

## ОБРУШЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Букреев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Обсуждаются результаты экспериментальных исследований поверхностных и внутренних волн при поступательном движении вертикальной пластины, перекрывающей все поперечное сечение канала. Найдено, что при критических скоростях распространения, предсказываемых линейной теорией или первым приближением теории мелкой воды, волны не обрушиваются. Обрушение начинается только при более высоких скоростях распространения, когда исчерпывается стабилизирующее влияние дисперсии волн. Приведена количественная информация, полезная для тестирования математических моделей и численных методов.

При обрушении волн упорядоченное движение становится частично хаотическим. В этом отношении обрушение волн аналогично процессу перехода от ламинарного течения к турбулентному. Вместе с тем, в отличие от проблемы турбулентности, переходу от гладких к обрушивающимся волнам уделяется мало внимания. Автору известна только одна математическая модель [1], позволяющая описывать такой переход.

Настоящая работа содержит результаты экспериментального исследования изменений в картине волн при переходе скорости их распространения через четыре возможных критических значения для двухслойной жидкости конечной глубины. Уточняются условия, при которых происходит обрушение волн, обсуждается роль стабилизирующих и дестабилизирующих факторов, анализируется изменение скорости распространения и высоты волн в процессе обрушения. Аналогичные данные для однородной по плотности жидкости содержатся в [2–5].

1. Для однородной жидкости, покоящейся над ровным горизонтальным дном, теоретический анализ дает два характерных значения скорости распространения  $c$  плоских гравитационных волн. Значение  $c_1 = \sqrt{gh}$  ( $g$  — ускорение силы тяжести,  $h$  — начальная глубина жидкости) предсказывается линейной теорией как предельная скорость распространения малых гармонических возмущений. При переходе в область, где  $c > c_1$ , волны могут обрушиться, а могут сохранить гладкость. В опытах [2–5] волны сохраняли гладкость, а их неустойчивость проявлялась лишь в том, что на фоне основной плоской волны появлялись слабые косые волны, рост которых подавляло поверхностное натяжение. Значение  $c_2 = \sqrt{2gh}$  предсказывается вторым приближением теории мелкой воды как предельная скорость распространения кноидальных (в частности уединенных) волн [6]. Более точное значение  $c_2 = 1,294 \sqrt{gh}$  получается на основе полной модели потенциального движения жидкости [7, 8].

Неоднозначность характерной скорости приводит к необходимости уточнять терминологию. Она не общепринята даже по отношению к  $c_1$ . Наиболее универсальное название  $c_1$  — критическая скорость — используется в гидравлике. Другие ее названия отражают какую-либо одну особенность реакции системы и являются более «узкими». В [5] предлагается называть  $c_1$  первой, а  $c_2$  — второй критической скоростью распространения гравитационных волн на мелкой воде.

Эксперименты [4, 5] подтвердили второе из приведенных теоретических значений  $c_2$  и показали, что эта скорость критична не только для уединенных волн, но и для волн более общего вида. В ее окрестности такой сильный стабилизирующий фактор, как дисперсия волн, перестает справляться с разрушительными тенденциями даже при слабой нелинейности. Менее эффективными оказываются и такие стабилизирующие факторы, как нестационарность или поверхностное натяжение. В опытах волны со скоростями  $c > c_2$  неизменно обрушивались.

В случае двухслойной жидкости со свободной поверхностью имеются две моды собственных колебаний: поверхностная и внутренняя, и для каждой из них существует, по крайней мере, по две критических скорости. Теоретически пара скоростей, аналогичных по смыслу  $c_1$ , находится из дисперсионного соотношения линейной теории  $c(k)$  при  $k \rightarrow 0$  ( $k$  — волновое число линейных гармонических возмущений) [6]:

$$(c_{11}, c_{21}) = \sqrt{\frac{gH}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1-\lambda)h_1h_2}{H^2}} \right]}, \quad (1.1)$$

