

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ

А. Г. Кутушев, А. В. Татосов

Тюменский государственный университет, 625003 Тюмень, atatosov@utmn.ru

Рассматривается процесс прохождения импульса треугольной формы небольшой интенсивности через контактный разрыв. Проведен анализ затухания ударной волны, прошедшей во второй газ. Затронуты вопросы демпфирования детонационной волны после выгорания горючей смеси.

Ключевые слова: простая волна, ударная волна, распад разрыва, контактный разрыв, газ, облако реагирующей смеси, инварианты Римана.

### ВВЕДЕНИЕ

Прохождение какого-либо возмущения через границу раздела двух сред приводит к частичному его отражению и появлению области интерференции волн. Описанию процессов взаимодействия волн посвящена обширная литература [1, 2 и др.]. Особенность рассматриваемого движения состоит в распаде разрыва, который предшествует процессу отражения. Прошедшая во второй газ ударная волна является нестационарной, и определение ее закона затухания требует нахождения решения во всей области взаимодействия. Столкновение с контактным разрывом изучается аналитически преимущественно на ударных волнах ступенчатого вида. При переменной интенсивности прошедшей волны точное описание в общем случае невозможно и, как правило, проводится численно. Цель данного исследования состояла в нахождении аналитического решения для рассматриваемого частного случая движения. Найденное в рамках модели «эффективного газа» решение соответствует процессам взаимодействия ударных и детонационных волн с контактными границами одно- и двухфазных сред, частично отраженным в обзоре [3].

### РАЗРУШЕНИЕ ИМПУЛЬСА

Пусть плоский импульс треугольной формы небольшой интенсивности распространяется влево по оси абсцисс. Волну разрежения, следующую за скачком уплотнения, будем считать центрированной в начале координат. На расстоянии  $h$  от начала координат находится линия раздела газов. При достижении ударной волной контактной поверхности произойдет распад разрыва. В газ, находящийся слева

от поверхности раздела, пройдет затухающая ударная волна, а в обратном направлении — волна разрежения или сжатия. В работе рассмотрен первый случай, имитирующий распад детонационной волны, достигшей левой границы горючей смеси. Для более адекватного моделирования данного процесса контактный разрыв можно заменить диафрагмой, раскрывающейся в момент прихода импульса. В этом случае газ справа от поверхности раздела более сжатый и нагретый.

Параметры первоначального звукового импульса непосредственно перед столкновением будем считать заданными. По элементарной теории [4] также может быть определено состояние газа по обе стороны от контактной поверхности в первый момент после распада разрыва.

Определим возникающее в дальнейшем течение методом характеристик. Для упрощенного аналитического исследования предполагается, что показатели адиабаты  $\gamma$  газов по разные стороны от контактного разрыва одинаковы и равны  $5/3$ . Ввиду того, что проходящая ударная волна является слабой, все течение слева от контактной поверхности определяется как волна Римана с разрывом на ударной волне.

Выделим для газа, находящегося справа от контактного разрыва, три следующие друг за другом области течения: I, II —  $OAB$ , III —  $ADB$  (рис. 1). В области I газ неподвижен, здесь выполняются условия

$$r = r_0, \quad s = s_0, \quad a = a_0, \quad u = 0, \quad (1)$$

где  $u$  — скорость газа,  $a$  — скорость звука,  $r = u + 2a/(\gamma - 1)$ ,  $s = u - 2a/(\gamma - 1)$  — инварианты Римана. Значения  $r_0 = -s_0 = 2a_0/(\gamma - 1)$  полагаются заданными.

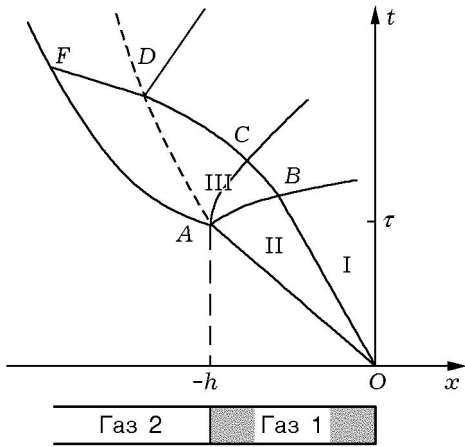


Рис. 1. Схематическое представление задачи о взаимодействии импульса треугольной формы с контактным разрывом

В области, центрированной в точке  $x = 0$ ,  $t = 0$  волны разрежения  $OAB$ , распространяющейся влево, справедливы условия [4]

$$r = r_0, \quad s_1 \leq s \leq s_0, \quad x/t = \alpha s + \beta r_0. \quad (2)$$

