

Для рассмотренной выше стационарной задачи получающееся волновое движение всегда является устойчивым.

Поступила 12 IX 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
2. Кочина И. Н. О волнах на поверхности раздела двух жидкостей, текущих под углом друг к другу. — ПММ, 1955, т. 19, № 5.
3. Гандин Л. С. Об устойчивости волн у поверхности раздела потоков, направленных под углом друг к другу. — Изв. АН СССР. Сер. геофизическая, 1957, № 3.
4. Miles J. W. Internal waves generated by a horizontally moving source. — Geophysical Fluid Dynamics, 1971, vol. 2, p. 1.

УДК 532.593

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

С. А. Макаров, Ю. Д. Чашечкин
(Москва)

На основе модифицированного метода стационарной фазы, предложенного в [1, 2], в [3] в плоском и трехмерном случае определены поверхности постоянной фазы внутренних волн, возбуждаемых телом, движущимся под произвольным углом к горизонту, удовлетворительно совпадающие с экспериментально наблюдаемыми. С учетом интегральных преобразований [4, 5] в работе [6] численными методами рассмотрены в линейной постановке плоская и пространственная задачи о волновых движениях, возникающих при обтекании погруженных истока и стока одинаковой интенсивности равномерным потоком стратифицированной по плотности жидкости. Асимптотическое решение для волнового поля, возбуждаемого диполем и произвольной системой исток — сток, движущихся в экспоненциально стратифицированной жидкости, получено в [7, 8]. Эти решения описывают волновую картину, возникающую при движении тела с большими скоростями.

Цель данной работы — определение амплитудно-фазовых характеристик присоединенных внутренних волн в жидкости с экспоненциальным распределением плотности при равномерном горизонтальном перемещении тела в широком диапазоне режимов движения (включая движения с малыми скоростями) с последующим сравнением их с результатами лабораторных экспериментов. В решении пренебрегается диссипативными и диффузионными эффектами (т. е. не учитывается изменение плотности частиц при их движении) и влиянием свободной поверхности. Считается, что жидкость имеет бесконечную глубину.

Система гидродинамических уравнений, определяющая поле скоростей \mathbf{v} , имеет вид

$$(1) \quad (\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla)\rho\mathbf{v} = -\nabla p + \rho\mathbf{g}, \quad (\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla)\rho = 0, \quad \nabla\mathbf{v} = m,$$

где t — время; ρ — плотность; p — давление; \mathbf{g} — ускорение силы тяжести; $m(x, y, z, t)$ — распределение истоков и стоков в жидкости; $\nabla = \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z$.

Рассмотрение проводится в лабораторной системе координат $OXYZ$ (ось X направлена вдоль линии движения тела, ось Z — вертикально вверх) и системе координат $OX^*YZ(x^* = x - Ut)$, связанной с телом.

Задача решается в приближении Буссинеска. Размерными параметрами задачи являются: $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp[-z/\Lambda]$ — плотность жидкости; масштаб стратификации $\Lambda = [d \ln \rho_0(z)/dz]^{-1}$; период T и частота свобод-

ных внутренних колебаний в жидкости $N = \sqrt{g/\Lambda}$, $T = 2\pi/N$; d — вертикальный, L — горизонтальный размеры тела и U — скорость его движения; η_0 — амплитуда и A — фаза внутренней волны.

Безразмерные параметры: $Fr = U^2/N^2d^2$ — внутреннее число Фруда; $C = \Lambda/d$ — отношение масштабов; $\Psi = L/d$ — удлинение тела; $x^0 = x^*N/AU$, $y^0 = yN/AU$, $z^0 = zN/AU$ — безразмерные координаты.

Безвихревое обтекание тела потоком однородной идеальной жидкости эквивалентно обтеканию комбинации истоков и стоков [9]. Этот результат можно распространить и на стратифицированную жидкость в случае малых градиентов, когда плотность жидкости незначительно меняется на расстояниях порядка размера тела [6].

Рассматривается движение диполя и системы, состоящей из истока и стока равной интенсивности, расположенных на расстоянии $2a$.