где первая цифра индекса указывает на номер свободной границы, а вторая — на номер критической скорости (знак плюс и индекс 2 соответствуют поверхностной волне);  $H = h_1 + h_2$ ;  $\lambda = \rho_2/\rho_1$ ;  $h_1$  и  $\rho_1$  — начальная глубина и плотность нижней жидкости,  $h_2$  и  $\rho_2$  — то же для верхней жидкости. Жидкости не смешиваются друг с другом. Влияние вязкости и межфазного натяжения не учитывается. Из (1.1) следует, что в любом из трех пределов:  $h_1 \rightarrow 0$ ,  $h_2 \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  — получается одно и то же значение  $c_1^* = \sqrt{gH}$ . Начальное состояние с  $\lambda > 1$  неустойчиво по механизму Рэля — Тейлора. При  $0 < \lambda < 1$  имеет место  $c_{11} < c_{21} < c_1^*$ .

Строгих формул для  $c_{12}$  и  $c_{22}$  пока нет. Поэтому при планировании опытов приходится ориентироваться на приближенные соотношения. Цель данной работы состояла в том, чтобы изучить поведение волн в окрестности наибольшей из критических скоростей  $c_{22}$ . Для оценки этой величины использовались следующие соображения.

На практике приходится иметь дело либо с двумя капельными жидкостями, для которых  $\lambda$  лежит в диапазоне от 0,8 до 1, либо с капельной жидкостью и газом, когда  $\lambda \ll 1$ . Во втором случае  $c_{11} \rightarrow 0$ , а  $c_{21} \rightarrow \sqrt{gh_1}$ , т. е. влияние разности плотностей на первую критическую скорость пренебрежимо мало. Из опытов [4, 5] следует, что такой вывод справедлив и для второй критической скорости поверхностной моды. Данные опыты проводились при  $\lambda = 0,8$ . Анализ (1.1) показывает, что наибольшее влияние разности плотностей имеет место при  $h_2/h_1 = 1$ . В этом случае  $c_{11} = 0,224 \sqrt{gH}$ ,  $c_{21} = 0,975 \sqrt{gH}$ , т. е. влияние разности плотностей существенно проявляется для внутренней моды, тогда как  $c_{21}$  отличается от  $c_1^*$  лишь на 2,5%. Чем ближе  $\lambda$  к 1, тем меньше  $c_{21}$  отличается от  $c_1^*$ .

С учетом сказанного предварительная оценка  $c_{22}$  осуществлялась по формуле

$$c_{22} = 1,294\alpha \sqrt{gH}, \quad (1.2)$$

где  $\alpha \approx \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4(1-\lambda)h_1h_2}{H^2}} \right]}$ . Формула (1.2) использовалась также для нормировки экспериментальных данных.

2. Схема эксперимента поясняется на рис. 1. Прямоугольный бассейн ( $3,8 \times 0,2$  м) с горизонтальным дном заполнялся водой ( $\rho_1 = 1$  г/см<sup>3</sup>, кинематический коэффициент вязкости  $\nu_1 = 0,0101$  см<sup>2</sup>/с) и керосином ( $\rho_2 = 0,8$  г/см<sup>3</sup>,  $\nu_2 = 0,0182$  см<sup>2</sup>/с). При анализе устойчивости поверхностных волн и потерь энергии при их обрушении необходимо учитывать, что в опытах присутствовала и третья среда — воздух при нормальных лабораторных условиях. На устойчивость волн сильное влияние оказывает межфазное натяжение

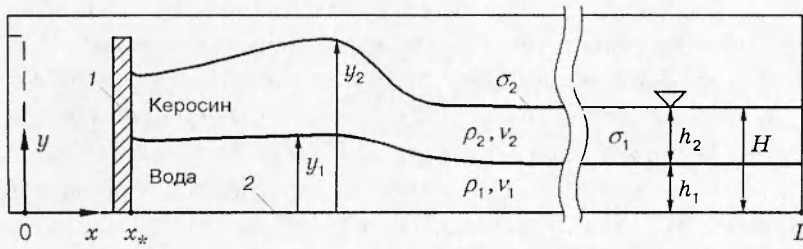


Рис. 1. Схема эксперимента:  
1 — пластина, 2 — дно бассейна

на границе контакта разных сред. В частности, без учета межфазного натяжения сколь угодно малая разность скоростей на границе контакта приводит к развитию неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. В опытах коэффициенты межфазного натяжения между водой и керосином  $\sigma_1$  и между керосином и воздухом  $\sigma_2$  равнялись  $40 \pm 6$  и  $27 \pm 0,2$  эрг/см<sup>2</sup> соответственно. Это обеспечивало устойчивость по Кельвину — Гельмгольцу до разности скоростей  $15 \div 20$  см/с.

