$\mathcal{AMS}$ subject classification: 34B10, 34B18, 34B27

Положительные периодические решения для класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка

Н. Боутераа, С. Бенайха

University of Oran1, Ahmed Benbella, Algeria
E-mails: bouteraa-27@hotmail.fr (Боутераа Н.), slimanebenaicha@yahoo.fr (Бенайха С.)

Боутераа Н., Бенайха С. Положительные периодические решения для класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 1. — С. 1–14.

В данной статье получены условия существования и единственности периодических решений нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с использованием явной функции Грина, теоремы индекса о неподвижной точке и операторной спектральной теоремы. Обсуждается итерационный метод для нелинейных дифференциальных уравнений с постоянным коэффициентом и доказывается теорема существования положительных решений граничной задачи четвертого порядка с переменным параметром. Приводится пример, иллюстрирующий результаты.

DOI: 10.15372/SJNM20190101

Ключевые слова: *положительное решение, единственность и существование, итерационная последовательность, функция Грина.*

Bouteraa N., Benaicha S. Positive periodic solutions for a class of fourth-order nonlinear differential equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 1. — P. 1–14.

In this paper, we obtain the existence and uniqueness of periodic solutions for a nonlinear fourth-order differential equation utilizing an explicit Green's function and fixed point index theorem combining with an operator spectral theorem. We discuss an iteration method for constant coefficient nonlinear differential equations and establish a theorem on the existence of positive solutions for fourth-order boundary value problem with variable parameter. Finally, we give an example to illustrate our results.

Keywords: *positive solution, uniqueness and existence, iterative sequence, Green's function.*

1. Введение

С самого начала большинство работ, где рассматривались сингулярные дифференциальные уравнения второго и третьего порядков (например, статьи Динга и Талиаферро [20, 23]), привлекло внимание многих специалистов по дифференциальным уравнениям. Позднее метод верхних и нижних решений [5, 10], теорема Пуанкаре–Биркгофа о скручивании [1, 13], теория топологической степени [7, 15, 16], теорема Шаудера о неподвижной точке [19], теорема Красносельского о неподвижной точке в конусе [2, 9, 12, 22], теорема Леггетта–Вильямса о неподвижной точке [18] (в исследовании высокого порядка, в частности второго и четвертого) и теория индексов о неподвижной точке [11] использовались для изучения вопроса о существовании положительных периодических решений сингулярных дифференциальных уравнений второго, третьего и более высоких порядков. Некоторые результаты относительно существования решения дифференциального уравнения четвертого порядка можно найти в статьях [8, 13, 24, 25]. Представим несколько задач для дифференциального уравнения четвертого порядка. В 2003 г. Конти с соавторами [17] исследовали уравнение четвертого порядка:

$$u^{(4)}(t) - cu''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, T],$$

с периодическими граничными условиями, где $c \geq (-\frac{\pi}{T})^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция непрерывная, T-периодическая по t и имеет сверхлинейное поведение при 0 и на бесконечности. В 2009 г. Ли и Жанг [28] использовали некоторые постоянные Соболева для явной характеристики класса потенциалов $q(t) \in L^p(0, T)$, для которого периодическое уравнение пучка с периодическим граничным условием

$$u^{(4)}(t) = q(t)u(t), \quad t \in (0, T),$$

$$u^{(i)}(0) = u^{(i)}(T), \quad i \in \{0, 1, 2, 3\},$$

является невырожденным. В качестве приложения они получили единственность периодических решений некоторого класса сверхлинейных уравнений пучка. Недавно Москони и Сантра [21] доказали, что если $F \in C(\mathbb{R})$ коэрцитивно и $\{F' = 0\}$ дискретно, обобщенное уравнение Фишера–Колмогорова:

$$u^{(4)} - cu'' + F'(u) = 0$$

имеет $L^\infty(\mathbb{R})$ решения, если и только если F' меняет знак, по крайней мере дважды. В качестве следствия ими было доказано, что в случае решения u_n,

$$u_n^{(4)} - c_n u_n'' + F'(u_n) = 0,$$

$\|u_n\|_\infty \to \infty$, если $c_n \to 0$; в том случае, если F имеет единственный локальный минимум, этот единственный минимум является невырожденным и $\operatorname{int}\{F' = 0\} \neq \phi$. Наконец, они представили критерии, гарантирующие существование и несуществование T-периодических решений приведенного выше уравнения, когда F имеет многочисленные потенциальные ямы.

В [27] Ли изучал вопрос существования положительных решений следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} u^{(4)} - \beta u'' + \alpha u = f(t, u), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1), \quad i = 0, 1, 2, 3, \end{cases}$$

при следующих условиях:

(C_1) $f : [0, 1] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ непрерывно,

(C_2) α, $\beta \in \mathbb{R}$ и удовлетворяют $0 < \alpha < (\frac{\beta}{2} + 2\pi^2)^2$, $\beta > -2\pi^2$, $\frac{\alpha}{\pi^4} + \frac{\beta}{\pi^2} + 1 > 0$.

В [14] Конг и Цзян исследовали приведенную выше краевую задачу в том случае, когда $\beta = 0$ с использованием теоремы Красносельского о неподвижной точке в конусе.