Здесь указанному выше значению  $\gamma$  соответствуют параметры  $\alpha = 2/3$  и  $\beta = 1/3$ . Величина  $s_1$  полагается заданной. Уравнение характеристики  $OA$  определяет момент ее столкновения с контактной линией:

$$\tau = -\frac{3h}{2s_1 + r_0}.$$

В области  $ADB$  общее решение может быть описано функцией  $W(r, s)$ , удовлетворяющей уравнению [5]

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial s} = \frac{m}{r-s} \left( \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial s} \right), \quad m = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}.$$

Общий интеграл этого уравнения при  $\gamma = 5/3$  имеет вид

$$W = \frac{f(r) + g(s)}{r-s}, \quad (3)$$

причем справедливо представление

$$x - (\alpha r + \beta s)t = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad (4)$$

$$x - (\alpha s + \beta r)t = \frac{\partial W}{\partial s}.$$

Область общего решения следует разбить на две части, так как из точки пересечения

ударной волны с линией контактного разрыва выходит пучок характеристик; в плоскости  $(x, t)$  на рис. 1 они обозначены  $ABC$ ,  $ACD$  и заранее неизвестны. Указанные области течения газа справа от контактного разрыва  $AD$  опишем функциями  $W_1$  и  $W_2$ .

Определим вначале параметры газа в зоне  $ABC$ , которая представляет собой область интерференции двух центрированных волн разрежения: первоначальной и возникшей в результате скачкообразного изменения скорости контактной поверхности в момент распада разрыва. В плоскости римановых переменных  $(r, s)$  на рис. 2 этой области соответствует прямоугольник  $A''A'BC$ :

$$r_1 \leq r \leq r_0, \quad s_1 \leq s \leq s_0.$$

Значение  $r_1$ , как уже отмечалось, может быть рассчитано по элементарной теории и потому считается заданным.

Пользуясь представлением (4), поставим для функции  $W_1(r, s)$  следующие краевые условия:

$$r = r_0: \quad x - (\alpha s + \beta r_0)t = \frac{\partial W_1}{\partial s} = 0,$$

$$s = s_1: \quad \frac{\partial W_1}{\partial r} = -h - \tau(\alpha r + \beta s_1).$$

Здесь  $x = -h$ ,  $t = \tau$  — место и момент распада разрыва. Учитывая вид общего решения (3), получаем

$$(r_0 - s)g'_1(s) + g_1(s) + f_1(r_0) = 0,$$

$$(r - s_1)f'_1(r) - f_1(r) - g_1(s_1) =$$

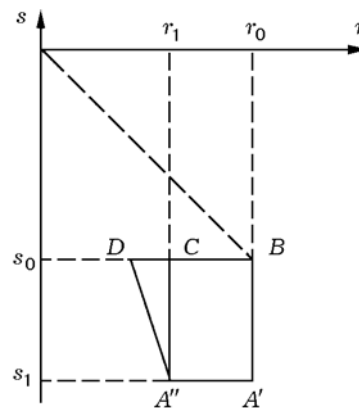


Рис. 2. Соответствующее рис. 1 представление задачи в переменных Римана

$$= [-h - \tau(\alpha r + \beta s_1)](r - s_1)^2,$$

где  $g_1'(s) = \frac{dg_1}{ds}$ ,  $f_1'(r) = \frac{df_1}{dr}$ . Поскольку потенциальная функция определена с точностью до константы, то из первого уравнения следует, что можно принять [5]

$$W_1 = \frac{f_1(r)}{r - s}, \quad f_1(r_0) = 0.$$

Тогда второе условие дает

$$f_1(r) = -\frac{\tau}{3}(r - r_0)(r - s_1)^2. \quad (5)$$

Определим теперь параметры газа во второй части области общего решения, ограниченной слева траекторией контактного разрыва. В плоскости  $(x, t)$  на рис. 1 эта часть отмечена  $ACD$ . В плоскости  $(r, s)$  на рис. 2 она отображается в треугольник  $A''CD$  со сторонами