В начальном состоянии жидкости покоились. В момент времени  $t = 0$  вертикальная пластина 1 начинала движение вдоль оси  $x$  и при  $t = T_2$  резко останавливалась. Неподвижная система координат показана на рис. 1, ее начало выбрано на линии пересечения передней плоскости пластины с дном бассейна при  $t = 0$ . Пластина перекрывала все поперечное сечение бассейна. Этот частный случай погружения пластины изучался с целью минимизировать число параметров вносимого возмущения. Та же цель преследовалась при выборе закона движения пластины  $x_*(t)$ , где  $x_*$  — координата произвольной точки пластины.

На рис. 2 (линия 1) приведен пример закона движения пластины, полученного киносъёмкой. Приняты обозначения:  $\xi^* = x_*/H$ ,  $\tau = t\sqrt{g/H}$ . Экспериментальные точки неплохо аппроксимируются зависимостью

$$x_* = \begin{cases} Ut + UT_1[\exp(-t/T_1) - 1] & \text{при } 0 \leq t < T_2, \\ l & \text{при } t \geq T_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $U$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  и  $l$  — параметры, из которых независимы только какие-либо три. Далее в

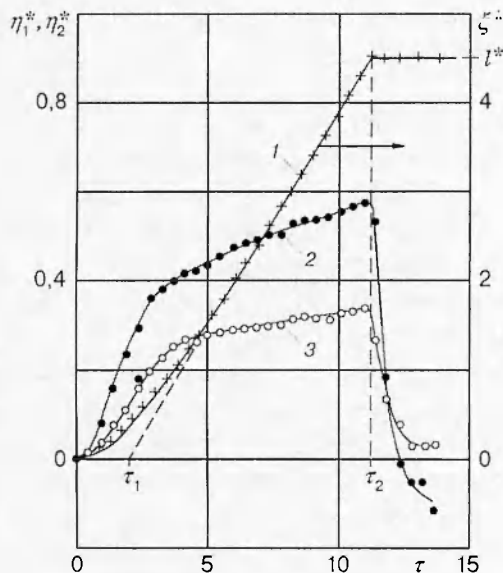


Рис. 2. Закон движения пластины и изменение уровней на ней:  
1 — закон движения, 2 — уровень свободной поверхности, 3 — уровень границы раздела

качестве основных параметров используются  $U$ ,  $T_1$  и  $T_2$ . Двухпараметрический закон движения реализован в [4]. В опытах дальнейшее уменьшение числа параметров невозможно.

Основными изучаемыми величинами были колебания границы раздела  $y_1$  и свободной поверхности  $y_2$  (см. рис. 1). До потери устойчивости эти величины зависели от  $x$ ,  $t$  и перечисленных выше параметров. В опытах варьировались  $U$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  и  $h_2/h_1$ . Другие параметры, в том числе  $H = 4,8$  см, не менялись. Величины  $y_1$  и  $y_2$  регистрировались кинолентой с частотой 32 кадра в секунду. Для приводимой далее количественной информации среднеквадратичная мера погрешности не превышала 2 % для скорости распространения, 3 % для высоты поверхностных волн, 3 и 4 % для соответствующих характеристик внутренних волн.