Линеаризованная система (1) с учетом связи между вертикальным отклонением поверхностей постоянной плотности из равновесного положения $\eta(x, y, z, t)$ и вертикальной компонентой скорости [7] приводится к следующему уравнению:

$$(2) \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + N^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right\} [\rho_0(z) \eta(x, y, z, t)] = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} [\rho_0(z) m(x, y, z, t)].$$

Значения $m(x, y, z, t)$ для движения плоского и трехмерного тела приведены в [6, 7].

Ищется решение уравнения (2) с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Рассматривается установившееся волновое движение.

Внутренние волны, образующиеся при равномерном движении тела в стратифицированной жидкости, называются присоединенными, поскольку волновая картина стационарна в системе координат, связанной с телом.

Асимптотическое решение уравнения (2) с учетом того, что при равномерном горизонтальном движении тела $\omega = -\alpha U$, имеет вид [1]

$$(3) \quad \eta(x^*, y, z) = \frac{4\pi^2}{r^*} \sum \frac{BF(\alpha, \beta, \gamma) \exp[i(\alpha x^* + \beta y + \gamma z)]}{|\nabla_k G| \sqrt{|K|}} + O\left(\frac{1}{r^{*2}}\right)$$

при $r^* \rightarrow \infty$ вдоль любого радиуса-вектора \mathbf{q} ; суммирование проводится по всем точкам $\mathbf{k} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ поверхности волновых чисел, определяемой дисперсионным соотношением

$$(4) \quad G(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha U)^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - N^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

в которых нормаль к поверхности параллельна \mathbf{q} и

$$(5) \quad \frac{\mathbf{r}^* \cdot \nabla_k G}{\frac{\partial G}{\partial \omega}} > 0 \left(\nabla_k = \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \beta} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right)$$

при условии, что поверхность (4) имеет ненулевую гауссову кривизну K в каждой из этих точек [1]. Коэффициент B зависит от знака кривизны и формы поверхности волновых чисел (4), $F(\alpha, \beta, \gamma)$ есть фурье-образ правой части уравнения (2).

По аналогии с [1] в плоском случае (координаты $\{x, z\}$) асимптотическое решение (2) есть

$$(6) \quad \eta(x^*, z) = \sqrt{\frac{8\pi^3}{r^*}} \sum \frac{BF(\alpha, \gamma) \exp\left[i\left(\alpha x^* + \gamma z + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} K\right)\right]}{|\nabla_k G| \sqrt{|K|}} + O\left(\frac{1}{r^*}\right)$$

при $r^* \rightarrow \infty$ вдоль любого радиуса-вектора \mathbf{q} ; суммирование проводится по всем точкам $\mathbf{k} = \{\alpha, \gamma\}$ кривой

$$G(\alpha, \gamma) = (\alpha U)^2(\alpha^2 + \gamma^2) - N^2\alpha^2 = 0,$$

где нормаль к кривой параллельна \mathbf{q} и выполнено (5).

Как видно из формул (3), (6), поверхности постоянной фазы имеют вид $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}^* = A$. Так как вектор \mathbf{r}^* параллелен нормали поверхности $G = 0$ в точке \mathbf{k} , то

$$(7) \quad \mathbf{r}^* = \frac{A}{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} G} \nabla_{\mathbf{k}} G.$$

Из решения системы (7) с учетом (4) следует, что поверхности постоянной фазы в трехмерном случае описываются уравнением

$$(8) \quad (x^0)^2 = [(y^0)^2 + (z^0)^2] \left[\frac{1}{(z^0)^2} - 1 \right],$$

что совпадает с [3, 10]. В плоском случае

$$(9) \quad (x^0)^2 + (z^0)^2 = 1.$$

Формулы (8), (9) выведены для точечного источника, когда не происходит интерференции волн, возбуждаемых его различными частями, которая может изменить полученные картины поверхностей постоянной фазы.

