

26. Ждан С.А. Моделирование гетерогенной детонации с учетом деформации и распада капель топлива // ФГВ. — 1977. — № 2. — С. 258—262.
27. Салтанов Г.А. Сверхзвуковые двухфазные потоки. — Минск: Высш. шк., 1972.
28. Дейч М.Е. Техническая газовая динамика. — М.: Госэнергоиздат, 1961.
29. Reid R.C., Prousnitz J.M., Sherwood T.K. The properties of gases and liquids. — N.Y.: McGraw-Hill, 1980.

г. Москва

Поступила 19/1 1994 г.

УДК 539.3

Д. Колимбас, С.В. Лавриков, А.Ф. Ревуженко

## ОДНОРОДНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Решение большинства задач механики сплошной среды предполагает выбор или построение математической модели среды. Если речь идет об упругом теле или линейно-вязкой жидкости, то проблемы построения модели нет, так как созданы классические модели и сформулированы соответствующие уравнения Ламе и Навье — Стокса. Для более сложных сред, например упругопластических, сыпучих сред, нелинейных жидкостей, признанных уравнений нет. Поэтому для каждого класса задач вопрос о выборе модели должен решаться отдельно. Здесь многое зависит от конкретных условий нагружения и целей, которые преследуются при постановке и решении конкретных задач [1].

Практически все рабочие модели сплошной среды носят феноменологический характер. Это значит, что они строятся на основе некоторых базисных экспериментов. Причем указанный базис должен определять как сами конституционные уравнения, так и значения параметров, которые в них фигурируют.

Вопрос о выборе базисных экспериментов очень не простой. В принципе для построения математических моделей можно использовать любые эксперименты, например вдавливание штампов. Однако для интерпретации такого опыта необходимо заранее выбрать математическую модель, решить краевую задачу, сравнить результаты с опытом, провести корректировку модели и т.д. Это весьма сложный путь. Вместе с тем есть особый класс нагружений, когда для интерпретации эксперимента предварительных данных о математической модели не требуется. Это класс квазистатических нагружений, в которых распределения напряжений и деформаций по пространству однородны. Здесь процесс деформирования сводится к реализации последовательности аффинных преобразований. Поэтому в устойчивых процессах кинематика деформирования будет одинаковой как для упругопластических, так и для вязких или любых иных сред. Таким образом, эксперименты, реализующие однородные состояния, являются идеальными в качестве базисных для построения и анализа математических моделей сплошных сред.

Достичь в точности однородного нагружения технически невозможно. Поэтому максимум, что здесь можно сделать, это реализовать процессы деформирования, которые были бы как можно ближе к однородным. Для металлов такие процессы и соответствующие методики хорошо известны [2, 3]. Это кручение и растяжение тонкостенных трубчатых образцов. Однако для сыпучих сред, жидкостей со сложной реологией и других подобных материалов эта классическая методика неприменима. Здесь необходим поиск новых базисных экспериментов.

© Д. Колимбас, С.В. Лавриков, А.Ф. Ревуженко, 1994

В [4, 5] дана общая классификация однородных процессов деформирования. В нее как частные случаи попали хорошо известные процессы: однородное растяжение, кручение и др. Но, несмотря на почти тривиальность постановки задачи, здесь обнаружены и новые классы нагружений. На их основе разработан ряд устройств и приборов для реализации базисных экспериментов [6—9].

В настоящей работе результаты, полученные в [6—9] для сыпучих материалов, используются для анализа гипопластической модели [10—12].

1. Определяющие соотношения модели, связывающие тензоры напряжений  $T$  и скоростей деформаций  $D$ , имеют вид

$$(1.1) \quad \overset{\circ}{T} = \left( C_1 \text{tr}(T)D + C_2 \frac{\text{tr}(TD)}{\text{tr}(T)} T + (C_3 T^2 + C_4 T^{*2}) \frac{I_e \sqrt{\text{tr}(D^2)}}{\text{tr}(T)} \right) I_s,$$

$$\dot{e} = (1 + e) \text{tr}(D),$$

где

$$(1.2) \quad I_e = (1 - a) \frac{e - e_{\min}}{e_{kr} - e_{\min}} + a; \quad I_s = 1 + \exp\left(-r_1 \frac{e - e_{\min}}{e_{kr} - e_{\min}}\right);$$

$$a = 1 + q_2 \exp(-q_3 |\text{tr}(T)|), \quad e_{kr} = p_1 + p_2 \exp(-p_3 |\text{tr}(T)|);$$