$$r = r_1, \quad s = s_0, \quad s - s_1 = k(r - r_1). \quad (6)$$

Наклонная сторона соответствует траектории движения контактного разрыва. Здесь  $k = \frac{(\rho a)_+ + (\rho a)_-}{(\rho a)_+ - (\rho a)_-}$  — коэффициент отражения, определяемый импедансами газов  $(\rho a)$  справа и слева от контактной поверхности с момента распада разрыва. Этот коэффициент может быть выражен через параметры  $r_1, s_1$  и  $a_1$  (где  $a_1$  — скорость звука в невозмущенном слева газе) из условия равенства давлений и скоростей газов по обе стороны от контактного разрыва. Для идеального газа при указанном значении  $\gamma$  следует

$$k = \frac{r^- - s_1}{r^- - r_1}, \quad r^- = 3a_1.$$

Здесь учтено постоянство инварианта  $r^-$  в левом газе (параметры  $r_1, s_1$  относятся к газу, находящемуся справа от контактного разрыва).

Для функции  $W_2$  ставятся следующие краевые условия:

$$r = r_1: \quad \frac{\partial W_2}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial W_2}{\partial s} = \frac{\partial W_1}{\partial s},$$

$$s - s_1 = k(r - r_1): \quad \frac{dx}{dt} = \frac{r + s}{2}.$$

Согласно первому условию можно положить

$$W_2 = \frac{f_2(r)}{r - s}, \quad f_2(r_1) = f_1(r_1), \quad f_2'(r_1) = f_1'(r_1). \quad (7)$$

Тогда второе условие с учетом представления (4) дает дифференциальное уравнение для функции  $f_2(r)$  с общим интегралом:

$$f_2(r) = C_1(r - r^-)^{\lambda_1} + C_2(r - r^-)^{\lambda_2}, \quad r^- = 3a_1,$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные (случай  $r - r^- > 0, k < 0$  соответствует распаду детонационной волны);  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни уравнения:

$$(k - 1)^2 \lambda^2 + (k - 1)(k + 5)\lambda + 6(k + 1) = 0.$$

При выбранном знаке коэффициента отражения корни вещественные и различные. Константы  $C_1, C_2$  могут быть определены из (7):

$$C_1(r_1 - r^-)^{\lambda_1} + C_2(r_1 - r^-)^{\lambda_2} = f_1(r_1),$$

$$C_1 \lambda_1 (r_1 - r^-)^{\lambda_1 - 1} +$$

$$+ C_2 \lambda_2 (r_1 - r^-)^{\lambda_2 - 1} = f_1'(r_1). \quad (8)$$

Тем самым функции  $W_1$  и  $W_2$  считаются найденными.

Определим далее параметры газа слева от контактного разрыва  $AD$  в плоскости  $(x, t)$ . Используя представление (4) для функции  $W_2$  в виде

$$t = -\frac{\partial W_2 / \partial r - \partial W_2 / \partial s}{(\alpha - \beta)(r - s)}, \quad (9)$$

$$x = -\frac{(\alpha s + \beta r) \partial W_2 / \partial r - (\alpha r + \beta s) \partial W_2 / \partial s}{(\alpha - \beta)(r - s)}$$

и уравнение (6) движения разрыва в плоскости  $(r, s)$

$$s = kr + (s_1 - kr_1), \quad (10)$$

находим траекторию разрыва  $x = x(r), t = t(r)$ . Контактный разрыв как поршень ускоряет газ, находящийся слева от него, где

$$u + \frac{2a}{\gamma - 1} = \frac{2a_1}{\gamma - 1}, \quad x - (u - a)t = g(u). \quad (11)$$

Эта область ограничена слева неизвестной траекторией  $x_f(t)$  ударной волны  $AF$  (см. рис. 1). Функция  $g(u)$  в (11) зависит от характера движения контактного разрыва и должна

быть определена. В силу непрерывности скорости газа на контактном разрыве, на правой границе области имеем

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{r+s}{2} = \frac{(1+k)r + (s_1 - kr_1)}{2}. \quad (12)$$

Из уравнений (9)–(12) находим неизвестную функцию  $g(u)$ :

$$g(u) = \frac{1}{4} \frac{(k+1)^2(k\lambda_1 + k - \lambda_1 + 1)G^{\lambda_1}(u)C_1}{(k-1)(ku - u - kr_1 + s_1)^2} + \frac{1}{4} \frac{(k+1)^2(k\lambda_2 + k - \lambda_2 + 1)G^{\lambda_2}(u)C_2}{(k-1)(ku - u - kr_1 + s_1)^2}, \quad (13)$$

где  $G(u) = 2(ku - u - kr_1 + s_1)/(k^2 - 1)$ ,  $u \leq (r_1 + s_1)/2$ ; постоянные  $C_1, C_2$  определены уравнениями (8).