3. Типичные результаты опытов иллюстрируются на примере следующего сочетания основных параметров:  $H = 4,8$  см,  $h_2/h_1 = 1$ ,  $\lambda = 0,8$ ,  $U/\sqrt{gH} = 0,49$ ,  $\tau_1 = T_1\sqrt{g/H} = 2,0$ ,  $\tau_2 = T_2\sqrt{g/H} = 11,1$  ( $l^* = l/H = 4,42$ ). Закон движения стенки именно для этого примера дан на рис. 2, где приведены также графики повышения уровня свободной поверхности (линия 2) и границы раздела (линия 3) непосредственно на стенке. Приняты обозначения:  $\eta_1^* = (y_1^* - y_{10})/H$ ,  $\eta_2^* = (y_2^* - y_{20})/H$ ,  $y_1^*$  и  $y_2^*$  — ординаты границы раздела и свободной поверхности при  $x = x_*$ ,  $y_{10}$  и  $y_{20}$  — те же величины в состоянии покоя. До остановки пластины ( $\tau < \tau_2$ )  $\eta_1^*$  и  $\eta_2^*$  оставались гладкими. При  $\tau > \tau_2$  их поведение стало хаотичным вследствие сильного изменения условий на пластине при ее резкой остановке. Не исключено, что на небольших расстояниях вниз по потоку от пластины одновременно проявлялись разные механизмы потери устойчивости, в том числе неустойчивости на меньших критических скоростях. Визуально здесь наблюдалось вовлечение воздуха в керосин и перемешивание воды и керосина. На некотором удалении от остановившейся пластины на заднем склоне внутренней волны начинала развиваться неустойчивость Кельвина — Гельмгольца. Нестационарность и межфазное натяжение подавляли ее, и волны становились гладкими до тех пор, пока скорость распространения их переднего фронта не достигала  $c_{22}$ , затем начиналось обрушение поверхностной волны, а внутренняя волна сохраняла гладкость вплоть до полного вырождения.

На рис. 3 приведены профили поверхностной и внутренней волн в два момента времени после остановки пластины ( $\eta_1 = y_1/H$ ,  $\eta_2 = y_2/H$ ,  $\xi = x/H$ ). Скорость распространения переднего фронта возмущения (кривые 1а и 2а) только что достигла  $c_{22}$  снизу, и скорость возмущения перешла в закритическую область (кривые 1б и 2б). На интервале  $\xi^* < \xi < 6$  имело место вовлечение воздуха в керосин и перемешивание воды и керосина. На интервалах  $6 < \xi < 8$  и  $6 < \xi < 12$  для обеих волн (кривые 1а и 1б соответственно) проявлялась неустойчивость Кельвина — Гельмгольца.

За передним фронтом и на свободной поверхности, и на границе раздела наблюдались слабые косые волны. Появление косых волн — одна из форм потери устойчивости. Не исключено, что наличие таких волн связано с тем, что в процессе эволюции возмущение пересекало границу  $c = c_{21}$ . Нестационарность, дисперсия, межфазное натяжение и вязкость не позволили развиваться неустойчивости на этой границе до стадии обрушения. Однако возможно, что именно косые волны послужили теми возмущениями, которые привели к обрушению основной волны при пересечении границы  $c = c_{22}$ .

Поскольку волны были нестационарными, необходимо уточнить определение скорости их распространения  $c$ . Далее в качестве  $c$  берется скорость продольного перемещения той точки переднего фронта, отклонение которой от положения равновесия равно  $\eta_m/2$ , где  $\eta_m$  — высота первого гребня (рис. 3). В этом примере скорости распространения других точек переднего фронта отличались от  $c$  не более, чем на 2 %.

Зависимость  $c$  от  $\xi$  приведена на рис. 4. При  $\xi > 7$  различие  $c$  для поверхностной и внутренней волн лежало в пределах погрешности измерений. Кинолента показала, что

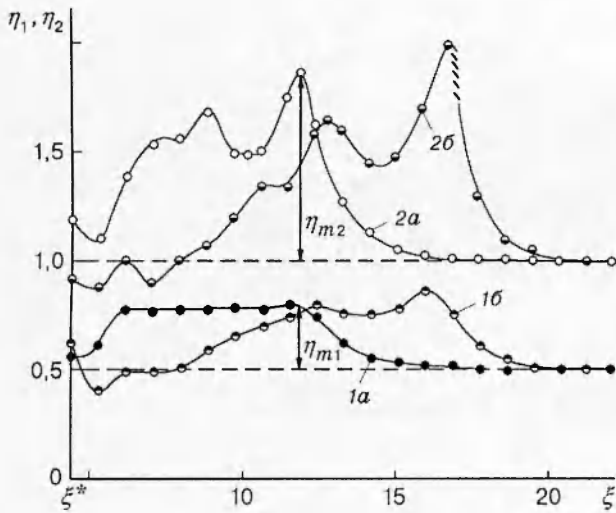


Рис. 3

Рис. 3. Профили волн до и после обрушения:

1 и 2 —  $\eta_{m1}$  и  $\eta_{m2}$  соответственно; а —  $\tau = 12,0$ , б —  $\tau = 15,6$

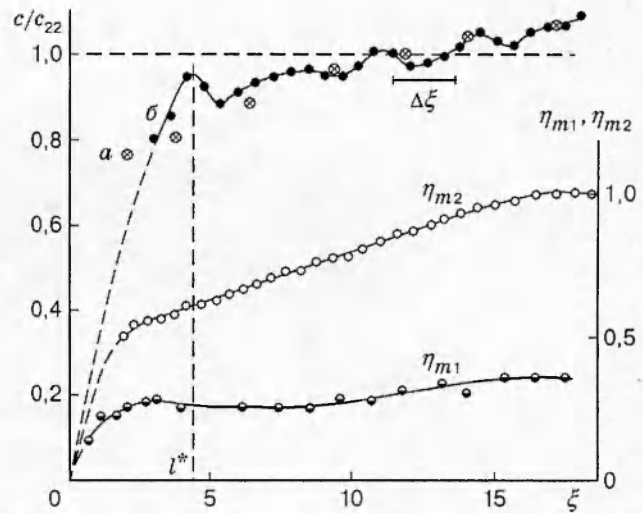


Рис. 4

Рис. 4. Скорости распространения и высоты волн:

а и  $\eta_{m1}$  — для внутренней волны, б и  $\eta_{m2}$  — для поверхностной волны

переход от гладких к обрушивающимся поверхностным волнам происходил на интервале  $\Delta\xi$ . Обрушение начиналось, когда  $c$  достигало снизу  $c_{22}$ . Переход в область  $c > c_{22}$  происходил только после того, как обрушение становилось полностью развитым.

При вариации параметров, особенно ускорения пластины, наблюдалось и иное поведение системы, чем в обсуждаемом примере. В частности, волны некоторое время могли сохранять гладкость и в области  $c > c_{22}$ . Но постепенно скорость распространения гладких волн достигала локального максимума, затем уменьшалась до  $c_{22}$ , и начинался процесс обрушения. После завершения этого процесса скорость распространения могла снова возрастать.

На рис. 4 приведены данные о высотах первых гребней волн  $\eta_{m1}$  и  $\eta_{m2}$ . Этот параметр волны, в отличие от скорости ее распространения, не претерпевает столь характерных изменений в критическом состоянии и в процессе перехода от гладких к обрушивающимся волнам продолжает монотонно возрастать. Наибольшего значения он достигает уже на стадии полностью развитого обрушения, причем величина соответствующего максимума сильно зависит от формы волны. Например, по теории [7, 8] предельная высота уединенной волны на свободной поверхности равна 0,827 от начальной глубины. Для волн более общего вида в опытах [4, 5] их предельные высоты были и больше и меньше указанной теоретической предельной высоты уединенной волны. На рис. 4 безразмерная предельная высота поверхностной волны достигает единицы, а в начале процесса обрушения  $\eta_{m2} = 0,85$ .

На рис. 5 приведены фотоснимки головной части волн на стадиях только что начавшегося и полностью развитого обрушения поверхностной волны. Внутренняя волна на рис. 5, б остается гладкой, хотя скорость ее распространения превышает  $c_{22}$ . Ее гладкость сохраняется вплоть до полного затухания колебаний в бассейне. Эта внутренняя волна порождается поверхностной волной и может трактоваться как вынужденная. Кроме того, она нестационарна. Поэтому вопрос о существовании гладких стационарных свободных

