

УДК 532.5

О НАЛИЧИИ ТРЕХ РЕШЕНИЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЙ СВЕРХКРИТИЧЕСКИМ УСТАНОВИВШИМСЯ ПОТОКОМ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

К. Е. Афанасьев, С. В. Стуколов

Кемеровский государственный университет, 650043 Кемерово

Работа посвящена решению стационарной задачи об обтекании полукругового цилиндра, расположенного на дне, потоком идеальной несжимаемой жидкости. В результате расчетов выявлено, что задача имеет по крайней мере три решения относительно числа Фруда. При отсутствии препятствия на дне предложенный алгоритм позволяет строить уединенные волны вплоть до предельных. В работе приводятся важнейшие волновые характеристики: циркуляция, масса, потенциальная и кинетическая энергии волны. Анализ результатов расчетов позволил сделать вывод о том, что все максимальные значения характеристик уединенных волн достигаются до наступления максимальной амплитуды, максимум массы не совпадает с максимумами полной энергии и числа Фруда.

Исследованию течений вязкой жидкости посвящены многие работы. Например, в работе [1] решена задача о сверхкритическом течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном и сделан важный вывод о том, что при симметричной форме препятствия на дне форма свободной поверхности также симметрична. Однако при обтекании бугра при числах Фруда (Fr), близких к единице, задача имеет неединственное решение. Этот факт впервые доказан в [2]. Вопрос о построении двух решений в точной нелинейной постановке численно изучался в работе [3], где показано, что первое решение при отсутствии препятствия соответствует прямолинейному потоку, а второе описывает уединенную волну. Автор работы [3] вместо числа Фруда вводит параметр $V = v_0/v_\infty$, характеризующий отношение скорости v_0 в вершине волны к скорости набегающего потока v_∞ . При этом число Фруда есть функция от V : $Fr = Fr(V)$. Введение параметра V обеспечивает единственность решения задачи обтекания препятствий и позволяет строить волны (вплоть до предельных) во всем диапазоне чисел Фруда. Существование гравитационных волн с достаточно большим периодом, включая уединенные волны, доказано в [4]. В работе [5] с помощью вариационного принципа установлено, что для бесконечного множества значений числа Фруда задача имеет по крайней мере два различных решения.

В настоящей работе показано, что существует диапазон чисел Фруда (в зоне волн максимальной амплитуды), при которых данная задача имеет *три решения*. Задача решается методом комплексных граничных элементов [6]. Контроль точности метода проводится на тестовых расчетах и сравнении полученных результатов с работами других авторов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о течении идеальной невязкой несжимаемой жидкости со свободной границей C_1 вдоль дна C_3 , состоящего из прямолинейных участков и цилиндрического выступа радиуса R . Область течения D ограничена, кроме того, участками втекания C_2 и вытекания C_4 (рис. 1). Данная задача может быть описана уравнением Лапласа

$$\Delta w(z) = 0, \quad z = x + iy \in D$$

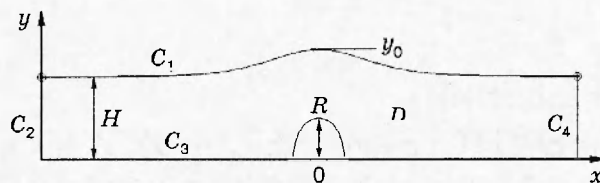


Рис. 1

для функции комплексного потенциала $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — потенциал скорости и $\psi(x, y)$ — функция тока, удовлетворяющие условиям Коши — Римана. На боковых участках границы области и дне выполняются краевые условия вида

$$\operatorname{Im} w(z) = 0, \quad z \in C_3, \quad \operatorname{Im} w(z) = \operatorname{Im} z, \quad z \in C_2, C_4.$$

Свободная граница является линией тока ($\operatorname{Im} w = 1$), на которой справедливо уравнение Бернулли

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = 1 - 2(\operatorname{Im} z - 1)/\operatorname{Fr}^2, \quad z \in C_1, \quad (1.1)$$

где $\operatorname{Fr} = V_\infty/\sqrt{gH}$ (H — глубина, V_∞ — скорость втекающего потока). Свободная поверхность C_1 заранее неизвестна и должна быть найдена численно в ходе решения задачи.