$\overset{\circ}{T} = \dot{T} - WT + TW$  — ямановская производная тензора  $T$ ;  $W = 0,5(\nabla \bar{v} - \nabla \bar{v}^T)$  — тензор дисторсии;  $\bar{v}$  — вектор скорости;  $e$  — пористость среды;  $T^* = T - \text{tr}(T)E/3$ ;  $E$  — единичный тензор. Константы материала (получены для сухого песка г. Карлсруэ, ФРГ) следующие:

$$(1.3) \quad C_1 = -33,5, \quad C_2 = -341,4, \quad C_3 = -339,7, \quad C_4 = 446,5, \quad r_1 = 35,0, \quad e_{\min} = 0,4,$$

$$p_1 = 0,47, \quad p_2 = 0,47, \quad p_3 = 0,00018 \text{ kPa}, \quad q_2 = -0,25, \quad q_3 = 0,0001 \text{ kPa}.$$

Модель (1.1)—(1.3) позволяет описать одними и теми же уравнениями как состояние активного нагружения, так и разгрузку. Поэтому при переходе к приращениям ее нелинейный характер сохраняется.

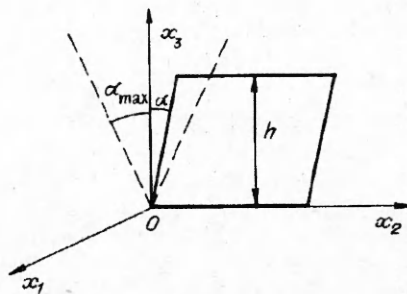
2. В качестве первого базисного эксперимента рассмотрим процесс чистого сдвига. Для его реализации в лабораторных условиях был создан прибор однородного сдвига [6, 7]. Прибор представляет собой кубическую камеру. Камера может испытывать сдвиги, так что ее объем сохраняется неизменным (вид сверху: квадрат преобразуется в параллелограмм без изменения высоты, рис. 1).

Эксперименты осуществлялись таким образом. Выбиралась начальная конфигурация камеры (начальный угол сдвига), осуществлялась засыпка материала, и проводился сдвиг. Через определенное время направление сдвига менялось на противоположное. Измерялись угол сдвига  $\alpha$ , изменение высоты образца материала в камере  $\Delta H$ . Так как площадь основания камеры неизменна, то отношение  $\Delta H/H$  совпадает с относительным изменением объема, т.е. характеризует дилатансию образца. В экспериментах проводилось также измерение напряжений  $\sigma_{ii}$  плавающим датчиком, помещенным внутрь образца на определенной глубине. Результаты опубликованы в [6, 7].

Проведем теперь численные эксперименты по аналогичной схеме нагружения для модели (1.1)—(1.3). Пусть  $Ox_1x_2x_3$  — декартова система координат (см. рис. 1) и сдвиг осуществляется в плоскости  $Ox_2x_3$ . Однородному полю деформаций в плоскости  $Ox_2x_3$  будут соответствовать скорости

$$(2.1) \quad v_2 = 2sx_3, \quad v_3 = 0,$$

$$s = \pm k - \text{const}, \quad k > 0,$$



Р и с. 1

где знаки  $\pm$  указывают направление сдвига.

Выделим горизонтальный слой на определенной глубине от свободной поверхности материала. В экспериментах проверялось, что трением материала по боковым стенкам камеры вследствие его дилатансии можно пренебречь. Поэтому вертикальную нагрузку, действующую на слой, можно считать постоянной и равной весу вышележащих слоев (на рис. 2, б—г, 4, б—г, 6, б—г, 7, б—г соответствующее ей напряжение показано штриховыми линиями):

$$(2.2) \quad \sigma_{11} = C, \text{ или } \dot{\sigma}_{11} = 0.$$

Условие однородности деформации для выбранного горизонтального слоя имеет вид  $\partial v_1 / \partial x_2 = \partial v_1 / \partial x_3 = 0$  и замыкает систему (1.1)—(1.3), (2.1), (2.2). Для поля (2.1) тензоры  $D$  и  $W$  примут вид

$$D = \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & s & 0 \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & -s & 0 \end{vmatrix},$$

где  $d = \dot{\epsilon}_{11} = \partial v_1 / \partial x_1$ . Величина  $d$  однозначно характеризует дилатансию.