В этой работе мы сначала рассмотрим вопрос единственности и существования решений и итерационный метод для следующего дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$u^{(4)}(t) - \rho^4 u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, \omega], \tag{1.1}$$

со следующими двухточечными граничными условиями:

$$u^{(i)}(0) = u^{(i)}(\omega), \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, \tag{1.2}$$

где $\rho \in \mathbb{R}^+$, $f \in C([0, \omega] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Затем рассмотрим более общую краевую задачу:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - a(t)u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (0, \omega), \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(\omega), \qquad i = 0, 1, 2, 3, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $a(t) \in C([0, \omega], (0, \infty))$ и $f \in C([0, \omega] \times [0, \infty), [0, \infty))$.

Очевидно, что краевая задача $(1.1), (1.2)$ может рассматриваться как особый случай краевой задачи (1.3) с $a(t) = \rho^4$. Поскольку параметр $a(t)$ является переменным, прямое преобразование краевой задачи (1.3) в интегральное уравнение невозможно. С другой стороны, рассматриваемое уравнение четвертого порядка (1.1) можно привести, очевидно, к системе первого порядка:

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \rho^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(t, u(t)) \end{pmatrix}$$

с граничным условием $u(0) = u(\omega)$, что было рассмотрено в работе Лакшмикантхама и Лила [26]; существование решения исследовалось в случае, когда $a(t) = \alpha$ — постоянный параметр. В данной статье оценки ошибки даны для краевой задачи $(1.1), (1.2)$, и теорема индекса неподвижной точки будет использоваться вместе с операторной спектральной теоремой для определения существования положительных решений краевой задачи (1.3). Статья организована следующим образом: в пункте 2 представлена функция Грина для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$u^{(4)}(t) - \rho^4 u(t) = h(t).$$

Здесь $h \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$ — ω-периодическая функция. Получены некоторые полезные свойства функции Грина. В п. 3 с использованием теоремы Банаха о неподвижной точке и результатов п. 2, получены существование и единственность решений и итерационный метод для задачи $(1.1), (1.2)$. В заключение мы используем теорему индекса неподвижной точки вместе с операторной спектральной задачей для установления факта существования положительных решений краевой задачи (1.3). Приводится пример для иллюстрации наших результатов.

2. Предварительная работа

Пусть $X = C[0, \omega]$ имеет норму $\|u\| = \max_{t \in [0, \omega]} |u(t)|$. Обозначим

$$C_\omega^- = \{u(t) \in X,\ u(t) < 0,\ u(\omega) = u(0),\ t \in [0, \omega]\}.$$

Лемма 2.1. *Для $\rho > 0$ и $h \in X$ уравнение*

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - \rho^4 u(t) = h(t), \quad t \in [0, \omega], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(\omega), \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, \end{cases} \tag{2.1}$$

имеет единственное ω-периодическое решение следующего вида:

$$u(t) = \int_0^\omega G(t, s)(-h(s) ds,$$

где

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\exp(\rho(t-s))+\exp(\rho(s+\omega-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}+\dfrac{\sin(\rho(t-s))-\sin(\rho(t-s-\omega))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}, \\ \qquad 0\le s\le t\le\omega, \\ \dfrac{\exp(\rho(t+\omega-s))+\exp(\rho(s-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}+\dfrac{\sin(\rho(s-t))-\sin(\rho(s-\omega-t))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}, \\ \qquad 0\le t\le s\le\omega.\end{cases} \tag{2.2}$$

Доказательство. Легко убедиться, что соответствующее однородное уравнение (2.1) имеет решение

$$v(t)=c_1\exp(\rho t)+c_2\exp(-\rho t)+c_3\cos(\rho t)+c_4\sin(\rho t).$$

Используя метод вариации параметров, мы имеем

$$c_1^{'}(t)=\frac{\exp(-\rho t)h(t)}{4\rho^3},\qquad c_2^{'}(t)=\frac{-\exp(\rho t)h(t)}{4\rho^3},$$
$$c_3^{'}(t)=\frac{\sin(\rho t)h(t)}{2\rho^3},\qquad c_4^{'}(t)=\frac{-\cos(\rho t)h(t)}{2\rho^3},$$

значит,

$$c_1(t)=c_1(0)+\int\limits_0^t\frac{\exp(-\rho s)h(s)}{4\rho^3}\,ds,\qquad c_2(t)=c_2(0)+\int\limits_0^t\frac{-\exp(\rho)h(s)}{4\rho^3}\,ds,$$

$$c_3(t)=c_3(0)+\int\limits_0^t\frac{\sin(\rho s)h(s)}{2\rho^3}\,ds,\qquad c_4(t)=c_4(0)+\int\limits_0^t\frac{-\cos(\rho s)h(s)}{2\rho^3}\,ds.$$