Неравенство (5) является условием излучения, согласно которому все волны генерируются источником и не приходят из бесконечности. Из него следует, что волнообразование происходит только позади движущегося тела, т. е. при $x^* < 0$, а в сферических координатах $\{r^*, \varphi, \theta\}$, связанных с телом, $x^* = r^* \cos \theta$, $y = r^* \sin \theta \cos \varphi$, $z = r^* \sin \theta \sin \varphi$ при $\theta > \pi/2$.

Точки $\mathbf{k} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ поверхности волновых чисел (4), в которых нормаль к поверхности совпадает с выбранным направлением $\mathbf{r}^* = (x^*, y, z)$, находятся из системы

$$(10) \quad (\alpha U)^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - N^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0, \quad [\nabla_{\mathbf{k}} G \cdot \mathbf{r}^*] = 0.$$

Векторное уравнение системы (10) содержит два линейно-независимых уравнения. С учетом определенных из (10) α , β и γ :

$$\alpha = \pm \frac{N}{U} \sin \varphi \cos \theta, \quad \beta = \pm \frac{N}{U} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \sin \varphi \cos \varphi, \quad \gamma = \pm \frac{N}{U} \frac{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{\sin \theta}$$

длина волны

$$(11) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{UT}{\sqrt{1 + \frac{x^{*2} y^2}{(y^2 + z^2)^2}}} = \frac{UT \sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}}.$$

В плоскости $y = 0$ длина волны всюду одинакова и равна $\lambda_0 = UT$, вне этой плоскости λ стремится к нулю с приближением к оси X .

В случае равномерного горизонтального движения диполя в глубокой жидкости со слабой стратификацией вертикальное смещение η , определяемое по (3), совпадает с решением [7]. При малых U (соответственно больших k) в решении [7] наблюдается особенность вида $1/U$.

В случае движения системы исток — сток из (3) следует

$$(12) \quad \eta_1(r^*, \theta, \varphi) = \frac{R^2}{r^*} \frac{\sqrt{a^2 + R^2}}{a} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}}{\sin \theta},$$

$$\sin\left(\frac{Na}{U} \sin \varphi \cos \theta\right) \cos\left(\frac{Nr^*}{U} \sin \varphi\right) + O\left(\frac{1}{r^{*2}}\right),$$

$$r^* \rightarrow \infty, \quad \pi/2 < \theta < \pi \quad (\text{при } \theta = \pi, K = 0).$$

Вертикальное смещение (12) не обращается в нуль при $U \rightarrow 0$. При переходе в лабораторную систему координат $\eta_1(x, y, z, t)$ в фиксированной точке x, y, z ($y \neq 0$) не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ так же, как и решение [7].

В плоском случае при обтекании диполя из (6) следует

$$(13) \quad \eta_2(x^*, z) = \sqrt{\frac{2\pi}{r^*}} R^2 \frac{z}{r^*} \sqrt{\frac{N}{U}} \cos\left(\frac{Nr^*}{U} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{r^*}\right),$$

$$r^* \rightarrow \infty, \quad x^* < 0,$$

при обтекании системы исток — сток

$$(14) \quad \eta_3(x^*, z) = \sqrt{\frac{2\pi}{r^*}} \frac{R}{\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R}\right)} \frac{z}{x^*} \sqrt{\frac{U}{N}} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{Na}{U} \frac{x^*}{r^*}\right) \cos\left(\frac{Nr^*}{U} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{r^*}\right),$$

$$r^* \rightarrow \infty, \quad x^* < 0.$$

Как $\eta_2(x, z, t)$, так и $\eta_3(x, z, t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, однако только (14) обращается в нуль при $U \rightarrow 0$.

Отмеченные выше особенности решений для точечных возмущений — диполя [7], пары исток—сток (12) — свидетельствуют о неэквивалентности замены движения трехмерного тела в вязкой жидкости движением точечных возмущений не только при малых [7], но и при больших скоростях, когда $\operatorname{Fr} \gg 1$, и могут быть устранены заменой дельта-функций в системе (1) последовательностью классических функций типа

$$(15) \quad \frac{\exp[-r^2/l^2]}{(l\sqrt{\pi})^3} \rightarrow \delta(\mathbf{r}), \quad l \rightarrow 0.$$

Рассматриваемый случай обтекания распределенных истока и стока на расстояниях $bl < r \ll \Lambda$ ($b \gg 1$) эквивалентен обтеканию точечных истока и стока равной интенсивности $M_1 = M_0 \operatorname{erf}^3(b)$, что соответствует обтеканию овода, где M_0 — интенсивность точечных источников [9].