Итак, задача сводится к решению тензорных уравнений (1.1)—(1.3) при условиях (2.1), (2.2). В покомпонентном виде они представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейной правой частью. Решение этой системы осуществляется методом Эйлера численно на ЭВМ. Перейдем к описанию результатов.

Зададим в начальный момент времени следующее начальное состояние среды:

$$(2.3) \quad \sigma_{11} = C = \text{const}, \sigma_{22} = \sigma_{33} = \xi C, \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ \epsilon_{ij} = 0, i, j = \overline{1,3}, e = 0,7, \xi = 0,42$$

( $\xi$  — коэффициент бокового распора). Форма камеры однозначно характеризуется углом  $\alpha$ , который будем использовать в качестве параметра нагружения (см. рис. 1). Зададим в начальный момент  $\alpha = \alpha_0$  и выберем некоторый угол размаха  $\alpha_{\max}$ . Нагружение будем проводить таким образом: сначала сдвиг осуществляется в положительном направлении от угла  $\alpha_0$  до  $\alpha_{\max}$  ( $s = k$ ). После этого направление сдвига меняется на противоположное ( $s = -k$ ) и сдвиг осуществляется от угла  $\alpha_{\max}$  до угла  $-\alpha_{\max}$ . Затем сдвиг происходит от угла  $-\alpha_{\max}$  до  $\alpha_{\max}$  и т.д. Для (2.3) примем  $\alpha_0 = 0, \alpha_{\max} = 5^\circ$ .

Расчеты показывают, что при деформировании объем материала в камере от цикла к циклу изменяется, т.е. среда дилатирует. Это хорошо видно на графике зависимости величины вертикальной деформации  $\epsilon_{11}$  от угла сдвига  $\alpha$  (рис. 2, а), здесь и в дальнейшем точка  $O$  соответствует началу деформирования, точка  $A$  — окончанию. Видно, что при циклическом нагружении сдвигом с постоянным углом размаха  $\alpha_{\max}$  материал с течением времени уплотняется. Вначале пористость  $e = 0,7$  (точка  $O$ ), в точке  $A$   $e = 0,665$ . От цикла к циклу процесс уплотнения среды замедляется. Расчеты показывают, что через определенное число циклов он исчерпывает себя, т.е. дилатансионная кривая выходит на стационарный режим. В стационарном режиме вся история деформирования забывается и все параметры зависят только от фазы внутри цикла.

На рис. 2, б—г показаны соответственно графики напряжений  $\sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}$ . Видно, что все напряжения также выходят на стационарный режим. Интересно отметить, что циклическое изменение напряжений  $\sigma_{22}, \sigma_{33}$  в стационарном режиме происходит вокруг значения  $C$ , тогда как в начальный момент  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \xi C$ ,  $\xi = 0,42$ . Иными словами, сдвиг в сыпучей среде в определенном смысле «снимает» внутреннее трение, и среда по свойствам приближается к жидкости с законом Паскаля.

Полученные результаты сравнивались с экспериментальными [6, 7]. Выводы, сделанные для модели (1.1)—(1.3), о том, что сыпучая среда при

