, \qquad \|\varphi_0 + \tilde\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant M_\varphi \equiv M_{\tilde\varphi} + C_{\delta_0}^\psi. \tag{2.30}$$

Осталось доказать, что оператор F является непрерывным и компактным на введенном множестве K. Для этого обозначим через $\boldsymbol{z}_n = (\boldsymbol{w}_n,\eta_n)$, $n = 1,2,\ldots$ произвольную последовательность из K. Полагая $\boldsymbol{y}_n \equiv (\tilde{\boldsymbol{u}}_n,\tilde\varphi_n) = F(\boldsymbol{z}_n)$, $n = 1,2,\ldots$, покажем, что из последовательности $\boldsymbol{y}_n$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме X к некоторому элементу $\boldsymbol{y} \in K$.

В силу компактности вложений $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ и $H^1(\Omega)^3 \subset L^4(\Omega)^3$ существует подпоследовательность последовательности $\{\boldsymbol{z}_n\} = \{(\boldsymbol{w}_n,\eta_n)\}$, которую вновь обозначим через $\{\boldsymbol{z}_n\}$, а также переменная $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{w},\eta) \in K$, такие что

$$\boldsymbol{w}_n \to \boldsymbol{w} \quad \text{слабо в } H^1(\Omega)^3 \text{ и сильно в } L^4(\Omega)^3 \text{ при } n \to \infty; \tag{2.31}$$

$$\eta_n \to \eta \quad \text{слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^4(\Omega) \text{ при } n \to \infty. \tag{2.32}$$

Пусть $\boldsymbol{y} \equiv (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\varphi}) = F(\boldsymbol{z})$. По построению, элемент $\boldsymbol{y} \in W$ является решением задачи (2.7), (2.8), а элемент $\boldsymbol{y}_n \equiv (\tilde{\boldsymbol{u}}_n, \tilde{\varphi}_n) \in W$ — решением задачи

$$a_1^{\boldsymbol{w}_n,\eta_n}(\tilde{\boldsymbol{u}}_n, \boldsymbol{v}) \equiv (\nu(\varphi_0 + \eta_n)\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}_n, \nabla\boldsymbol{v}) + ((\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla)\tilde{\boldsymbol{u}}_n, \boldsymbol{v}) + ((\tilde{\boldsymbol{u}}_n \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) + \\ + ((\boldsymbol{w}_n \cdot \nabla)\tilde{\boldsymbol{u}}_n, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle - (\nu(\varphi_0 + \eta_n)\nabla\boldsymbol{u}_0, \nabla\boldsymbol{v}) - ((\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) + \\ + (\boldsymbol{b}(\varphi_0 + \eta_n)(\varphi_0 + \tilde{\varphi}_n), \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V; \quad (2.33)$$

$$a_2^{\boldsymbol{w}_n\eta_n}(\varphi_n, h) \equiv (\lambda(\varphi_0 + \eta_n)\nabla\tilde{\varphi}_n, \nabla h) + (\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla\tilde{\varphi}_n, h) + (\boldsymbol{w}_n \cdot \nabla\tilde{\varphi}_n, h) = \\ = \langle f, h\rangle - (\lambda(\varphi_0 + \eta_n)\nabla\varphi_0, \nabla h) - (\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla\varphi_0, h) - (\boldsymbol{w}_n \cdot \nabla\varphi_0, h) \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (2.34)$$

Покажем, что $\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi}$ в $H^1(\Omega)$ и $\tilde{\boldsymbol{u}}_n \to \tilde{\boldsymbol{u}}$ в $H^1(\Omega)^3$ при $n \to \infty$. Для этого вычтем (2.7), (2.8) из (2.33), (2.34). После ряда преобразований получаем

$$a_2^{\boldsymbol{w}_n,\eta_n}(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}, h) \equiv (\lambda(\varphi_0 + \eta_n)\nabla(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}), \nabla h) + (\boldsymbol{w}_n \cdot \nabla(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}), h) + \\ + (\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}), h) = -((\lambda(\varphi_0 + \eta_n) - \lambda(\varphi_0 + \eta))\, \nabla(\varphi_0 + \tilde{\varphi}), \nabla h) - \\ - ((\boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{w}) \cdot \nabla(\varphi_0 + \tilde{\varphi}), h) \quad \forall h \in \mathcal{T}; \quad (2.35)$$