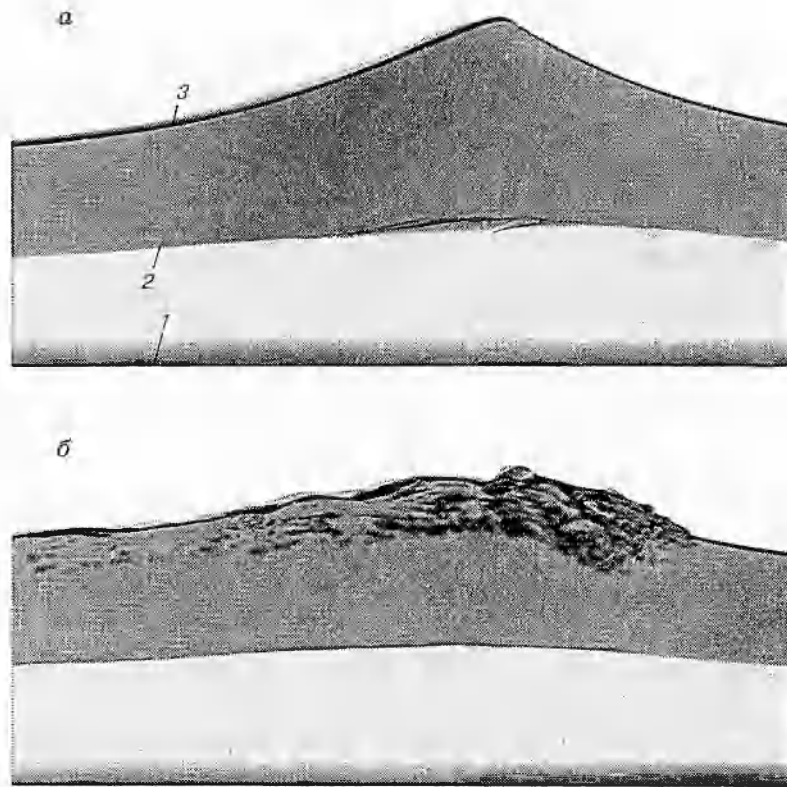


Рис. 5. Фотоснимки головной части волн на начальной стадии обрушения (а) и на полностью развитой (б):

1 — дно бассейна, 2 — граница раздела, 3 — свободная поверхность

волн с  $c > c_{22}$  остается открытым. Тем не менее приведенный пример гладкой внутренней волны с  $c > c_{22}$  интересен тем, что необходимые условия для сохранения гладкости вырабатывает сама динамическая система, а не специально подобранное внешне воздействие.

Для анализа влияния параметра  $\lambda$  на поверхностные волны проведены дополнительные опыты с однородными жидкостями: водой и керосином. В качественном отношении картина волн оказалась идентичной при прочих равных условиях. Но критические скорости  $c_2$  достигались для воды при меньших  $x$ , чем для керосина (примерно на 10%). Для двухслойной жидкости критическая ситуация имела место при промежуточных значениях  $x$ .

В табл. 1 иллюстрируется влияние параметра  $h_2/h_1$  на отношение  $c_{2E}/c_{22}$ , где  $c_{2E}$  измерено экспериментально,  $c_{22}$  подсчитано по формуле (1.2). В целом расхождение между экспериментальными и расчетными данными лежит в пределах погрешности измерений. Исключение составляет случай очень тонкого верхнего слоя (0,44 см), когда экспериментальная критическая скорость превышала расчетную на 10%. Возможно, это обусловлено тем, что при столь малом расстоянии между двумя свободными границами суммарное влияние межфазного натяжения на каждой из них увеличило устойчивость.

В табл. 2 приведены данные о профилях волн  $\eta_1(\xi_0)$  и  $\eta_2(\xi_0)$  при четырех фиксированных значениях  $\tau$ . Время по-прежнему отсчитывается от начала движения пластины, продольная координата — от ее текущего положения, так что  $\xi_0 = \xi - \xi^*$ . Значения  $\xi^*$

Таблица 1

$h_2/h_1$	$c_{2E}/c_{22}$	$h_2/h_1$	$c_{2E}/c_{22}$
0	1,00	1	0,99
0,1	1,10	2	0,97
0,2	0,99	5	1,01
0,5	0,97	11	1,02

приведены в таблице. Значения  $\xi_0$ , при которых  $\eta_2 = \eta_{m2}$ , выделены. Значения основных параметров те же, что и для рис. 3. При  $\tau = 5,8$  пластина двигалась. Остальные данные получены для свободных волн. При  $\tau = 11,3$  волны оставались гладкими, при  $\tau = 14,2$  имело место обрушение переднего фронта поверхностной волны, а при  $\tau = 15,8$  обрушение поверхностной волны было полностью развитым.