Теперь можно найти форму ударной волны  $x_f(t)$ , прошедшей в левый газ. Скорость перемещения фронта волны в принятом приближении равна  $\frac{dx_f}{dt} = \frac{-a_1 + (u - a)}{2}$ .

Учитывая соотношения (11) в волне, получаем

$$2u \frac{dt}{du} + 4t + 3 \frac{dg}{du} = 0.$$

Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий  $t = \tau$  при  $u = (r_1 + s_1)/2$ , находим

$$t = \frac{3}{8} \left( \frac{(k+1)^2(k\lambda_1 + k - \lambda_1 + 1)G^{\lambda_1}}{(\lambda_1 - 1)(k-1)^2(ku - u - kr_1 + s_1)u^2} - \frac{(k+1)^2(k\lambda_1 + k - \lambda_1 + 1)G^{\lambda_1}}{(k-1)(ku - u - kr_1 + s_1)^2u} \right) C_1 + \frac{3}{8} \left( \frac{(k+1)^2(k\lambda_2 + k - \lambda_2 + 1)G^{\lambda_2}}{(\lambda_2 - 1)(k-1)^2(ku - u - kr_1 + s_1)u^2} - \frac{(k+1)^2(k\lambda_2 + k - \lambda_2 + 1)G^{\lambda_2}}{(k-1)(ku - u - kr_1 + s_1)^2u} \right) C_2 + \frac{\text{const}}{u^2},$$

$$\text{const} = \frac{1}{4} \tau \left( k^3 r_1^2 + k^3 s_1^2 + 2k^3 s_1 r_0 + 6k^2 r_1 s_1 - k^2 r_1^2 + k^2 s_1^2 + 4k^2 r_1 r_0 + 2k^2 s_1 r_0 - 8k s_1^2 - 6k s_1 r_0 + 2k r_1 s_1 - 2s_1^2 - 2s_1 r_0 \right) / \left( k^3 + 3k^2 - 3k - 1 \right). \quad (14)$$

Положение  $x_f$  ударной волны получаем из (11):

$$x_f = (u - a)t + g(u) = \left( \frac{4}{3}u - a_1 \right) t + g(u). \quad (15)$$

Уравнения (13)–(15) определяют форму ударной волны  $x_f$  от  $t$  в параметрическом виде, где параметр  $u$  — скорость газа за скачком уплотнения. Полученное решение, конечно же, ограничено во времени.

### ЗАТУХАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Указанную выше зависимость координаты фронта ударной волны от времени удобно представить в безразмерном виде, например:

$$\frac{t}{\tau} = f \left( \frac{u}{a_1}; \frac{r_0}{a_1}; \frac{s_1}{a_1}; \frac{r_1}{a_1} \right), \quad (16)$$

$$\frac{x_f}{h} = g \left( \frac{u}{a_1}; \frac{r_0}{a_1}; \frac{s_1}{a_1}; \frac{r_1}{a_1} \right).$$

На рис. 3 показано изменение интенсивности прошедшей во второй газ ударной волны в виде зависимости числа Маха скачка уплотнения от безразмерной координаты.

Применим форму (16) для качественного (приближенного) исследования затухания ударной волны, вызванной детонацией [6, 7]. При существенном изменении интенсивности проходящей ударной волны движение в левом газе не является изоэнтропическим. Принятое приближение приемлемо только для плотной среды.

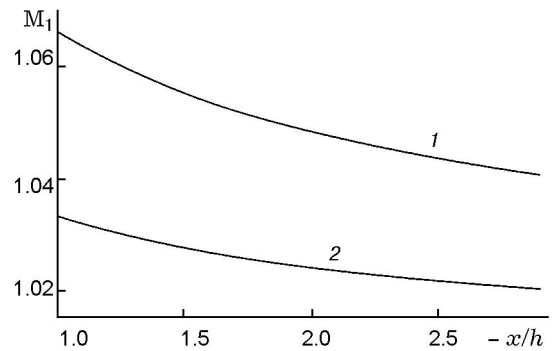


Рис. 3. Разрушение звукового импульса; зависимость числа Маха  $M_1$  прошедшей ударной волны от безразмерной координаты  $x/h$ :

1, 2 —  $r_0 = -s_0 = 2.8a_1$ ,  $s_1 = -2.9a_1$  и  $-2.85a_1$  соответственно

С тем чтобы упорядочить значения  $r_0$  и  $s_1$ , детонационную волну будем считать сильной, тогда

$$r_0 = -s_0 = \frac{3}{2}|D_J|, \quad s_1 = -\frac{9}{4}|D_J|.$$

Здесь  $D_J$  — скорость волны Чепмена — Жу́ге,  $D_J = -h/\tau$ . Далее, для определения значения  $r_1$  необходимо рассчитать распад разрыва. Это можно сделать по упрощенной схеме, соответствующей принятым в работе допущениям или с использованием соотношений для ударных скачков.