Поскольку $u(0)=u(\omega)$, $u'(0)=u'(\omega)$, $u''(0)=u''(\omega)$, $u^{(3)}(0)=u^{(3)}(\omega)$, мы получим

$$c_1(0)=\int\limits_0^\omega\frac{\exp(\rho(\omega-s))}{4\rho^3(1-\exp(\rho\omega))}h(s)ds,\quad c_2(0)=\int\limits_0^\omega\frac{\exp(\rho s)}{4\rho^3(1-\exp(\rho\omega))}h(s)ds,$$

$$c_3(0)=-\int\limits_0^\omega\frac{\sin(\rho s)-\sin(\rho(s-\omega))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}h(s)ds,\quad c_4(0)=-\int\limits_0^\omega\frac{\cos(\rho(s-\omega))-\cos(\rho s)}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}h(s)ds.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}u(t)&=c_1(t)\exp(\rho t)+c_2(t)\exp(-\rho t)+c_3(t)\cos(\rho t)+c_4(t)\sin(\rho t)\\&=\int\limits_0^t\left[\frac{\exp(\rho(t-s))+\exp(\rho(s+\omega-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}+\frac{\sin(\rho(t-s))-\sin(\rho(t-s-\omega))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}\right](-h(s))ds+\\&\int\limits_t^\omega\left[\frac{\exp(\rho(t+\omega-s))+\exp(\rho(s-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}+\frac{\sin(\rho(s-t))-\sin(\rho(s-t-\omega))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}\right](-h(s))ds\\&=\int\limits_0^\omega G(t,s)(-h(s))ds.\end{aligned}$$

Используя прямое вычисление, мы получим решение u, удовлетворяющее периодическому граничному условию задачи (2.1). □

Теперь представим свойства функции Грина для (2.1).

Лемма 2.2. *Функция Грина удовлетворяет равенству* $\int_0^\omega G(t,s)ds = \frac{1}{\rho^4}$, *и если* $\rho < \frac{\pi}{\omega}$ *справедливо, то* $0 < l \le G(t,s) \le L$ *для всех* $t \in [0,\omega]$ *и* $s \in [0,\omega]$, *где* $l = \frac{1}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}$ *и* $L = \frac{1+\exp(\rho\omega)}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)} + \frac{1}{2\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}$.

Доказательство. Из (2.2) мы получим $\int_0^\omega G(t,s)ds = \frac{1}{\rho^4}$. Если $\rho < \frac{\pi}{\omega}$, мы имеем $G(t,s) > 0$ для всех $t \in [0,\omega]$ и $s \in [0,\omega]$. Теперь вычислим нижнюю и верхнюю границы для $G(t,s)$, $s \in [0,\omega]$, с использованием следующих оценок:

$$\frac{1}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)} \le \frac{\exp(\rho(t-s)) + \exp(\rho(s+\omega-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)} \le G(t,s)$$

и

$$\begin{aligned}
G(t,s) &= \frac{\exp(\rho(t-s)) + \exp(\rho(s+\omega-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)} + \frac{\sin(\rho(t-s)) - \sin(\rho(t-s-\omega))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))} \\
&\le \frac{1+\exp(\rho(\omega))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)} + \frac{\sin(\rho(t-s-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega)) - \sin(\rho(t-s-\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{2}\omega))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))} \\
&\le \frac{1+\exp(\rho\omega)}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)} + \frac{2\cos(\rho(t-s-\frac{1}{2}\omega))\sin(\rho(\frac{1}{2}\omega))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))} \\
&\le \frac{1+\exp(\rho\omega)}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)} + \frac{1}{2\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}.
\end{aligned}$$

Для справки вкратце напомним теорему Банаха о неподвижной точке и соответствующие оценки ошибки.

Лемма 2.3 [6]. *Пусть* M *— замкнутое непустое множество в банаховом пространстве* X, *а* $A : M \to M$ *—* k*-сжимающий оператор, т. е. существует* k, $0 \le k < 1$ *такое, что для всех* u, $v \in M$ *мы имеем*

$$\|Au - Av\| \le k\|u - v\|. \tag{2.3}$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = u, \quad u \in M, \tag{2.4}$$

и для всех $u_0 \in M$ *итерацию*

$$u_{n+1} = Au_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.5}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *существование и единственность: существует единственное* u^*, *которое решает* (2.4), *т. е.* $Au^* = u^*$;

(ii) *сходимость итерационного метода: для всех* $u_0 \in M$ *мы имеем* $\lim_{\to\infty} u_n = u^*$;

(iii) *оценки ошибки: для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *имеется так называемая априорная оценка ошибки*

$$\|u_n - u\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| \tag{2.6}$$

и так называемая апостериорная оценка ошибки

$$\|u_{n+1} - u\| \leq \frac{k}{1-k}\|u_{n+1} - u_n\|; \tag{2.7}$$

(iv) *скорость сходимости: для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *имеется* $\|u_{n+1} - u\| \leq k\|u_n - u\|$.

Определим оператор $T : X \to X$ следующим образом:

$$Tu(t) = \int\limits_0^\omega G(t,s)f(s,u(s))\,ds.$$

Из леммы 2.1 мы знаем, что существование периодических решений задачи (1.1), (1.2) эквивалентно существованию неподвижных точек для уравнения $u = Tu$. Для любого $u_0 \in X$ определим последовательность (u_n) следующим образом:

$$u_{n+1}(t) = \int\limits_0^\omega G(t,s)f(s,u_n(s))\,ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.8}$$

3. Результаты по существованию

В данном пункте мы формулируем и доказываем результаты по существованию. Доказательство основано на следующей лемме, которую можно найти в [4].