Тогда из (3) с учетом (15) следует, что в приближении Буссинеска ($\lambda_0 = UT \ll \Lambda$)

$$(16) \quad \eta^+(r^*, \theta, \varphi) = \exp\left[\frac{l^2}{4\Lambda^2}\right] \exp\left[-\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2\right] \frac{R^2}{r^*} \frac{\sqrt{a^2 + R^2}}{a} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}}{\sin \theta} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{Na}{U} \sin \varphi \cos \theta\right) \cos\left(\frac{Nr^*}{U} \sin \varphi + \operatorname{sgn}(\sin \varphi) \frac{l^2 N}{2\Lambda U} \frac{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{\sin \theta}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{r^*}\right), \quad r^* \rightarrow \infty, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi.$$

Второй экспоненциальный множитель приводит к быстрому затуханию (16) при $U \rightarrow 0$ и оказывает малое влияние при больших U . При больших скоростях $\eta^+ \sim 1/U$ с уменьшением скорости амплитуда $|\eta^+|$ вертикального смещения (16) имеет максимумы в точках U_n , определяемых при $l \ll \lambda_0/\pi$ из условия

$$(17) \quad \frac{Na}{U_n} |\sin \varphi \cos \theta| = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

С увеличением l максимумы амплитуды незначительно смещаются в сторону больших U .

Зависимость амплитуды внутренних волн от скорости обтекания при малых U таких, что $\operatorname{Fr}_a = U^2/(N^2 a^2) < 1$, объясняется интерференцией

волн от когерентных источников (истока и стока), расположенных на расстоянии $2a$. В плоскости XZ максимумы амплитуды наблюдаются при $U = U_n$, определяемых из

$$(18) \quad \frac{Na}{U_n} |\cos \theta| = \frac{\pi}{2} (2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует

$$2a |\cos \theta| = n\lambda_n + \lambda_n/2, \quad \lambda_n = U_n T,$$

что является условием интерференции. Появление $\lambda_n/2$ связано с противоположным действием истока и стока.

Из (18) следует, что при малых скоростях ($Fr_a < 1$) имеется несколько максимумов амплитуды под различными углами θ_n

$$(19) \quad |\cos \theta_n| = \frac{U}{Na} \frac{\pi}{2} (2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

С увеличением скорости максимумы смещаются к оси следа.

При движении вытянутого тела с удлинением $\xi = a/R$ амплитуда внутренней волны $|\eta_0^+| \sim \sqrt{1 + \xi^2}$ при $Fr_a \gg 1$, что совпадает с [6], при $Fr_a < 1$ $|\eta_0^+| \sim \sqrt{1 + 1/\xi^2}$ и убывает с ростом удлинения.

При движении распределенных истока—стока форма поверхности постоянной фазы несколько отличается от (8), поскольку в (16) входит фазовая добавка

$$\operatorname{sgn}(\sin \varphi) \frac{l^2 N}{2\Lambda U} \frac{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{\sin \theta},$$

значение которой увеличивается с приближением к оси X .