2. Интегральная формула Коши. Известно, что для любой аналитической функции w , заданной на кусочно-гладкой границе $C = \bigcup_{j=1}^4 C_j$, справедлива интегральная формула Коши

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w(z)}{z - z_0} dz, \quad z_0 \in D.$$

Кроме того, функция $w(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера — Липшица на границе C : $|w(z_1) - w(z_2)| < k|z_1 - z_2|^\alpha$, где $0 < \alpha \leq 1$, k — некоторая постоянная, z_1 и z_2 — любые две точки границы C .

Тогда на основании формул Сохоцкого для любой точки $z_0 \in C$ справедливо соотношение

$$w(z_0) = w(z_0^+) - w(z_0^-) = \lim_{\xi \rightarrow z_0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w(z)}{z - \xi} dz = \frac{1}{2} w(z_0) + \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w(z)}{z - z_0} dz.$$

Следовательно,

$$w(z_0) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{w(z)}{z - z_0} dz, \quad z_0 \in C.$$

Запись $\xi \rightarrow z_0^+$ означает, что точка ξ стремится к точке z_0 , оставаясь внутри области D , $w(z_0^-) \equiv 0$.

Так как в ходе итерационного процесса на свободной поверхности известна действительная часть $\operatorname{Re} w(z)$, а мнимая часть $\operatorname{Im} w(z)$ известна на твердых стенках, то для функции w имеем смешанную краевую задачу. Численное решение этой задачи можно получить, разбив контур C на N линейных элементов Γ_j узлами z_j ($j = \overline{1, N}$). Тогда

$$w(z) = \lim_{\max |\Gamma_j| \rightarrow 0} G(z),$$

Таблица 1

$N(N_g)$	E_1	E_2	E_3	$\max y^T - y^C $
72(30)	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$
145(60)	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$7,2 \cdot 10^{-4}$
290(120)	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-4}$
580(240)	$7,6 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$

где $G(z)$ — линейная глобальная пробная функция для $z \in \sum_{j=1}^n \Gamma_j$, и $G(z) = \sum_{j=1}^n w_j \Lambda_j(z)$, где w_j — значение $w(z)$ в точке z_j , $\Lambda_j(z)$ — линейная базисная функция

$$\Lambda_j(z) = \begin{cases} (z - z_j)/(z_j - z_{j-1}), & z \in \Gamma_{j-1}, \\ (z_{j+1} - z)/(z_{j+1} - z_j), & z \in \Gamma_j, \\ 0, & z \notin \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_j. \end{cases}$$

После указанного разбиения и линейной аппроксимации функции $w(z)$ на границе интеграл Коши можно вычислить аналитически в смысле главного значения при $z \rightarrow z_j$. В результате получим

$$2\pi i w_j = w_{j+1} - w_{j-1} + w_j \ln \left(\frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} \right) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j, j+1}}^N I_m, \quad (2.1)$$

где

$$I_m = w_{m+1} - w_m + \left[\frac{(z_j - z_m)w_{m+1}}{z_{m+1} - z_m} - \frac{(z_j - z_{m+1})w_m}{z_{m+1} - z_m} \right] \ln \left(\frac{z_{m+1} - z_j}{z_m - z_j} \right).$$

Подставив в это равенство известные действительные или мнимые части функции w при $j = 1, N$, получим систему N линейных алгебраических уравнений относительно N неизвестных для определения $\operatorname{Re} w$ на C_3, C_4 и $\operatorname{Im} w$ на C_1, C_2 . Точность расчета и сходимость метода проверялись по тесту, предложенному в [7]. Требуется найти решение уравнения Лапласа в области $D = \{0 \leq x \leq 2\pi; -1 \leq y \leq \sin(x)\}$, для которой на дне и вертикальных стенках ставится условие непротекания $\operatorname{Im} w(z) = 0$, а на верхней границе — условие $\operatorname{Re} w(z) = -\cos(x) \operatorname{ch}(y+1)$, правая часть в котором является гармонической функцией. В табл. 1 приведены относительные погрешности в зависимости от количества узлов на границе (N — число узлов на всей границе, N_g — на свободной границе)