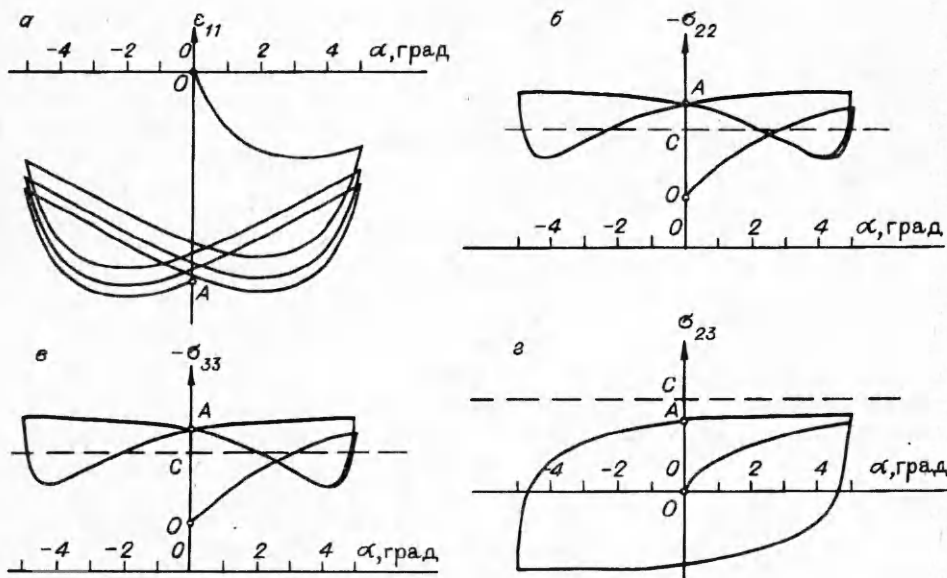


Рис. 2

циклическом сдвиге дилатирует и с течением времени этот процесс стабилизируется, причем боковые напряжения  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  приобретают значения, близкие к вертикальному  $\sigma_{11}$ , полностью подтверждаются экспериментами.

Далее, эксперименты [6, 7] показывают, что при выходе на стационарный режим сохраняется зависимость всех параметров от амплитуды сдвига  $\alpha_{\max}$ . А именно: если после достижения стационарного режима изменить  $\alpha_{\max}$ , то стационарность нарушится и для стабилизации деформирования вновь потребуется определенное число циклов. При этом новое стационарное состояние будет уже отличаться от предыдущего. Так, если угол  $\alpha_{\max}$  увеличить, то это приведет к разрыхлению материала по сравнению с предыдущим состоянием. И наоборот, уменьшение угла  $\alpha_{\max}$  приводит к уплотнению. Это общее свойство для различных сыпучих материалов, и оно должно описываться математической моделью. Проверим его выполнение для модели (1.1)–(1.3).

Выберем все параметры задачи, как и в предыдущем примере, за исключением угла размаха  $\alpha_{\max}$ . Положим  $\alpha_{\max} = 10^\circ$  и проведем расчеты. Результат по дилатансии показан на рис. 3, а. Как и ожидалось, увеличение угла  $\alpha_{\max}$  привело к разрыхлению материала: пористость в точке А  $e = 0,745$  (в предыдущем примере конечная пористость  $e = 0,665$ ). При этом из рис. 3, а видно также, что процесс разрыхления с течением времени замедляется, и в конечном счете процесс деформирования стабилизируется.