Рис. 4 иллюстрирует результат расчета распада разрыва. Здесь указано первоначальное значение числа Маха  $M_1 = |dx_f/dt|/a_1$  возникшей ударной волны в зависимости от скорости детонации  $D/a_1$ , где  $D = |D_J|$ .

Кривая 1 соответствует принятой в работе упрощенной модели течения газа за ударным скачком, кривая 2 — точному расчету согласно ударным адиабатам. Очевидно, совпадение двух зависимостей при  $D/a_1 = 3$  есть результат всех допущений в совокупности. Первоначальному числу  $M_1$  соответствует определенное значение  $r_1$ .

Дальнейшее изменение числа Маха ударной волны определяется найденным решением. При указанном способе задания параметров  $r_0$ ,  $s_1$  и  $r_1$  закон затухания ударной волны принимает более простой вид:  $M_1$  есть функция  $D/a_1$  и  $t/\tau$  или  $x/h$ . На рис. 5 представлена зависимость числа Маха прошедшей во второй газ ударной волны от безразмерной координаты. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям ско-

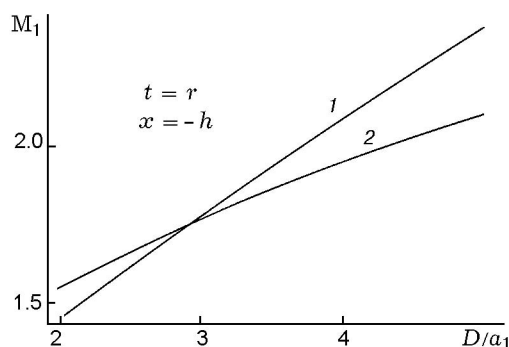


Рис. 4. Зависимость первоначального числа Маха  $M_1$  возникшей ударной волны от безразмерной скорости детонации  $D/a_1$ :

1 — принятая в работе упрощенная модель течения газа за скачком уплотнения, 2 — точный расчет

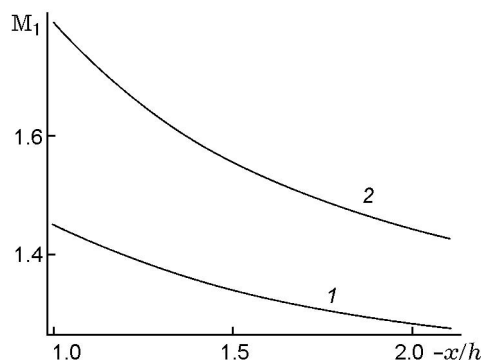


Рис. 5. Распад детонационной волны; зависимость числа Маха  $M_1$  возникшей ударной волны от безразмерной координаты  $x/h$ :

1, 2 —  $D/a_1 = 2$  и 3 соответственно, первоначальное значение  $M_1$  согласовано с зависимостью 1 на рис. 4

рости детонационной волны  $D = 2a_1$  и  $3a_1$ . Величина возникшего скачка уплотнения возрастает при увеличении силы детонации. При этом интенсивность волны будет уменьшаться быстрее.

## ВЫВОДЫ

Определены закономерности движения газа, возникающего при прохождении импульса треугольной формы через контактный разрыв. Параметры газа на скачке уплотнения являются сложными степенными функциями времени. Указанные зависимости могут быть приведены к безразмерной форме, отражающей важное свойство гидродинамического подобия течений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
3. Фомин В. М., Федоров А. В., Бойко В. М. и др. Волновая динамика реагирующих и не реагирующих газовзвесей // Теплофизика и аэромеханика. 1997. Т. 4, № 2. С. 129–157.
4. Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их применение к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

- 
6. **Николаев Ю. А.** Распространение плоских пересжатых детонационных волн в газах // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 5. С. 101–113.
7. **Николаев Ю. А., Васильев А. А., Ульяницкий В. Ю.** Газовая детонация и ее применение в технике и технологиях (обзор) // Физика горения и взрыва. 2003. Т. 39, № 4. С. 22–54.

*Поступила в редакцию 15/III 2006 г.*

---