$$E_1 = \frac{\max |\operatorname{Im} w^T - \operatorname{Im} w^C|}{\max |\operatorname{Im} w^T|}, \quad E_2 = \frac{\max |V_x^T - V_x^C|}{\max |V_x^T|}, \quad E_3 = \frac{\max |V_y^T - V_y^C|}{\max |V_y^T|},$$

где w^C, V_x^C, V_y^C — численные значения функции комплексного потенциала и компонент вектора скорости, а $\operatorname{Im} w^T(x, y) = \sin(x) \operatorname{sh}(y+1)$, $V_x^T = \sin(x) \operatorname{ch}(y+1)$, $V_y^T = -\cos(x) \operatorname{sh}(y+1)$ — точные значения.

Двойные узлы. При решении гидродинамических задач численными методами возникает серьезная проблема удовлетворения граничных условий в угловых точках, принадлежащих одновременно границам задания вещественной и мнимой частей функции w . Некорректное обращение с данными узловыми «особенностями» существенно влияет на точность полученных результатов и устойчивость алгоритма при моделировании свободных границ. В методах граничных элементов обойти указанные сложности удается с помощью введения двойных узлов.

Пусть двойной узел описывается тождеством $z_{m+1} \equiv z_m$. Предположим, что $z_m \in C_1$ и в этом узле задан потенциал $\text{Re } w$, а $z_{m+1} \in C_2$ и в нем задана функция $\text{Im } w$. В силу непрерывности функции w в двойном узле будут выполняться естественные условия

$$\text{Im } w_m = \text{Im } w_{m+1}, \quad \text{Re } w_{m+1} = \text{Re } w_m. \quad (2.2)$$

В этом случае из системы уравнений (2.1) следует исключить m -е и $(m+1)$ -е строки, заменив их условием (2.2). Кроме того, в элементах m -х и $(m+1)$ -х столбцов матрицы системы уравнений (2.1) отсутствуют вклады интегралов по элементу Γ_m , имеющему нулевую длину. В данной задаче в точках пересечения свободной границы C_1 с боковыми участками C_2 и C_4 наблюдается смена типа граничных условий, и поэтому при ее решении применяется предложенная методика.

3. Алгоритм построения свободной границы. Нахождение потенциала. Пусть на k -м приближении известна граница C_1 . Для того чтобы начать итерационный процесс, необходимо найти потенциал $\varphi(x, y) = \text{Re } w(z)$ на границе C_1 . Выразим из уравнения Бернулли (1.1) модуль вектора скорости

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = q = \sqrt{1 + 2(1-y)/\text{Fr}^2}. \quad (3.1)$$

Применяя методику, предложенную в [3], введем параметр $V = v_0/v_\infty$, тогда уравнение (3.1) примет вид

$$q = \sqrt{1 - (1 - V^2) \frac{y-1}{y_0-1}}, \quad (3.2)$$

где y_0 — ордината точки свободной поверхности, в которой задана скорость v_0 .

Поскольку граница C_1 является линией тока, то вектор скорости на ней направлен по касательной к контуру. Отсюда следует, что $q = \partial\varphi/\partial s$. Так как потенциал определяется с точностью до аддитивной константы, полагаем $\varphi_1 = 0$. Далее для любой точки свободной границы

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{q_i + q_{i+1}}{2} \Delta s_i, \quad (3.3)$$

где $i = \overline{1, N_g}$ — номера узлов точек свободной границы; $q_i = q(y_i)$ определяется формулой (3.2); $\Delta s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$ — длина i -го элемента свободной границы.