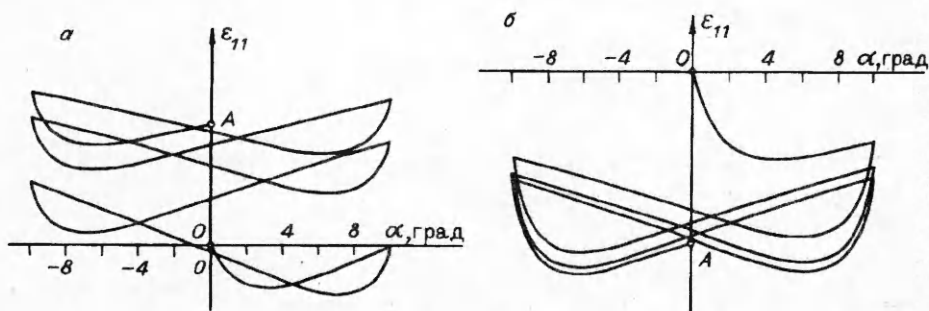


Рис. 3

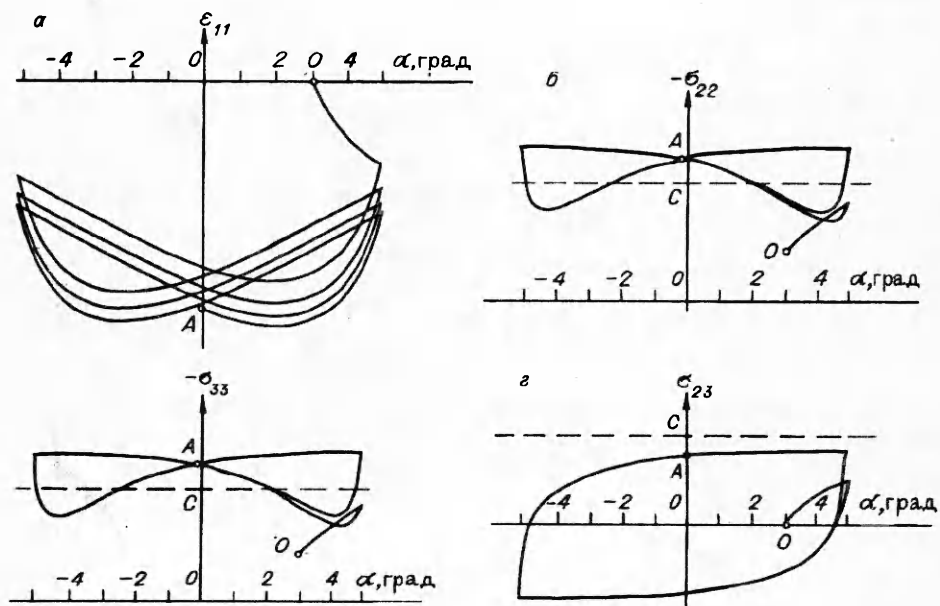
Эксперименты [6, 7] также показывают, что дилатансия зависит от величины пригрузки на поверхности сыпучей среды. Если материал на поверхности пригрузить, то после выхода на стационар упаковка частиц будет плотнее, чем если такой же эксперимент провести без пригрузки. В численном эксперименте пригрузку можно промоделировать таким образом. Возьмем начальные напряжения в 3 раза большими, чем в предыдущих примерах, т.е.  $\sigma_{11} = 3C$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 3\xi C$ . Угол размаха положим  $\alpha_{\max} = 10^\circ$ . Остальные параметры возьмем из (2.3). Расчеты показывают, что введение пригрузки приводит к уплотнению материала даже при амплитуде сдвига  $\alpha_{\max} = 10^\circ$  (рис. 3,б). Если вначале пористость  $e = 0,7$ , то в точке А  $e = 0,668$ .

Все приведенные выше примеры расчетов относятся к случаю, когда начальный угол сдвига  $\alpha_0 = 0$ . Свойства сыпучей среды таковы [6, 7], что начальный угол  $\alpha_0$  оказывает влияние только на первые несколько циклов деформирования. При этом сам факт выхода на стационар и значения всех параметров от  $\alpha_0$  не зависят. Иными словами, в сыпучей среде информация о начальном состоянии быстро «забывается». Это одно из основных свойств сред подобного типа. Проверим его выполнение для модели (1.1)—(1.3). Возьмем параметры задачи из (2.3) и примем, что  $\alpha_0 = 3^\circ$ . Расчеты показывают, что начальная фаза оказывает влияние только в самом начале деформирования. После 1—2 циклов дилатансия (рис. 4,а) и напряжения (рис. 4,б—г) практически не отличаются от аналогичных параметров, рассчитанных при  $\alpha_0 = 0$  (рис. 2,а—г).

Для модели (1.1)—(1.3) направления главных осей тензора напряжений можно рассчитать из значений напряжений  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{23}$ . Расчеты показывают, что главные оси тензора напряжений составляют угол  $\pm 44,625^\circ$  к оси  $Ox_2$ ; в пределах точности это вполне согласуется с экспериментами.

3. Проведенные выше расчеты относятся к случаю простого нагружения. Однако для анализа математических моделей представляют интерес также ситуации, когда однородное состояние реализуется при сложном нагружении с поворотом главных осей напряжений. В [8] предложен способ реализации такого нагружения. Для этого образцу материала необходимо придать форму эллиптического цилиндра и на границе в плоскости  $Ox_2x_3$  задать условия

$$(3.1) \quad w \cdot n = 0, \quad w \times r = \Omega = \text{const},$$



Р и с. 4

где  $w = \{v_1, v_2, v_3\}$  — вектор скорости;  $r = \{0, x_2, x_3\}$  — радиус-вектор;  $n = \{0, n_2, n_3\}$  — вектор нормали к эллиптической границе образца (рис. 5). Условия (3.1) означают, что все точки эллиптической границы движутся вдоль границы с постоянной секториальной скоростью. В этом случае распределение деформаций будет однородным, и поэтому эксперимент, близкий к (3.1), можно использовать в качестве базисного [9].