Лемма 3.1. *Пусть* X *— банахово пространство и* K *— конус в* X. *Для* $r > 0$ *определим* $K_r = \{u \in K : \|u\| < r\}$. *Предположим, что* $T : \overline{K}_r \to K$ *— полностью непрерывный оператор, такой что* $Tu \neq u$ *для* $u \in \partial K_r = \{u \in K : \|u\| = r\}$, *и поэтому*
(i) *если* $\|Tu\| \geq \|u\|$ *для* $u \in \partial K_r$, *то* $i(T, K_r, K) = 0$,
(ii) *если* $\|Tu\| \leq \|u\|$ *для* $u \in \partial K_r$, *то* $i(T, K_r, K) = 1$.

Введем следующие сокращения:

$$\delta = \frac{\exp(\rho\omega)}{2\rho^2(\exp(\rho\omega) - 1)} + \frac{1}{2\rho^2(1 - \cos(\rho\omega))}. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Предположим, что частная производная* $f_u \in C([0,\omega] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *и существует число* d, *такое что* $|f_u(t,u)| < d$ *для всех* $t \in [0,\omega]$, $u \in \mathbb{R}$. *Тогда, если* $d\omega\delta < \rho$, *верны следующие утверждения*:
(i) *задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение* $u \in X$,
(ii) *последовательность* (u_n), *построенная при помощи* (2.8), *сходится к* u *в* X,
(iii) *для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *мы получим следующие оценки ошибки для* $k = \frac{d\delta\omega}{\rho}$:

$$\|u_n - u\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\|, \qquad \|u_{n+1} - u\| \leq k^n\|u_{n+1} - u_n\|.$$

Доказательство. Произведя вычисления для $0 \leq t \leq s \leq \omega$, мы получим

$$
\begin{aligned}
|G(t,s)| &= \left|\frac{\exp(\rho(t+\omega-s))+\exp(\rho(s-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}\right| + \left|\frac{\sin(\rho(s-t))-\sin(\rho(s-t-\omega))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}\right| \\
&\le \left|\frac{\exp(\rho(\omega))+\exp(\rho(s-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}\right| + \left|\frac{\sin\left(\rho\left(s-t-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega\right)\right)-\sin\left(\rho\left(s-t-\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{2}\omega\right)\right)}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}\right| \\
&\le \left|\frac{\exp(\rho\omega)+\exp(\rho\omega)}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}\right| + \left|\frac{2\cos\left(\rho\left(s-t-\frac{1}{2}\omega\right)\right)\sin\left(\rho\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right)}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}\right| \\
&\le \frac{\exp(\rho\omega)}{2\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)} + \frac{1}{2\rho^3(1-\cos(\rho\omega))} = \frac{\delta}{\rho}.
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом для $0 \le s \le t \le \omega$ мы можем получить

$$
\begin{aligned}
|G(t,s)| &= \left|\frac{\exp(\rho(t-s))+\exp(\rho(s+\omega-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}\right| + \left|\frac{\sin(\rho(t-s))-\sin(\rho(t-s-\omega))}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}\right| \\
&\le \left|\frac{\exp(\rho(\omega))+\exp(\rho(s-t))}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}\right| + \left|\frac{\sin\left(\rho\left(t-s-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega\right)\right)-\sin\left(\rho\left(t-s-\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{2}\omega\right)\right)}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}\right| \\
&\le \left|\frac{\exp(\rho\omega)+\exp(\rho\omega)}{4\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)}\right| + \left|\frac{2\cos\left(\rho\left(t-s-\frac{1}{2}\omega\right)\right)\sin\left(\rho\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right)}{4\rho^3(1-\cos(\rho\omega))}\right| \\
&\le \frac{\exp(\rho\omega)}{2\rho^3(\exp(\rho\omega)-1)} + \frac{1}{2\rho^3(1-\cos(\rho\omega))} = \frac{\delta}{\rho}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, для всех $t \in [0,\omega]$ и $s \in [0,\omega]$ мы имеем $|G(t,s)| \le \frac{\delta}{\rho}$.

С другой стороны, для всех $t \in [0,\omega]$ и $u, v \in \mathbb{R}$, согласно теореме о среднем, существует $w \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|f(s,u)-f(s,v)| \le |f_u(s,w)|\,|u-v| \le d|u-v|.$$

Поэтому

$$|Tu-Tv|(t) \le \int_0^\omega |G(t,s)|\,|f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds \le d|u-v|\int_0^\omega |G(t,s)|ds \le \frac{d\delta\omega}{\rho}|u-v|,$$

т. е. $\|Tu-Tv\| \le k\|u-v\|$ для всех $u, v \in X$. Пусть $M = X$. Тогда утверждения следуют прямо из леммы 2.3. □

Рассмотрим существование положительных периодических решений нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с ω-периодическим граничным условием

$$u^{(4)}(t) - a(t)u(t) = f(t,u(t)),$$

где $f \in C([0,\omega]\times[0,\infty),[0,\infty))$, $a \in C([0,\omega],(0,\infty))$ и $f(t,u) > 0$ для $u > 0$.