$$a_1^{\boldsymbol{w}_n,\eta_n}(\tilde{\boldsymbol{u}}_n - \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) \equiv (\nu(\varphi_0 + \eta_n)\, \nabla(\tilde{\boldsymbol{u}}_n - \tilde{\boldsymbol{u}}), \nabla\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla)(\tilde{\boldsymbol{u}}_n - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \\ + (((\tilde{\boldsymbol{u}}_n - \tilde{\boldsymbol{u}}) \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) + (((\boldsymbol{w}_n \cdot \nabla)(\tilde{\boldsymbol{u}}_n - \tilde{\boldsymbol{u}}_n), \boldsymbol{v})) = \\ = -((\nu(\varphi_0 + \eta_n) - \nu(\varphi_0 + \eta))\, \nabla(\boldsymbol{u}_0 + \tilde{\boldsymbol{u}}), \nabla\boldsymbol{v}) - (((\boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{w}) \cdot \nabla)\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) + \\ + (\boldsymbol{b}(\varphi_0 + \eta_n)(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}), \boldsymbol{v}) + ((\boldsymbol{b}(\varphi_0 + \eta_n) - \boldsymbol{b}(\varphi_0 + \eta))(\varphi_0 + \tilde{\varphi}), \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \quad (2.36)$$

Используя (1.17), оценку в (2.30) для $\|\varphi_0 + \tilde{\varphi}\|_{1,\Omega}$ и (2.31), находим

$$\|((\boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{w}) \cdot \nabla(\varphi_0 + \tilde{\varphi}), h)\| \leqslant \gamma_2' \, \|\boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{w}\|_{L^4(\Omega)} \, \|\varphi_0 + \tilde{\varphi}\|_{1,\Omega} \, \|h\|_{1,\Omega} \leqslant \\ \leqslant \gamma_2' M_\varphi \, \|\boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{w}\|_{L^4(\Omega)^3} \, \|h\|_{1,\Omega} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (2.37)$$

Кроме того, из леммы Лебега о мажорантной сходимости следует

$$((\lambda(\varphi_0 + \eta_n) - \lambda(\varphi_0 + \eta))\nabla(\varphi_0 + \tilde{\varphi}), \nabla h) \equiv \\ \equiv \int_\Omega (\lambda(\varphi_0 + \eta_n) - \lambda(\varphi_0 + \eta))\, \nabla(\varphi_0 + \tilde{\varphi}) \cdot \nabla h \, dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (2.38)$$

В этом случае из теоремы Лакса — Мильграма, примененной к задаче (2.35), в силу (2.37), (2.38) следует, что $\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi}$ при $n \to \infty$. По аналогичной схеме доказывается, что $\tilde{\boldsymbol{u}}_n \to \tilde{\boldsymbol{u}}$ при $n \to \infty$.

Таким образом, показано, что оператор $F\colon W \to W$ непрерывен и компактен на K. В данном случае из теоремы Шаудера следует, что оператор F имеет неподвижную точку $\boldsymbol{y} \equiv (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\varphi}) = F(\boldsymbol{z}) \in K$. Это означает, что пара $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \tilde{\boldsymbol{u}}$, $\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}$ является решением задачи (2.1)–(2.3) и справедливы оценки

$$\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} \leqslant M_{\boldsymbol{u}} \equiv M_{\tilde{\boldsymbol{u}}} + C_{\varepsilon_0} \, \|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma}, \qquad \|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant M_\varphi \equiv M_{\tilde{\varphi}} + C_{\delta_0}^{\psi}. \quad (2.39)$$

Случай, когда выполняется условие $\nu_* > 2\beta_p c_* \gamma_2'$, исследуется по аналогичной схеме. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1.1–1.5. *Тогда существует хотя бы одно слабое решение* $(\boldsymbol{u}, \varphi) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)$ *задачи* (2.1)–(2.3), *для которого справедливы оценки* (2.39).