Определение формы свободной границы. Алгоритм нахождения свободной границы осуществляется по следующей схеме:

- 1) пусть известно некоторое положение свободной границы $C_1^{(k)}$;
- 2) определяются значения φ_i в узлах z_i на $C_1^{(k)}$ по (3.3);
- 3) решается система линейных уравнений (2.1);
- 4) в точках свободной границы $C_1^{(k)}$ определяются значения компонент вектора скорости

$$U_i = \text{Re} \frac{dw}{dz}, \quad V_i = -\text{Im} \frac{dw}{dz};$$

- 5) из условия коллинеарности вектора скорости и касательной к границе ($dy/dx = V/U$) вычисляется новое положение свободной границы $C_1^{(k+1)}$:

$$y_{i+1}^{k+1} = y_i^{k+1} + \Delta y_i^k,$$

где приращение Δy_i^k определяется на основе разложения в ряд Тейлора:

$$\Delta y_i^k = \frac{V_i}{U_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{d}{dx} \left(\frac{V_i}{U_i} \right) (x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + \frac{1}{4!} \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{V_i}{U_i} \right) (x_{i+1} - x_i)^4.$$

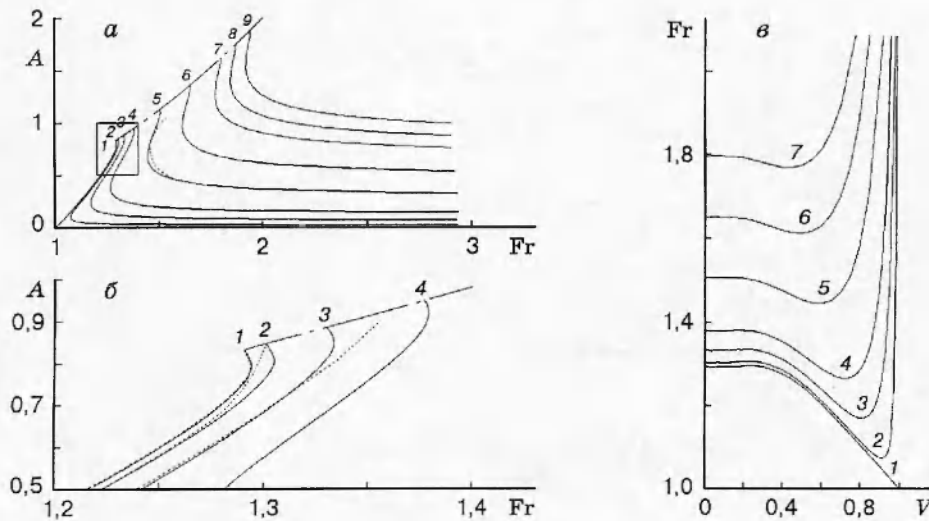


Рис. 2

Цикл повторяется до выполнения требуемой точности: $\max_i |y_i^{k+1} - y_i^k| < \varepsilon$. Затем вычисляется число Фруда по формуле $Fr = \sqrt{2(y_0 - 1)/(1 - V^2)}$. В качестве нулевого приближения берется прямая линия $y^0 = 1$, исключение составляет окрестность точки y_0 , в которой начальное значение полагаем $y_0^0 = 1 + 0,001$.

Для вычисления производных в точках границы области применялись схемы высокого порядка точности [8]. Алгоритм построения свободной границы тестировался по методике, предложенной в [3], и показал высокие точность и скорость сходимости. Согласно этой методике требуется найти уравнение линии тока $\psi = 1$ по распределению скоростей на ней из аналитического решения об обтекании цилиндра безграничным потоком идеальной жидкости. Отклонения свободной границы от точного решения в зависимости от числа точек на границе в результате пяти итераций приведены в табл. 1.

Используемый для построения свободной границы алгоритм ранее успешно применялся в работе [9]. Отличие состоит в том, что в настоящей работе приращение Δy находится путем разложения в ряд Тейлора. Это позволило сократить количество итераций и увеличить точность метода, особенно на предельных режимах.