Введем следующие сокращения:

$$a^* = \max\{a(t) : t \in [0,\omega]\}, \quad a_* = \min\{a(t) : t \in [0,\omega]\}, \quad \rho = \sqrt[4]{a^*},$$

и

$$f^0 = \lim_{u\to 0^+} \sup_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,u)}{u}, \quad f_\infty = \lim_{u\to\infty} \inf_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,u)}{u}.$$

Определим конус K_0 следующим образом:

$$K_0 = \{u \in X \;:\; u(t) \geq \theta\|u\|\},$$

где $0 < \theta = \frac{a_* l}{a^* L} < 1$, а для $r > 0$ определим K_{0r} следующим образом:

$$K_{0r} = \{u \in K_0 \;:\; \|u\| < r\},$$

и

$$\partial K_{0r} = \{u \in K_0 \;:\; \|u\| = r\}.$$

Теперь для любого $h \in C_\omega^-$ изучим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - a(t)u(t) = h(t), \quad t \in (0,\omega), \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(\omega), \quad i \in \{0,1,2,3\}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Легко убедиться в том, что верхнее уравнение в (3.2) эквивалентно следующему уравнению в (3.3):

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - a^*u(t) = (a(t) - a^*)u(t) + h(t), \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(\omega), \quad i \in \{0,1,2,3\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Определим операторы $A, B : X \to X$ следующим образом:

$$(Ah)(t) = \int_0^\omega G(t,s)(-h(s))ds, \qquad (Bu)(t) = (a(t) - a^*)u(t). \tag{3.4}$$

Для всех $v \in X,\; t \in [0,\omega]$ мы имеем

$$|(Bv)(t)| \leq (a^* - a_*)|v(t)|.$$

Следовательно,

$$\|B\| \leq a^* - a_*.$$

Для любого $h \in C_\omega^-$, $t \in [0,\omega]$ и $\int_0^\omega G(t,s)ds = \frac{1}{\rho^4}$ мы имеем

$$\|Ah\| \leq \max_{s\in[0,\,\omega]} |h(s)| \int_0^\omega G(t,s)ds.$$

Следовательно,

$$\|A\| \leq \frac{1}{a^*}.$$

Из $\|B\| \leq a^* - a_*$ и $\|A\| \leq \frac{1}{a^*}$ получим

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \leq \frac{1}{a^*}(a^* - a_*).$$

При условии $\frac{1}{a^*}(a^* - a_*) < 1$, применив операторную спектральную теорему, мы получим, что оператор $(I - AB)^{-1}$ существует и ограничен.

С другой стороны, решение краевой задачи (3.3) можно записать в следующем виде:

$$u(t) = (Ah)(t) + (ABu)(t),$$

т. е.

$$Ah = (I - AB)u, \quad u \in X. \tag{3.5}$$

И для $\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \leq \frac{1}{a^*}(a^* - a_*) < 1$, применив операторную спектральную теорему, мы получим

$$u(t) = (I - AB)^{-1}(Ah)(t), \quad t \in [0, \omega].$$

Пусть $P : X \to X$ — оператор, определяемый следующим образом:

$$(Ph)(t) = (I - AB)^{-1}(Ah)(t). \tag{3.6}$$

Тогда (3.5) эквивалентно $u = Ph$. В соответствии с формулой разложения Неймана P можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} P &= (I - AB)^{-1}A = (I + AB + (AB)^2 + \cdots + (AB)^n + \cdots)A \\ &= A + ABA + (AB)^2A + \cdots + (AB)^nA + \cdots . \end{aligned}$$

Очевидно, что для любого $h \in C_\omega^-$ $u(t) = (Ph)(t)$ — единственное положительное решение краевой задачи (3.3).

Если $\rho < \frac{\pi}{\omega}$, то A вполне непрерывен, $(Ah)(t) > 0$ для $-h(t) > 0$, $t \in [0, \omega]$, и B равномерно ограничено.

Сначала докажем, что $A : X \to X$ вполне непрерывен. Из непрерывности h мы знаем, что A непрерывен. Теперь докажем, что $A(D)$ равномерно ограничен. Пусть $D \subset X$ — ограниченное множество. Тогда существует $M > 0$ такое, что $\|u\| < M$ для любого $u \in D$. Пусть $M = \sup_{0 \leq t \leq \omega} |h(s)|$. Тогда для любого $u \in D$, согласно лемме 2.1, мы имеем

$$\|Au\| = \max_{t \in [0,\,\omega]} \left| \int_0^\omega G(t,s)(-h(s))ds \right| \leq \int_0^\omega |G(t,s)|\,|-h(s)|\,ds \leq LM\omega,$$

что доказывает, что $A(D)$ равномерно ограничен.

С другой стороны, поскольку $G(t,s)$ равномерно непрерывна, мы знаем, что для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых t_1, $t_2 \in [0, \omega]$ при $|t_1 - t_2| < \delta$ мы имеем

$$|G(t_1, s) - G(t_2, s)| < \frac{\epsilon}{\omega M}.$$

Поэтому

$$|A(t_1) - A(t_2)| \leq M \int_0^\omega |G(t_1, s) - G(t_2, s)| ds,$$

тогда

$$|A(t_1) - A(t_2)| \leq M \int_0^\omega |G(t_1, s) - G(t_2, s)| ds < \frac{\omega M \epsilon}{\omega M} = \epsilon,$$

что показывает, что $A(D)$ равностепенно непрерывен. Из теоремы Арцела–Асколи следует, что $A(D)$ вполне непрерывен.

Во-вторых, докажем, что $B : X \to X$ равномерно ограничен.