В целом результаты опытов подтвердили гипотезу о том, что для каждой моды собственных колебаний жидкости, помимо широко известной критической скорости распространения, в окрестности которой может произойти обрушение волн, существует по крайней мере одна еще более критическая скорость, причем количественное значение последней может быть оценено по предельной скорости распространения уединенных волн. Приве-

Таблица 2

	$\tau = 5,8$		$\tau = 11,3$		$\tau = 14,2$		$\tau = 15,8$	
	$\xi^* = 1,86$		$\xi^* = 4,42$					
$\xi_0$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_1$	$\eta_2$
0	0,78	1,48	0,84	1,59	0,52	0,90	0,46	1,02
1	0,76	1,44	0,84	1,57	0,55	0,95	0,44	1,00
<b>1,9</b>	<b>0,69</b>	<b>1,55</b>	—	—	—	—	—	—
2	0,69	1,55	0,81	1,57	0,59	1,05	0,50	0,96
3	0,61	1,27	0,76	1,60	0,68	1,25	0,50	0,98
4	0,55	1,08	0,76	1,46	0,70	1,42	0,60	1,14
5	0,52	1,04	0,77	1,57	0,73	1,45	0,67	1,29
<b>5,8</b>	—	—	<b>0,78</b>	<b>1,79</b>	—	—	—	—
6	0,50	1,00	0,79	1,65	0,74	1,65	0,68	1,38
7	0,50	1,00	0,60	1,23	0,72	1,47	0,74	1,44
8	—	—	0,56	1,08	0,73	1,43	0,78	1,64
9	—	—	0,52	1,04	0,78	1,70	0,75	1,47
<b>9,6</b>	—	—	—	—	<b>0,78</b>	<b>1,90</b>	—	—
10	—	—	0,50	1,02	0,79	1,61	0,76	1,44
11	—	—	0,50	1,00	0,60	1,21	0,81	1,61
<b>11,9</b>	—	—	—	—	—	—	<b>0,75</b>	<b>1,94</b>
12	—	—	0,50	1,00	0,57	1,06	0,74	1,69
13	—	—	—	—	0,53	1,03	0,60	1,23
14	—	—	—	—	0,51	1,00	0,56	1,11
15	—	—	—	—	0,50	1,00	0,52	1,09
16	—	—	—	—	0,50	1,00	0,51	1,03

ден пример, когда двухслойная жидкость сохраняла гладкость одной из двух свободных границ в закритической области за счет нестационарности, межфазного натяжения и вязкости.

Автор благодарит А. В. Гусева за проведение измерений и обработку киноплёнок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01164) и фонда интеграционных программ Сибирского отделения РАН (грант № 43).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляпидевский В. Ю.** Уравнения мелкой воды с дисперсией. Гиперболическая модель // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 40–45.
2. **Nadaoka K., Hino M., Koyano J.** Structure of the turbulent flow field under breaking waves in the surf zone // J. Fluid Mech. 1989. V. 204. P. 359–387.
3. **Perlin M., He J., Bernal L. P.** An experimental study of deep water plunging breakers // Phys. Fluids. 1996. V. 8, N 9. P. 2365–2374.
4. **Букреев В. И., Туранов Н. П.** Эксперименты с волнами на мелкой воде, генерируемыми движением торцевой стенки бассейна // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 44–50.
5. **Букреев В. И., Романов Е. М., Туранов Н. П.** Обрушение гравитационных волн в окрестности второй критической скорости // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 51–57.
6. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
7. **Longuet-Higgins M. S.** On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave // Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. A337. P. 1–13.
8. **Longuet-Higgins M. S., Fenton J. D.** On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II // Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. A340. P. 471–493.

*Поступила в редакцию 22/X 1996 г.,  
в окончательном варианте — 5/II 1997 г.*

---