3. Условная единственность решения задачи. Докажем условную единственность слабого решения $(\boldsymbol{u},\varphi)$ задачи 1 при условии, что компонента φ обладает дополнительным свойством гладкости, а именно $\varphi\in H^2(\Omega)$. Предположим в дополнение к условию 1.5, что для коэффициентов $\nu(\,\cdot\,)$ и $\lambda(\,\cdot\,)$ выполняются следующие условия:

3.1. $\lambda(\,\cdot\,)$ принадлежит $C^1(\mathbb{R})$ и $0<\lambda'_{\min}\leqslant\lambda'(s)\leqslant\lambda'_{\max}$ $\forall s\in\mathbb{R}$.

3.2. Функции ν, λ, λ' непрерывны по Липшицу на $\mathbb{R}$ с константами Липшица L_ν, L_λ, L'_λ соответственно.

3.3. $\Gamma\in C^{1,1}$, $\overline{\Gamma_D}\cap\overline{\Gamma_N}=\varnothing$, $f\in L^2(\Omega)$, $\psi\in H^{3/2}(\Gamma_D)$, $\chi=0$.

Предварительно рассмотрим смешанную краевую задачу

$$\Delta\varphi=-f \quad \text{в} \quad \Omega,\qquad \varphi\big|_{\Gamma_D}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_N}=0,\quad f\in L^2(\Omega). \tag{3.1}$$

Известно, что при выполнении условий 1.1, 3.3 решение $\varphi\in H^2(\Omega)$ задачи (3.1) существует, единственно и для него справедлива оценка $\|\varphi\|_{2,\Omega}\leqslant C_\Omega\|f\|_\Omega$ с константой C_Ω, не зависящей от f [19]. Отсюда следует, что норма $\|\varphi\|_{2,\Omega}$ в подпространстве $\tilde H^2(\Omega)=\{\varphi\in H^2(\Omega)\colon \varphi|_{\Gamma_D}=0,\ \partial\varphi/\partial n|_{\Gamma_N}=0\}$ эквивалентна норме $\|\Delta\varphi\|_\Omega$, т. е. справедливы следующие оценки:

$$\|\Delta h\|_\Omega\leqslant\tilde C_1\|h\|_{2,\Omega},\qquad \|h\|_{2,\Omega}\leqslant\tilde C_2\|\Delta h\|_\Omega\quad\forall\, h\in\tilde H^2(\Omega). \tag{3.2}$$

Здесь $\tilde C_i$, $i=1,2,\ldots$ — положительные константы, зависящие от Ω.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1.1–1.5 *и* 3.1–3.3. *Если существует слабое решение* $(\boldsymbol{u},\varphi)\in H^1(\Omega)^3\cap H^2(\Omega)$ *задачи* 1, *удовлетворяющее условиям* $\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}<\varepsilon$, $\|\varphi\|_{2,\Omega}<\varepsilon$, *то существует число* $\varepsilon>0$, *такое что это решение единственно.*

Доказательство. Предположим, что существует два слабых решения $(\boldsymbol{u}_i,\varphi_i)\in H^1(\Omega)^3\times H^2(\Omega)$, $i=1,2$ задачи (2.1)–(2.3). Тогда разности $\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\in H^1(\Omega)^3$, $\varphi=\varphi_1-\varphi_2\in\tilde H^2(\Omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}(\nu(\varphi_2)\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})+((\boldsymbol{u}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-((\nu(\varphi_1)-\nu(\varphi_2))\nabla\boldsymbol{u}_1,\nabla\boldsymbol{v})+\\ +(\boldsymbol{b}(\varphi_2)\varphi,\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{b}(\varphi_1)-\boldsymbol{b}(\varphi_2),\varphi_1\boldsymbol{v})-((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v})\quad\forall\boldsymbol{v}\in V;\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}-(\lambda(\varphi_1)\Delta\varphi,h)=(\lambda'(\varphi_1)\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi,h)-(k(\varphi_1)\varphi,h)-(\boldsymbol{u}_2\cdot\nabla\varphi,h)+\\ +(((\lambda'(\varphi_1)-\lambda'(\varphi_2))\nabla\varphi_1+\lambda'(\varphi_2)\nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi_2,h)+((\lambda(\varphi_1)-\lambda(\varphi_2))\Delta\varphi_2,h)-\\ -(k(\varphi_1)-k(\varphi_2),\varphi_2h)-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi_1,h)\quad\forall h\in L^2(\Omega).\end{gathered} \tag{3.4}$$