Пусть $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ — равномерно ограниченное множество X, т. е. существует положительная постоянная $M_1 > 0$ такая, что $u_n(t) \leq M_1$ для всех $u_n \in K$. Пусть $a^* = \max_{0 \leq t \leq \omega} |a(t)|$. Тогда для любого n мы имеем

$$\|(Bu_n)(t)\| \le (a^* - a_*)\|u_n(t)\|, \quad t \in [0, \omega].$$

Отсюда следует

$$\|Bu_n\| \le (a^* - a_*)M_1,$$

это показывает, что $B(K)$ равномерно ограничен.

Лемма 3.2. *Если $\rho < \frac{\pi}{\omega}$ верно, то P вполне непрерывен, и для всех $h \in C_\omega^-$ мы имеем*

$$(Ah)(t) \le (Ph)(t) \le \frac{a^*}{a_*}\|(Ah)(t)\|.$$

Доказательство. Поскольку $\|AB\| \le \|A\|\|B\| \le \frac{1}{a^*}(a^* - a_*) < 1$, с использованием формулы разложения Неймана, P можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} P &= (I - AB)^{-1}A = (I + AB + (AB)^2 + \dots + (AB)^n + \dots)A \\ &= A + ABA + (AB)^2A + \dots + (AB)^nA + \dots . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Вполне непрерывность A при непрерывности $(I - AB)^{-1}$ доказывает, что оператор P вполне непрерывен.

Пусть $u = Ah$ для всех $h \in C_\omega^-$. Тогда $u \in X \cap C_\omega^-$ и $u < 0$. Таким образом, мы имеем

$$B(t) = (a(t) - a^*)u(t) \ge 0, \quad t \in [0, \omega].$$

Следовательно, для всех $h \in C_\omega^-$ мы имеем

$$(BAh)(t) \ge 0, \quad t \in [0, \omega]. \tag{3.8}$$

Таким образом,

$$A(BAh)(t) = (AB)(Ah)(t) \ge 0, \quad t \in [0, \omega].$$

Предположим, что для всех $h \in C_\omega^-$, $(Ah)(t) > 0$, $(AB)^k(Ah)(t) \ge 0$, $t \in [0, \omega]$, пусть $h_1 = BAh$. С использованием (3.7) мы имеем $h_1 \in C_\omega^-$. Таким образом,

$$(AB)^{k+1}(Ah)(t) = (AB)^k(ABAh)(t) = (AB)^k(Ah_1) \ge 0, \quad t \in [0, \omega].$$

По индукции мы имеем

$$(AB)^n(Ah)(t) \ge 0$$

для всех $n \ge 1$, $h \in C_\omega^-$ и $t \in [0, \omega]$.

Используя (3.6) для всех $h \in C_\omega^-$, мы получим

$$\begin{aligned} (Ph)(t) &= (Ah)(t) + (AB)(Ah)(t) + (AB)^2(Ah)(t) + \dots + (AB)^n(Ah)(t) + \dots \\ &\ge (Ah)(t), \quad t \in [0, \omega]. \end{aligned}$$

С другой стороны, для всех $h \in C_\omega^-$ мы имеем

$$\begin{aligned} (Ph)(t) &\le (Ah)(t) + |AB|(Ah)(t) + \dots + |AB|^n(Ah)(t) + \dots \\ &\le \left(1 + \frac{a^* - a_*}{a^*} + \dots + \left(\frac{a^* - a_*}{a^*}\right)^n + \dots\right)(Ah)(t) = \frac{a^*}{a_*}(Ah)(t), \quad t \in [0, \omega]. \end{aligned}$$

Это означает

$$(Ph)(t) \le \frac{a^*}{a_*}\|(Ah)(t)\|.$$

Поэтому для всех $h \in C_\omega^-$ мы имеем

$$(Ah)(t) \le (Ph)(t) \le \frac{a^*}{a_*}\|(Ah)(t)\|. \qquad \square$$

Определим оператор $Q : X \to X$ следующим образом:

$$(Qu)(t) = P(-f(t, u(t))). \tag{3.9}$$

Поскольку P непрерывен, мы знаем, что Q непрерывен. Теперь докажем, что Q вполне непрерывен в X. Для любого $u \in C[0, \omega]$ определим $F(u) = -f(t, u) \in C_\omega^-$. Поскольку f непрерывна, F тоже непрерывна. Для каждого $u \in X$ мы видим, что $F(u) = -f(t, u) \in C_\omega^-$, $w = A(F(u))$. Пусть $D \subset X$ — ограниченное множество в $C[0, \omega]$. Вследствие непрерывности $f : [0, \omega] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, $F(D)$ — ограниченное множество в $C[0, \omega]$. Вследствие ограниченности оператора $P : X \to X$, $Q(D) = P(F(D))$ ограничен в X. Вследствие компактности вложения $X \to X$, $Q(D)$ — предкомпактное (относительно компактное) множество в X, и поэтому Q вполне непрерывен.

Замечание. Оператор AB вполне непрерывен. Пусть $D \subset X$ — ограниченное множество в $X = C[0, \omega]$. Из непрерывности B (поскольку $\|B\| \le a^* - a_*$ для всех $u \in X$, $t \in [0, 1]$, т. е. B равномерно ограничен, и поэтому B ограничен) следует, что $B(D)$ — ограниченное множество в $X = C[0, \omega]$. Вследствие ограниченности оператора $A : X \to X$, $A(B(D))$ ограничен в X. Вследствие компактности вложения $A : X \to X$, $A(B(D))$ — предкомпактное (относительно компактное) множество в X, и поэтому AB вполне непрерывен.