В [9] приведены экспериментальные данные по сложному нагружению сыпучей среды с поворотом главных осей тензора напряжений. Проведем теперь численные эксперименты на модели (1.1)–(1.3) с условиями на границе (3.1). В силу однородности деформаций в образце реализуется следующее распределение скоростей:

$$(3.2) \quad v_2 = \Omega x_3 / b^2, \quad v_3 = -\Omega x_2 / a^2.$$

Здесь  $a, b$  — полуоси эллипса ( $a > b$ );  $\Omega = \text{const}$  ( $\Omega > 0$  соответствует движению против часовой стрелки).

Примем схему численных расчетов такую же, как и в случае сдвига без поворота осей. Как и прежде, вертикальную составляющую скорости  $v_1$  будем определять из условия нагружения (2.2) и условий однородности  $\partial v_1 / \partial x_2 = \partial v_1 / \partial x_3 = 0$ . Тензоры  $D$  и  $W$  для поля (3.2) имеют вид

$$D = \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & p & 0 \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q \\ 0 & q & 0 \end{vmatrix},$$

где  $p = \Omega(a^2 - b^2) / (2a^2b^2)$ ;  $q = \Omega(a^2 + b^2) / (2a^2b^2)$ ;  $d = \dot{\epsilon}_{11} = \partial v_1 / \partial x_1$ . Здесь, как и в предыдущем случае, площадь сечения эллиптической камеры неизменна. Поэтому  $d$  однозначно характеризует дилатансию слоя. Перейдем к описанию результатов.

Выберем следующее начальное состояние среды:

$$(3.3) \quad \sigma_{11} = C = \text{const}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \xi C, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ \epsilon_{ij} = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad \xi = 0,42, \quad e = 0,85.$$

Нагружение будем проводить таким образом. Зададим определенное значение скорости  $\Omega$ . Зафиксируем некоторую материальную точку эллиптической границы. В качестве параметра нагружения будем использовать угол  $\alpha$ , на который поворачивается радиус-вектор точки, проведенный из центра эллипса. Будем увеличивать  $\alpha$  от 0 до некоторого фиксированного значения, например  $10\pi$ .

Расчеты, проведенные по описанной схеме нагружения, показывают хорошее соответствие с результатами лабораторных экспериментов. Оказалось, что здесь, как и в экспериментах, материал в эллиптической камере при деформировании дилатирует (уплотняется). С течением времени этот процесс стабилизируется и выходит на стационарный режим, когда значения всех параметров при дальнейшем деформировании не изменяются. График зависимости деформации  $\epsilon_{11}$  от угла  $\alpha$  приведен на рис. 6, а: в точке  $O$  пористость  $e = 0,85$ , в точке  $A$   $e = 0,783$ . На рис. 6, б–г представлены графики напряжений  $\sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}$ . Видно, что изменения напряжений с течением времени также выходят на стационарный режим практически за один оборот (изменение  $\alpha$  на  $2\pi$ ). При этом сжимающее напряжение  $\sigma_{33}$  на площадке с нормалью вдоль малой оси эллипса выше, чем напряжение  $\sigma_{22}$  на площадке с нормалью вдоль большой оси.

Один из основных вопросов при сложном нагружении состоит в ориентации главных осей напряжений. В экс-