Из (16) при переходе в лабораторную систему координат $OXYZ$ следует

$$(20) \quad \eta^+(O, y, z, t) = - \exp \left[\frac{l^2}{4\Lambda^2} \right] \exp \left[- \frac{N^2 l^2}{4U^2} \left(1 + \frac{(Ut)^2 y^2}{(y^2 + z^2)^2} \right) \right] \times \\ \times \frac{\sqrt{a^2 + R^2}}{a} \frac{R^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} \sqrt{1 - \frac{z^2}{y^2 + z^2} \frac{(Ut)^2}{(Ut)^2 + y^2 + z^2}} \times \\ \times \sin \left(\frac{Na}{U} \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \frac{Ut}{\sqrt{(Ut)^2 + y^2 + z^2}} \right) \cos \left\{ \frac{N}{U} \sqrt{(Ut)^2 + y^2 + z^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{l^2}{2\Lambda} \frac{\operatorname{sgn}(z)}{\sqrt{y^2 + z^2}} \left(1 - \frac{z^2}{y^2 + z^2} \frac{(Ut)^2}{(Ut)^2 + y^2 + z^2} \right) \right] \right\} + \\ + O \left(\frac{1}{(Ut)^2 + y^2 + z^2} \right), \quad \sqrt{(Ut)^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad t > 0.$$

Выражение (20) обращается в нуль для $t \rightarrow \infty$ при $y = 0$ за счет убывания члена $\sqrt{1 - \frac{z^2}{y^2 + z^2} \frac{(Ut)^2}{(Ut)^2 + y^2 + z^2}}$, при $y \neq 0$ за счет убывания второго экспоненциального множителя. Частота осцилляций с ростом времени стремится к

$$\frac{N}{\sqrt{y^2 + z^2}} \left[z + \frac{l^2}{2\Lambda} \frac{y^2}{y^2 + z^2} \right] \simeq N \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Первые осцилляции имеют период несколько больший, чем $T(\sqrt{y^2 + z^2})/z$.

Асимптотическое решение применимо на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от источника:

$$(21) \quad r^* \gg \lambda_0.$$

Критерием линейности служит неравенство

$$|\eta_0| \ll \lambda.$$

Если $\lambda \leq \pi l$, то линейное решение (16) справедливо, когда выполняется условие

$$(22) \quad r^* \gg \frac{\lambda_0 R^2}{e(\pi l)^2} \frac{\sqrt{a^2 + R^2}}{a} \left| \sin \left(\frac{Na}{U} \sin \varphi \cos \theta \right) \right|,$$

что при $Fr_a \leq 1$ эквивалентно

$$r^* \gg \frac{\lambda_0 R^2}{e(\pi l)^2} \frac{\sqrt{a^2 + R^2}}{a},$$

а при $Fr_a \gg 1$

$$r^* \gg \frac{2R^2 \sqrt{a^2 + R^2}}{e\pi l^2} |\sin \varphi \cos \theta|,$$

здесь e — основание натуральных логарифмов.

Если $\lambda > \pi l$, то линейное решение (16) справедливо, когда выполняется неравенство

$$(23) \quad r^* \gg \frac{R^2 \lambda_0}{\lambda^2} \frac{\sqrt{a^2 + R^2}}{a} \left| \sin \left(\frac{Na}{U} \sin \varphi \cos \theta \right) \right|,$$

что при $Fr_a \leq 1$ эквивалентно

$$r^* \gg \frac{R^2 \lambda_0}{\lambda^2} \frac{\sqrt{a^2 + R^2}}{a},$$

а при $Fr_a \gg 1$

$$r^* \gg \frac{2\pi R^2 \sqrt{a^2 + R^2}}{\lambda^2} |\sin \varphi \cos \theta|.$$

Из (22), (23) следует, что существует область вблизи оси X , где линейное решение несправедливо.

Экспериментальное исследование присоединенных внутренних волн проведено в лабораторном бассейне $1,5 \times 0,4 \times 0,4$ м³, заполненном водным раствором поваренной соли с однородным градиентом концентрации (плотности), $\Lambda = 4,4$ м, $N = 1,5$ с⁻¹, $T = 4,2$ с. Фазовые картины регистрировались с помощью теневого прибора ИАБ-451, амплитуды — «одноточечным» контактным преобразователем электропроводности [11]. Границы темных и светлых полос на теневых фотограммах — гребни и впадины волн, плотность почернения пропорциональна амплитуде волны. Проведенные опыты показали, что вследствие эффекта увлечения в стратифицированной жидкости (blocking effect) профили скорости и плотности жидкости изменяются на расстояниях порядка диаметра впереди и позади тела. Поэтому можно считать, что внутренние волны излучаются всей системой, состоящей из тела и увлеченной им жидкости. В связи с наличием вязкости увлеченная жидкость имеет форму овоида.