Полагая $h=\Delta\varphi$ в (3.4) и $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ в (3.3), получаем

$$\begin{gathered}-(\lambda(\varphi_1)\Delta\varphi,\Delta\varphi)=(\lambda'(\varphi_1)\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi,\Delta\varphi)-(k(\varphi_1)\varphi,\Delta\varphi)-(\boldsymbol{u}_2\cdot\nabla\varphi,\Delta\varphi)+\\ +(((\lambda'(\varphi_1)-\lambda'(\varphi_2))\nabla\varphi_1+\lambda'(\varphi_2)\nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi_2,\Delta\varphi)+\\ +((\lambda(\varphi_1)-\lambda(\varphi_2))\Delta\varphi_2,\Delta\varphi)-(k(\varphi_1)-k(\varphi_2),\varphi_2\Delta\varphi)-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi_1,\Delta\varphi);\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}(\nu(\varphi_2)\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{u})=-((\nu(\varphi_1)-\nu(\varphi_2))\nabla\boldsymbol{u}_1,\nabla\boldsymbol{u})+\\ +(\boldsymbol{b}(\varphi_2)\varphi,\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{b}(\varphi_1)-\boldsymbol{b}(\varphi_2),\varphi_1\boldsymbol{u})-((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}).\end{gathered} \tag{3.6}$$

Используя стандартные рассуждения, основанные на оценках каждого слагаемого в (3.5), (3.6), с помощью неравенств, приведенных в п. **2**, и оценок (3.2) находим следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\nu_*\|\boldsymbol{u}\|^2_{1,\Omega}\leqslant\gamma_1\|\boldsymbol{u}_1\|_{1,\Omega}\|\boldsymbol{u}\|^2_{1,\Omega}+L_\nu\tilde C_2\tilde C_4\|\boldsymbol{u}_1\|_{1,\Omega}\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}\|\Delta\varphi\|_\Omega+\\ +\beta_p\tilde C_2\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}\|\Delta\varphi\|_\Omega+L_b\hat C_p\tilde C_2\tilde C_4\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_{1,\Omega}\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega};\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\lambda_{\min} \|\Delta\varphi\|_\Omega^2 \leqslant a \|\Delta\varphi\|_\Omega^2 + C_4\tilde{C}_5 \|\varphi_1\|_{2,\Omega} \|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} \|\Delta\varphi\|_\Omega. \tag{3.8}$$

Здесь константа a, зависящая от φ_1, φ_2, $\boldsymbol{u}_2$, определяется формулой

$$a = \lambda'_{\max}\tilde{C}_5 C_6 \|\varphi_1\|_{2,\Omega} + C_4\tilde{C}_5 \|\boldsymbol{u}_2\|_{1,\Omega} + L'_\lambda \tilde{C}_2\tilde{C}_4\tilde{C}_5^2 \|\varphi_1\|_{2,\Omega} \|\varphi_2\|_{2,\Omega} + \\ + \lambda'_{\max}\tilde{C}_5\tilde{C}_6 \|\varphi_2\|_{2,\Omega} + L_\lambda \tilde{C}_2\tilde{C}_4 \|\Delta\varphi_2\|_\Omega. \tag{3.9}$$

Предположим, что константа a мала в том смысле, что $a \leqslant (1/2)\lambda_{\min}$. Тогда из (3.7), (3.8) получаем последовательно неравенства

$$\|\Delta\varphi\|_\Omega \leqslant 2\lambda_{\min}^{-1} C_4\tilde{C}_5 \|\varphi_1\|_{2,\Omega} \|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}, \qquad \nu_* \|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}^2 \leqslant b \|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}^2. \tag{3.10}$$