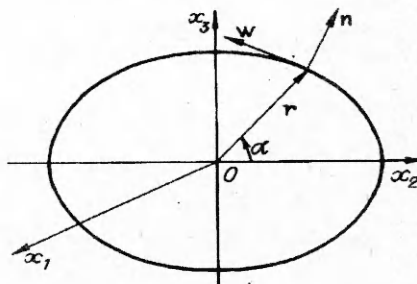
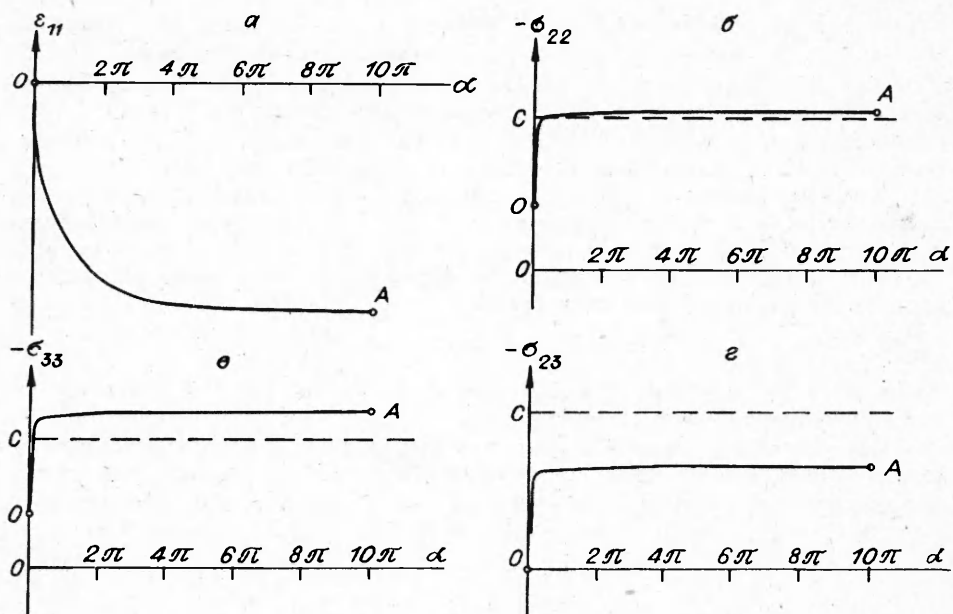
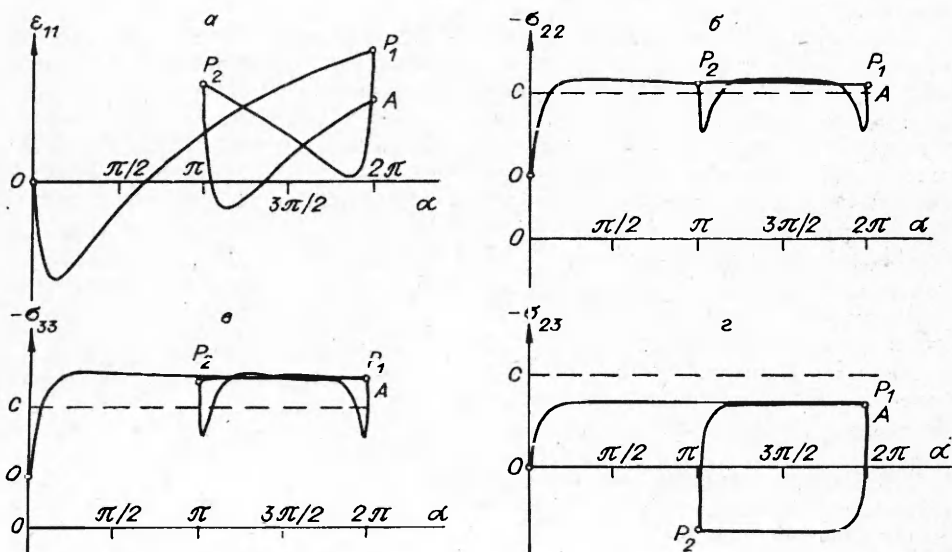


Рис. 5



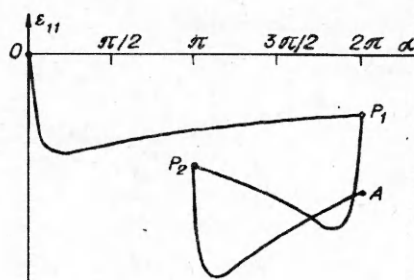
Р и с. 6

периментах [9] для сыпучего материала было получено, что главные оси тензора напряжений совпадают в плоскости  $Ox_2x_3$  с осями эллипса. Причем наибольшее сжимающее напряжение направлено вдоль малой оси эллипса, а наименьшее — вдоль большой. Иными словами, в этой ситуации приближенно выполняется условие соосности тензоров напряжений и деформаций. В численном эксперименте для модели (1.1)–(1.3) наблюдается их разность на угол  $41,24^\circ$ . При этом главные оси тензоров напряжений и скоростей деформаций расходятся на угол  $3,76^\circ$ . Расчетные значения величин главных напряжений близки к экспериментальным. Вопрос о степени разности тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций при нагружениях с поворотами осей требует дальнейшего исследования.