4. Обсуждение результатов. Обтекание препятствий. Если для построения решений задачи обтекания препятствий потоком жидкости использовать интеграл Бернулли в виде (3.1), то удастся построить лишь тривиальное решение, которое описывает равномерный поток при исчезновении препятствия. В этом случае решение справедливо для некоторых значений числа Фруда ($Fr \geq 1$), зависящих от отношения R/H (радиуса цилиндра R и глубины потока H), ниже которых стационарного решения не существует. Данная задача допускает и второе решение, построение которого приведено в [3]. Поиску двух решений посвящена и работа [10], где проведены расчеты зависимости амплитуды волны от числа Фруда при $R/H = 0,2; 0,5$. В этой работе задача не досчитана до конца в области амплитуд, близких к предельному значению. В работе [3] приведен подробный расчет только для $R/H = 0,1$. Автором не отмечен факт неоднозначной зависимости амплитуды $A = A(Fr)$ при значениях амплитуды, близких к предельному. Наши расчеты, результаты которых приведены на рис. 2, показали, что нелинейная задача обтекания препятствия потоком идеальной тяжелой жидкости имеет еще одно, *третье* решение в области предельных значений амплитуды волны. Факт наличия неоднозначности реше-

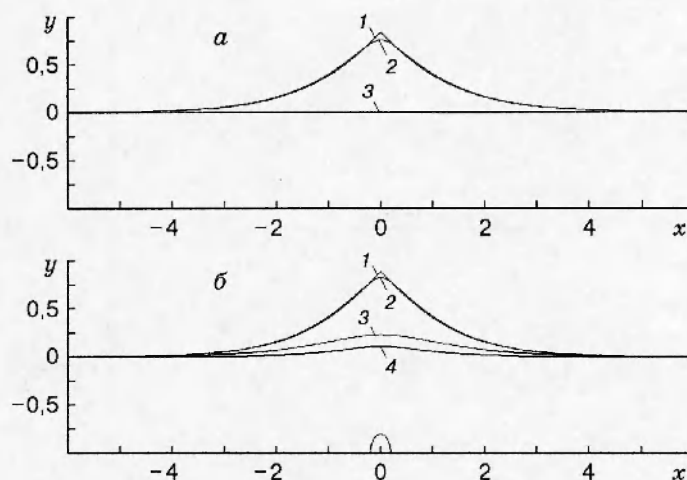


Рис. 3

ния для уединенной волны отмечен в [10, 11].

На рис. 2,а представлены результаты расчетов зависимости амплитуды A от числа Фруда для различных значений R/H . Кривая 1 отвечает $R/H = 0$ и описывает уединенную волну, кривые 2–9 соответствуют отношению $R/H = 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1,0; 1,1$. Штрихпунктирная линия соединяет точки кривых, отвечающие максимальному значению $A_{\max} = Fr^2/2$. Штриховая линия в окрестности кривой 5 соответствует расчетам работы [10]. Прямоугольником выделена область, где имеется неоднозначное поведение решения в зоне предельной волны. Эта область в увеличенном виде (масштабе) представлена на рис. 2,б, где расчеты для $R/H = 0$ (уединенной волны) полностью соответствуют расчетам, проведенным Д. В. Маклаковым на основе разработанной им теории [12] (расчеты для $R/H = 0,1$ взяты из [3], для $R/H = 0,2$ — из [10]). Зависимость числа Фруда от параметра V при тех же значениях R/H приведена на рис. 2,в, который иллюстрирует, хотя и менее четко, неоднозначную зависимость $Fr = Fr(V)$ в зоне предельных волн.

На рис. 3,а показаны формы свободной поверхности для $R/H = 0$, соответствующие трем решениям при одном и том же числе Фруда $Fr = 1,2910$ для $A = 0,8332; 0,7531; 0$ (кривые 1–3); на рис. 3,б — для $R/H = 0,2$, $Fr = 1,3322$ при $A = 0,8875; 0,8220; 0,1106$ (кривые 1, 2, 4). Для последнего случая приведена также форма волны для числа Фруда, являющегося максимальным для первого решения и началом для второго решения ($Fr = 1,1704$, $A = 0,2355$ — кривая 3).