Здесь константа b, зависящая от $\boldsymbol{u}_1$ и φ_1, определяется формулой

$$b = \gamma_1 \|\boldsymbol{u}_1\|_{1,\Omega} + 2\lambda_{\min}^{-1} C_4\tilde{C}_5 \|\varphi_1\|_{2,\Omega} (L_\nu \tilde{C}_2\tilde{C}_4 \|\boldsymbol{u}_1\|_{1,\Omega} + \beta_p \tilde{C}_2 + L_b \hat{C}_p \tilde{C}_2\tilde{C}_4 \|\varphi_1\|_{2,\Omega}). \tag{3.11}$$

Предположим в дополнение к условию $a \leqslant \lambda_{\min}/2$, что $b < \nu_*$. Тогда из (3.2), (3.10) получаем $\boldsymbol{u} = 0$, $\Delta\varphi = 0$ и $\varphi = 0$. Поскольку в силу (3.9), (3.11) условия $a \leqslant \lambda_{\min}/2$ и $b < \nu_*$ заведомо выполняются, если $\|\varphi\|_{2,\Omega} < \varepsilon$ и $\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} < \varepsilon$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$, теорема доказана.

Заключение. В работе исследована неоднородная краевая задача для стационарной модели массопереноса Буссинеска в предположении, что коэффициенты ν, λ, b модели зависят от концентрации вещества. Установлены условия для указанных коэффициентов и другие данные, обеспечивающие глобальную разрешимость задачи. Доказана условная единственность слабого решения с дополнительным свойством гладкости для концентрации.

Авторы выражают благодарность В. В. Пухначеву за ценные консультации по проблематике работы и полезные обсуждения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пухначев В. В.** Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.
2. **Пухначев В. В.** Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 23–31.
3. **Ershkov S., Prosviryakov E., Burmasheva N. V., Christianto V.** Solving the hydrodynamical system of equations of inhomogeneous fluid flows with thermal diffusion: a review // Symmetry. 2023. V. 15, N 10. 1825.
4. **Бирих Р. В., Пухначев В. В.** Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 3. С. 323–327.
5. **Андреев В. К., Степанова И. В.** Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека — Буссинеска // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 13–24.
6. **Ershkov S., Burmasheva N. V., Leshchenko D. D., Prosviryakov E.** Exact solutions of the Oberbeck — Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows // Symmetry. 2023. V. 15, N 9. 1730.
7. **Andreev V. K.** Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics / V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachev, A. A. Rodionov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
8. **Степанова И. В.** Симметрии в уравнениях тепломассопереноса в вязких жидкостях (обзор) // Вестн. Омск. ун-та. 2019. Т. 24, № 2. С. 51–65.
9. **Lorca S. A., Boldrini J. L.** Stationary solutions for generalized Boussinesq models // J. Different. Equat. 1996. V. 124. P. 389–406.

10. **Барановский Е. С., Домнич А. А.** О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 3. С. 317–327.
11. **Alekseev G. V., Brisitskii R. V.** Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer with variable coefficients // Symmetry. 2022. V. 14, N 12. 2580.
12. **Kim T.** Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions // Appl. Math. 2022. V. 67. P. 593–613.
13. **Alekseev G. V., Soboleva O. V.** Inhomogeneous boundary value problems for the generalized Boussinesq model of mass transfer // Mathematics. 2024. V. 12, N 3. 391.
14. **Joseph D. D.** Stability of fluid motions. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
15. **Girault V.** Finite element methods for Navier — Stokes equations. Theory and algorithms / V. Girault, P. A. Raviart. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
16. **Алексеев Г. В.** Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Науч. мир, 2010.
17. **Алексеев Г. В., Соболева О. В., Терешко Д. А.** Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 24–35.
18. **Коробков М. В., Пилецкас К., Пухначев В. В., Руссо Р.** Задача протекания для уравнений Навье — Стокса // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 6. С. 115–176.
19. **Grisvard P.** Elliptic problems in nonsmooth domains: Reprint of the 1985 hardback ed. Philadelphia: SIAM, 2011.

Поступила в редакцию 7/V 2024 г.,
после доработки — 23/V 2024 г.
Принята к публикации 3/VI 2024 г.