На фиг. 1 представлена волновая картина в плоскости XZ , возникающая при горизонтальном движении удлиненного тела $d = 1$ см, $L = 8$ см со скоростью $U = 1$ см/с, $T = 4,2$ с. Излом волновых поверхностей, наблюдаемый на приведенной кинограмме, объясняется скачком фазы на π

при смене знака $\sin((Na/U) \cos \theta)$. Углы θ_p , под которыми происходит излом, определяются из условия

$$(24) \quad (Na/U) |\cos \theta_p| = \pi p, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

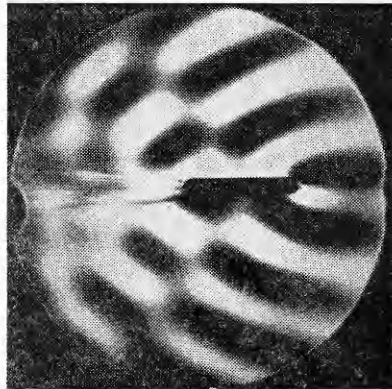
В данном случае ($\theta_p = 56^\circ$, $p = 1$) из (24) следует, что $2a = 7,6$ см, это примерно совпадает с L .

Вследствие эффекта блокировки аналогичную картину можно наблюдать при движении шара (фиг. 2, $y = 0$, $d = 2$ см, $U = 1,02$ см/с, $T = 4,2$ с, $\text{Fr} = 0,11$, $\theta_1 = 20^\circ$). Определенное из (24) $a = 2,25$ см.

На фиг. 3 представлена волновая картина в плоскости XZ , возникающая при горизонтальном движении шара $d = 2$ см со скоростью $U = 0,64$ см/с, $T = 4,2$ с, $\text{Fr} = 0,044$. С уменьшением скорости растет эффективный горизонтальный размер области возбуждения внутренних волн. На теневой кинограмме наблюдается излом фазовой поверхности под углом $\theta_p = 39^\circ$ ($p = 2$) и интерференционный максимум амплитуды под углом $\theta_n = 22^\circ$ ($n = 2$) к оси движения. Подстановка указанных значений θ_n и θ_p в формулы (18), (24) дает близкие значения для полурасстояния между центрами источников $a_1 = 3,6$ см, $a_2 = 3,45$ см.

Полученные решения (13), (14), (16) антисимметричны относительно плоскости (линии) $z = 0$ в трехмерном (плоском) случае. Математически это связано с изменением знака $\sin \varphi$ или (z) при переходе из верхнего полупространства (полуплоскости) в нижнее, а физически — с противоположными начальными смещениями в этих полупространствах (полуплоскостях). На фиг. 1—3 видно, что гребню волны в верхней полуплоскости соответствует впадина в нижней.

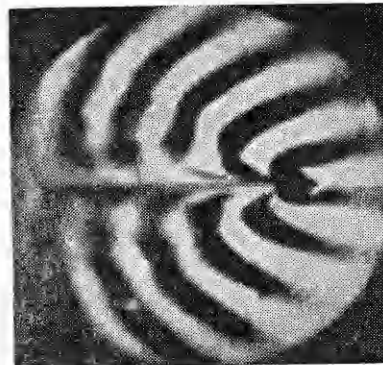
На фиг. 4 приводится регистраграмма измерения величины вертикального смещения частиц жидкости $\eta(0, y, z, t)$ при горизонтальном движении шара $d = 2,5$ см со скоростью $U = 1,65$ см/с, $T = 4,2$ с, $\text{Fr} = 0,19$ в точке $y = 0$, $z = 5$ см. Точки 1, 3, 5 представляют собой впадины, а точки 2, 4, 6 — гребни волны. Рассчитанные по (16) времена прихода гребней и впадин волн в точку измерений $t_n = 2,9; 5,5; 7,8; 10; 12,1; 14,2$ с ($n = 1, 2, \dots, 6$) хорошо совпадают с экспериментально наблюдаемыми даже для первых волн. Для данного случая решение (16) согласуется с экспериментом при выборе $a = 2,5$ см, $l \simeq 1$ см, тогда рассчитанные отношения