Интегральные характеристики уединенных волн. Важной является задача определения интегральных характеристик, таких как циркуляция C , масса M , потенциальная P и кинетическая K энергии. Знание этих характеристик позволяет использовать их для контроля точности численного метода. Выше рассматривалось стационарное движение жидкости. Для характеристики уединенной волны, распространяющейся по «спокойной» воде, вводится новая функция $W(z) = Fr(w(z) - z)$, $\Phi = \text{Re } W$, $\Psi = \text{Im } W$.

В работе [11] для уединенных волн доказываются справедливость соотношений

$$K = Fr(FrM - C)/2; \quad (4.1)$$

$$P = (Fr^2 - 1)M/3. \quad (4.2)$$

Эти интегральные зависимости использовались для контроля точности получаемых уединенных волн, поскольку все величины, входящие в данные уравнения, определялись

Таблица 2

<i>A</i>	<i>Fr</i>	<i>K</i>	<i>P</i>	<i>Π</i>	<i>M</i>
0,10006	1,04663	0,02477	0,02391	0,04869	0,71044
0,19975	1,07004	0,04759	0,04522	0,09282	0,91130
0,24940	1,11523	0,10924	0,10063	0,20988	1,22732
0,30008	1,13691	0,14719	0,13371	0,28091	1,36221
0,34902	1,15716	0,18757	0,16823	0,35580	1,48121
0,39949	1,17735	0,23251	0,20596	0,43847	1,59362
0,44980	1,19674	0,27999	0,24512	0,52512	1,69567
0,49910	1,21616	0,33033	0,28533	0,61567	1,79163
0,54977	1,23407	0,38100	0,32554	0,70655	1,87257
0,59901	1,25017	0,42907	0,36317	0,79225	1,93812
0,64913	1,26556	0,47591	0,39891	0,87482	1,99159
0,70006	1,27938	0,51759	0,42978	0,94738	2,02689
0,73890	1,28779	0,54148	0,44693	0,98841	2,03693*
0,74988	1,29002	0,54685	0,45023	0,99709	2,03541
0,78046	1,29387	0,55413	0,45441	1,00854*	2,02286
0,79740	1,29457*	0,55232	0,45200	1,00433	2,00675
0,83328*	1,29095	0,53512	0,43784	0,97297	1,97147

Примечание. Звездочками выделены максимальные значения.

численно по формулам

$$P = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_g} (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2)(x_i - x_{i+1}); \quad (4.3)$$

$$K = -\frac{1}{2} \int_a^b \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N_g} (2\Phi_i p_i + \Phi_i p_{i+1} + \Phi_{i+1} p_i + 2\Phi_{i+1} p_{i+1}) L_i; \quad (4.4)$$

$$M = \frac{1}{2} \left(\int_a^b y dx - \int_a^b x dy \right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N_g} (y_{i+1} + y_i)(x_{i+1} - x_i) - (x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i); \quad (4.5)$$

$$C = \int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = \Phi_b - \Phi_a. \quad (4.6)$$

Здесь a и b — абсциссы точек пересечения свободной границы с границами области S_2 и S_4 соответственно, L_i — длина i -го элемента, N_g — количество точек на свободной поверхности, $p_i = (\partial \Psi / \partial s)_i$.

Абсолютная погрешность вычислений потенциальной и кинетической энергий по формулам (4.1)–(4.5) равна 10^{-3} для малых и предельных волн и 10^{-5} для волн в середине исследуемого диапазона. Данные оценки получены при общем числе элементов, равном 290.

В табл. 2 приведены рассчитанные характеристики уединенных волн в зависимости от амплитуды: число Фруда, кинетическая, потенциальная и полная энергии, а также масса. Эти характеристики представлены в виде графиков на рис. 4. Важно отметить, что все максимальные значения характеристик уединенных волн достигаются до наступления максимальной амплитуды, а максимум массы не совпадает с максимумами полной энергии и числа Фруда. Этот факт также отмечается в работе [11].