Р и с. 7

Рис. 8



Изменим теперь схему нагружения и рассмотрим ситуации, когда направление поворота в процессе нагружения может меняться. Положим  $e = 0,75$ , остальные значения параметров возьмем из (3.3). Проведем численное нагружение по следующей схеме. Сначала будем увеличивать угол  $\alpha$  от 0 до  $2\pi$ . Затем сменим направление вращения и будем уменьшать  $\alpha$  от  $2\pi$  до  $\pi$ . Потом снова поменяем направление и проведем нагружение от  $\alpha = \pi$  до  $\alpha = 2\pi$ . Расчеты показывают следующее. Смена направления нагружения приводит к резкому уплотнению материала с последующей стабилизацией деформирования (рис. 7,а, здесь и ниже кривая нагружения  $OP_1P_2A$ ). В точке  $O$  пористость  $e = 0,75$ , в точке  $A$   $e = 0,764$ . Этот результат полностью соответствует экспериментам [9], где показано, что при циклической смене направления нагрузки на малых амплитудах угла  $\alpha$  можно достичь высокой плотности материала. Графики напряжений  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{23}$  представлены соответственно на рис. 7,б—г. Из них видно, что смена направления нагружения приводит к скачку напряжений, но после этого процесс деформирования быстро стабилизируется.

Рассмотрим еще один пример расчета. Возьмем все значения параметров из (3.3) и увеличим в 2 раза начальные напряжения:  $\sigma_{11} = 2C$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 2\xi C$  (учет пригрузки). Можно ожидать, что это приведет к более плотной упаковке частиц среды на всех стадиях деформирования. Расчеты показали, что стабилизация действительно происходит при большей плотности среды (рис. 8), чем в примере без пригрузки. Начальная пористость в точке  $O$   $e = 0,75$ , конечная в точке  $A$   $e = 0,724$ .

Таким образом, 1) методика и эксперименты [6—9] могут играть роль базовых для построения и анализа математических моделей деформирования сложных сред, 2) гипопластическая модель сыпучей среды [10—12] верно предсказывает целый ряд тонких эффектов деформирования и может быть использована для решения краевых задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Две статьи о математических моделях в механике сплошной среды. — М., 1983. — (Препр. / ИПМ АН СССР, ЛГУ; № 225).
2. Жуков А.М., Работнов Ю.Н. Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении // Инж. сб. — 1954. — № 18.
3. Ильющин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. — М.: Физматгиз, 1959.
4. Ревуженко А.Ф. О самых простых течениях сплошной среды // ДАН СССР. — 1988. — Т. 303, № 1.
5. Revuzhenko A.Ph. Experimental Detection of Constitutive Behaviour and Self-Organization. Modern Approaches to Plasticity. — Amsterdam a.o.: Elsevier, 1993.
6. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. — 1974. — № 3.
7. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. Однородный сдвиг сыпучего материала. Дилатансия // ФТПРПИ. — 1982. — № 5.
8. Ревуженко А.Ф. Один класс сложных нагружений неупругой среды // ПМТФ. — 1986. — № 5.
9. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. Об одном методе испытания неупругих материалов // Изв. АН СССР. МТТ. — 1990. — № 4.
10. Kolymbas D. Generalization hypoplastic constitutive equation // Proc. Constitutive Equations for Granular Noncohesive Soils, 1989. — P. 349—366.
11. Kolymbas D., Wu W. Introduction to hypoelasticity // Modern Approaches to Plasticity. — Amsterdam a.o.: Elsevier, 1993.
12. Bauer E., Wu W. A hypoplastic model for granular soils under cyclic loading. — Amsterdam a.o.: Elsevier, 1993.

г. Новосибирск,  
г. Карлсруэ (ФРГ)

Поступила 4/II 1994 г.