Существование решений для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка $u^{(4)}(t) - a(t)u(t) = f(t, u(t))$ эквивалентно существованию неподвижных точек для уравнения $u = Qu$.

Лемма 3.3. $Q(K_0) \subset K_0$.

Доказательство. Для $u \in K_0$ из леммы 3.2 мы имеем

$$(Qu)(t) = P(-f(t, u(t))) \ge A(-f(t, u)) = \int_0^\omega G(t, s)f(s, u(s))\, ds > l \int_0^\omega f(s, u(s))\, ds.$$

С другой стороны, снова из леммы 3.2 мы имеем

$$(Qu)(t) = P(-f(t, u(t))) \le \frac{a^*}{a_*}\|A(-f(t, u))\| = \frac{a^*}{a_*} \max_{t \in [0, \omega]} \int_0^\omega G(t, s)f(s, u(s))\, ds$$

$$\le \frac{a^* L}{a_*} \int_0^\omega f(s, u(s))\, ds.$$

Поэтому

$$Qu(t) > \frac{a_* l}{a^* L}\|Qu\| = \theta\|Qu\|,$$

т. е. $Q(K_0) \subset K_0$. $\square$

Теорема 3.2. *Если* $\rho < \frac{\pi}{\omega}$ *и* $f^0 = 0$, $f_\infty = \infty$, *то краевая задача* (1.3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Если $f^0 = 0$, мы можем выбрать $0 < r < 1$ такое, что $f(t,u) \le \varepsilon u$ для $0 \le u \le r$, $t \in [0,\omega]$, где постоянная $\varepsilon > 0$ удовлетворяет

$$\frac{\varepsilon\omega a^* L}{a_*} < 1.$$

Согласно лемме 2.2 и лемме 3.2, для $u \in \partial K_{0r},\ t \in [0,\omega]$ мы получим

$$\|Qu\| \le \frac{a^* L}{a_*} \int\limits_0^\omega f(s,u(s))\,ds \le \frac{\varepsilon a^* L}{a_*} \int\limits_0^\omega u(s)\,ds \le \frac{\varepsilon\omega a^* L}{a_*}\|u\| < \|u\|.$$

С другой стороны, если $f_\infty = \infty$, существует постоянная $\widetilde{H} > r$ такая, что $f(t,u) \ge \eta u$ для $u \ge \widetilde{H},\ t \in [0,\omega]$, где постоянная $\eta > 0$ удовлетворяет

$$\eta\omega\theta l > 1,$$

и снова, согласно лемме 2.2 и лемме 3.2, для $u \in \partial K_{0\widetilde{H}},\ t \in [0,\omega]$ мы получим

$$Qu(t) = \int\limits_0^\omega G(t,s) f(s,u(s))ds > l \int\limits_0^\omega f(s,u(s))\,ds > l\eta \int\limits_0^\omega u(s) > l\eta\omega\theta\|u\| > \|u\|.$$

Из леммы 3.1 мы знаем, что

$$i(Q, K_{0r}, K_0) = 1 \tag{3.10}$$

и

$$i(Q, K_{0\widetilde{H}}, K_0) = 0. \tag{3.11}$$

Вследствие аддитивности индекса неподвижной точки (3.10) и (3.11) мы имеем

$$i(Q, K_{0\widetilde{H}} \setminus K_{0r}, K_0) = i(Q, K_{0\widetilde{H}}, K_0) - i(Q, K_{0r}, K_0) = -1.$$

Следовательно, Q имеет неподвижную точку в $K_{0\widetilde{H}} \setminus K_{0r}$, которое является положительным ω-периодическим решением (1.3) для $r < u < \widetilde{H}$. □

Рассмотрим пример для иллюстрации применимости представленных результатов.

Пример. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - a(t)u(t) = f(t,u(t)), \quad t \in (0,\omega), \\ \qquad u^{(i)}(0) = u^{(i)}(\omega), \quad i \in \{0,1,2,3\}, \end{cases} \tag{3.12}$$

где

$$a(t) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi t),$$

$$f(t, u(t)) = u^2(t)\sin(\pi t) + u^2(t),$$

$$f^0 = \lim_{u\to 0}\sup \frac{f(t, u(t))}{u(t)} = \lim_{u\to 0} u(t)\sin(\pi t) + u(t) = 0$$

и

$$f_\infty = \lim_{u\to\infty}\inf \frac{f(t, u(t))}{u(t)} = \lim_{u\to\infty} u(t)\sin(\pi t) + u(t) = \infty.$$

Поскольку $\rho\omega < \pi$, $f^0 = 0$ и $f_\infty = \infty$, все предположения и условия теоремы 3.2 удовлетворяются. Следовательно, задача (3.12) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Литература