Таблица 3

Fr	A	M	P	K	Источник
1,2861	0,8270	1,973	0,435	0,534	[15]
1,2881	0,8296	1,963	0,431	0,527	[16]
1,2909	0,8332	1,970	0,438	0,534	[17]
1,2909	0,8332	—	—	—	[10]
1,2909	0,8332	1,970	0,438	0,534	[14]
1,2909	0,8332	1,970	0,438	0,534	[13]
1,2910	0,8333	1,971	0,438	0,535	Настоящая работа

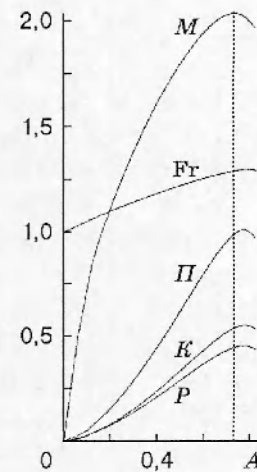


Рис. 4

Характеристики предельных волн. Вопросам построения волн предельной амплитуды посвящено большое количество работ, но в силу сложности данной задачи многие из полученных результатов отличаются друг от друга. Некоторые из них представлены в табл. 3. Анализ приведенных работ дает основание утверждать, что наиболее точные расчеты по уединенным волнам, вероятно, получены в работах [13, 14] ($A = 0,833\ 199$, $Fr = 1,290\ 890$). Значения всех характеристик, полученные в результате наших расчетов, отличаются от них в четвертом знаке после запятой.

В первых двух строках табл. 3 приведены результаты, полученные на основе аналитических зависимостей для уединенной волны. В работе [15] форма волны построена на основе точного суммирования рядов Вайтинга. В [16] приближенная форма волны получена аналитически, исходя из априорных характеристик уединенной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О. М., Котляр Л. М. Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978.
2. Моисеев Н. Н. О неединственности возможных форм установившихся течений тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 6. С. 860–864.
3. Гузевский Л. Г. Обтекание препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины // Динамика сплошных сред с границами раздела: Сб. науч. тр. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1982. С. 61–69.
4. Лаврентьев М. А. К теории длинных волн // ПМТФ. 1975. № 5. С. 3–46.
5. Плотников П. И. Неединственность решения задачи об уединенных волнах и бифуркации критических точек гладких функционалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 2. С. 339–366.
6. Громадка Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов. М.: Мир, 1990.
7. Петров А. Г., Смолянин В. Г. Расчет нестационарных волн на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, № 4. С. 137–143.
8. Афанасьев К. Е., Самойлова Т. И. Техника использования метода граничных элементов в задачах со свободными границами // Вычисл. технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отделение. ИВТ. 1995. Т. 4, № 11. С. 19–37.

9. Терентьев А. Г., Афанасьев К. Е. Численные методы в гидродинамике: Учеб. пособие. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1987.
10. Vanden-Broeck J. M. Free-surface flow over an obstruction in a channel // J. Phys. Fluids. 1987. V. 30, N 8. P. 2315–2317.
11. Longuet-Higgins M. S., Fenton J. D. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave // II. Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. A340. P. 471–493.
12. Маклаков Д. В. Нелинейная теория докритических течений. Предельные режимы обтекания. Казань, 1992 (Препр. / Казан. ун-т; № 2).
13. Шерыхалина Н. М. Разработка численных алгоритмов решения задач гидродинамики с особыми точками на свободной поверхности и экспериментальное исследование скорости их сходимости. М., 1995. Деп. в ВИНТИ 16.12.95, № 2550-B95.
14. Evans W. A. B., Ford M. J. An exact integral equation for solitary waves (with new numerical results for some 'integral' properties) // I. Proc. Roy. Soc. London. 1996. V. A452. P. 373–390.
15. Карабут Е. А. К задаче об уединенной волне на поверхности жидкости // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 3. С. 339–341.
16. Longuet-Higgins M. S. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave // Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. A337. P. 1–13.
17. Williams J. M. Limiting gravity waves in water of finite depth // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 303. P. 139–188.

*Поступила в редакцию 26/V 1997 г.,
в окончательном варианте — 3/VII 1997 г.*