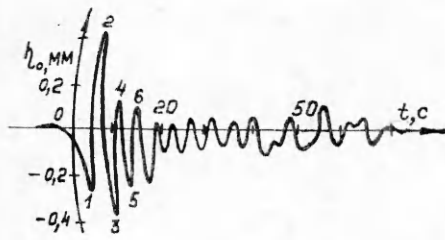
Ф и г. 1



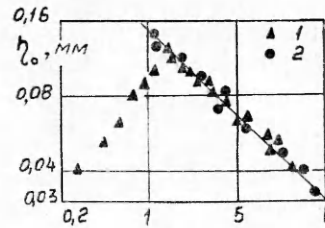
Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

размахов колебаний $\frac{|\eta_0|_{n+2} + |\eta_0|_{n+1}}{|\eta_0|_{n+1} + |\eta_0|_n}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) равны 1,4; 1,38; 1,25; 1,2. Из регистрограммы следует, что эти отношения есть 0,88; 1,56; 1,24; 1,14. С увеличением расстояния до источника уменьшается различие между рассчитанными и наблюдаемыми величинами.

На фиг. 5 представлена зависимость максимального смещения частиц во внутренней волне при горизонтальном движении шара диаметром $d = 1$ см в жидкости с $\Lambda = 4,2$ м (точки 1) и $\Lambda = 17$ м (точки 2) в точке $y = 0$, $z = 12$ см. Наклон прямой на графике соответствует зависимости $Fr^{-1/2}$, что совпадает с законом убывания амплитуды $\eta_0 \sim 1/U$ при $Fr \gg 1$; при $Fr < 0,8$ $l \approx 1,3$ см.

При движении шара с большими скоростями ($Fr > 1$) $l < d/4$, $a < d$ и уменьшается с увеличением скорости.

Полученное решение (16) удовлетворительно согласуется с данными лабораторных опытов уже на расстояниях порядка $2\lambda_0$.

Поскольку при $Fr \ll 1$ длина волны меньше или порядка размеров тела, то при определении амплитудных характеристик внутренних волн следует учитывать влияние вязкости.

Поступила 13 X 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions.— Phil. Trans. Roy. Soc. of London, 1960, vol. 252A, N 1014.
2. Lighthill M. J. On wave generated in dispersive systems by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 4.
3. Peat K. S., Stevenson T. N. Internal waves around a body moving in a compressible density-stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 70, pt 4.
4. Wu T. Y.-T., Mei C. C. Two-dimensional gravity waves in a stratified ocean.— Phys. Fluids, 1967, vol. 10, N 3.
5. Mei C. C. Surface wave pattern due to a submerged source travelling in a stratified ocean.— Report Hydrodynam. Lab. Mass. Inst. Technol., 1966, N 92.
6. Стурова И. В. Волновые движения, возникающие в стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела.— ПМТФ, 1974, № 6.
7. Miles J. W. Internal waves generated by a horizontally moving source.— Geophysical Fluid Dynamics, 1971, vol. 2.
8. Докучаев В. П., Долина И. С. Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1977, т. 13, № 6.
9. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М.: ГИФМЛ, 1963.
10. Некрасов В. Н., Трохан А. М., Чашечкин Ю. Д. Генерация внутренних волн в плоскостной среде равномерно движущимся гидродинамическим источником (трехмерная задача).— В сб.: Краткие тексты докладов VII Всесоюз. симпозиума по дифракции и распространению волн. Т. 3. М., 1977.
11. Левцов В. И., Чашечкин Ю. Д. Высокочувствительный преобразователь электропроводности жидкостей.— В сб.: Тезисы докладов IV Всесоюз. конф. «Метрология в радиоэлектронике». М.: ВНИИФТРИ, 1978.