1. **Fonda A., Manasevich R., Zanolin F.** Subharmonic solutions for some second-order differential equations with singularities // SIAM J. Math. Anal. — 1993. — Vol. 24, № 5. — P. 1294–1311.
2. **Cabada A., Enguica R., Lopez-Somosa L.** Positive solutions for second-order boundary-value problems with sign changing Green's functions // Elect. J. Diff. Eq. — 2017. — № 245. — P. 1–17.
3. **Zhao C.H., Chen W., Zhou J.L.** Periodic solutions for a class of fourth-order nonlinear differential equations // Nonlinear Anal. TMA. — 2010. — Vol. 72, № 3, 4. — P. 1221–1226.
4. **Guo D., Lakshmikantham V.** Nonlinear Problems in Abstract Cones. — Orlando, FL: Academic Press, 1988.
5. **Bonheure D., De Coster C.** Forced singular oscillators and the method of lower and upper solutions // Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2003. — Vol. 22, № 2. — P. 297–317.
6. **Zeidler E.** Applied Functional Analysis. — New York: Springer, 1995. — (Applied Mathematical Sciences; Vol. 108).
7. **Haddouchi F., Benaicha S.** Positive solutions of a nonlinear three-point eigenvalue problem with integral boundary conditions // Romanian Journal of Mathematics and Computer Science. — 2015. — Vol. 5, iss. 2. — P. 202–213.
8. **Han G.D., Xu Z.B.** Multiple solutions of some nonlinear fourth-order beam equations // Nonlinear Anal. TMA. — 2008. — Vol. 68, № 12. — P. 3646–3656.
9. **Wang H.Y.** Positive periodic solutions of singular systems with a parameter // J. Diff. Eq. — 2010. — Vol. 249, № 12. — P. 2986–3002.
10. **Rachunkova I., Tvrdy M., Vrkoc I.** Existence of nonnegative and nonpositive solutions for second order periodic boundary value problems // J. Diff. Eq. — 2001. — Vol. 176, № 2. — P. 445–469.
11. **Sun J., Liu Y.** Multiple positive solutions of singular third-order periodic boundary value problem // Acta Mathematica Scientia. Series B. — 2005. — Vol. 25, № 1. — P. 81–88.
12. **Chu J.F., Torres P.J., Zhang M.R.** Periodic solutions of second order non-autonomous singular dynamical systems // J. Diff. Eq. — 2007. — Vol. 239, № 1. — P. 196–212.
13. **Xia J., Wang Z.H.** Existence and multiplicity of periodic solutions for the Duffing equation with singularity // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A. — 2007. — Vol. 137. — P. 625–645.
14. **Kong L.B., Jiang D.Q.** Multiple solutions of a nonlinear fourth order periodic boundary value problem // Ann. Polon. Math. — 1998. — Vol. LXIV.3. — P. 265–270.

15. **Zhang M.R.** Periodic solutions of Lienard equations with singular forces of repulsive type // J. Math. Anal. Appl. — 1996. — Vol. 203, № 1. — P. 254–269.

16. **Zhang M.R.** A relationship between the periodic and the Dirichlet BVPs of singular differential equations // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A. — 1998. — Vol. 128, № 5. — P. 1099–1114.

17. **Conti M., Terracini S., Verzini G.** Infinitely many solutions to fourth order superlinear periodic problems // Trans. Am. Math. Soc. — 2003. — Vol. 356. — P. 3283–3300.

18. **Bouteraa N., Benaicha S.** Triple positive solutions of higher-order nonlinear boundary value problems // J. Comput. Sci. Comp. Math. — 2017. — Vol. 7, № 2. — P. 25–31.

19. **Torres P.J.** Weak singularities may help periodic solutions to exist // J. Diff. Eq. — 2007. — Vol. 232, № 1. — P. 277–284.

20. **Taliaferro S.** A nonlinear singular boundary value problem // Nonlinear Anal. TMA. — 1979. — Vol. 3. — P. 897–904.

21. **Mosconi S., Santra S.** On the existence and non-existence of bounded solutions for a fourth-order ODE // J. Diff. Eq. — 2013. — Vol. 255, № 11. — P. 4149–4168.

22. **Benaicha S., Haddouchi F.** Positive solutions of a nonlinear fourth-order integral boundary value problem // Annals of West University of Timisoara – Mathematics and Computer Science. — 2016. — Vol. 54, № 1. — P. 73–86.

23. **Ding T.R.** A boundary value problem for the periodic Brillouin focusing system // Acta Sci. Natur. Univ. Pekinensis. — 1965. — Vol. 11. — P. 31–38.

24. **Agarwal R.P., O'Regan D., Wong P.J.Y.** Positive Solutions of Differential, Difference and Integral Equations. — Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

25. **Ma R., Dai G.W.** Periodic solutions of nonlocal semilinear fourth-order differential equations // Nonlinear Anal. TMA. A. — 2011. — Vol. 74, № 15. — P. 5023–5029.

26. **Lakshmikantham V., Leela S.** Existence and monotone method for periodic solutions of first-order differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1983. — Vol. 91. — P. 237–243.

27. **Li Y.X.** Positive solutions of fourth-order periodic boundary value problems // Nonlinear Anal. TMA. — 2003. — Vol. 54, № 6. — P. 1069–1078.

28. **Li W., Zhang M.R.** Non-degeneracy and uniqueness of periodic solutions for some superlinear beam equations // Appl. Math. Lett. — 2009. — Vol. 22. — P. 314–319.

Поступила в редакцию 24 октября 2017 г.
После доработки 18 марта 2018 г.
Принята к публикации 5 октября 2018 г.