

УДК 533.6

ПРИБЛИЖЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ В λ -ОБРАЗНОМ ПСЕВДОСКАЧКЕ

А. Е. Медведев

Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: medvedev@itam.nsc.ru

Предложена приближенно-аналитическая модель структуры течения в плоском λ -образном псевдоскачке, которое состоит из вязкого пограничного слоя и невязкого ядра. При этом полагается, что граница пограничного слоя является линией тока с заданным по длине канала распределением давления, течение в псевдоскачке состоит из входного участка (маховское отражение косою ударной волны) и последовательности идентичных по структуре внутренних участков. Проведено сравнение с экспериментальными данными и результатами численных расчетов. Показано, что модель достаточно точно описывает структуру течения в псевдоскачке.

Ключевые слова: псевдоскачок, газодинамика, ударные волны, волна сжатия, волна разрежения.

Введение. Согласно [1] псевдоскачок — это “область течения вязкого газа в канале, в которой происходит переход сверхзвукового течения в дозвуковое под действием противодавления на выходе из канала”. Псевдоскачок состоит из области “вереницы скачков” и области “смешивания” [2]. В настоящей работе рассматривается структура течения в области “вереницы скачков” для течения в плоском канале.

По конфигурации входного скачка псевдоскачки можно разделить на λ -образные (входная косою ударная волна отражается от оси симметрии канала нерегулярным образом) и x -образные (входной скачок представляет собой регулярное отражение косою ударной волны).

В работе [3] предложена одна из первых приближенных аналитических моделей псевдоскачка — бескачковая (кусочно-одномерная двухструйная) модель, описывающая интегральные характеристики псевдоскачка, но не структуру течения в зоне псевдоскачка. Позднее появились более точные модели псевдоскачка: диффузионная [4] и отрывная [5] модели, которые являются модификациями модели Крокко [3]. Длина псевдоскачка рассчитывалась в модели баланса импульса [6, 7]. Обзор современных экспериментальных, теоретических и численных исследований проблемы псевдоскачка приведен в [2, 8].

Попытка описать структуру течения внутри зоны псевдоскачка в модифицированной модели адиабатического течения при наличии трения предпринята в работах [9, 10]. В этой модели указано приблизительное положение ударных волн внутри зоны псевдоскачка. Качественная схема формирования псевдоскачкового режима течения в канале с постоянной площадью сечения с помощью принципа максимума энтропии приведена в работе [11].

Модель структуры λ -образного плоского псевдоскачка предложена в работах [12, 13], где граница пограничного слоя является линией тока, на которой задано статическое давление. Однако в работе [13] допущены ошибки: течение за отраженной от “ножки” Маха ударной волной считалось сверхзвуковым (на самом деле, как показано ниже, течение дозвуковое). Работы [12, 13] в основном посвящены экспериментальному исследованию псевдоскачков, и модель структуры λ -образного псевдоскачка описана схематично и с ошибками. Тем не менее идеи, высказанные в [13], использованы при разработке рассматриваемой модели псевдоскачка.

1. Структура течения в псевдоскачке. Структура течения в псевдоскачке показана на рис. 1. Рассматривается течение в плоском канале. На входе в канал задается сверхзвуковое течение, а на выходе противодавление, которое тормозит поток. На стенках канала образуется пограничный слой. В некоторой точке канала происходит отрыв пограничного слоя. Косые ударные волны образуют нерегулярную маховскую конфигурацию, за которой имеет место сложная структура течения (ударные волны, волны разрежения и сжатия), называемая псевдоскачком.

На рис. 1, *а* показано типичное распределение давления на границе пограничного слоя, на рис. 1, *б* — структура течения в псевдоскачке. Течение в зоне псевдоскачка делится на две продольные зоны: вязкий пограничный слой (внешняя граница пограничного слоя является линией тока, на которой задано статическое давление) и невязкое ядро (идеальный политропный газ). В настоящей модели описываются структура течения в невязком ядре и форма границы пограничного слоя.

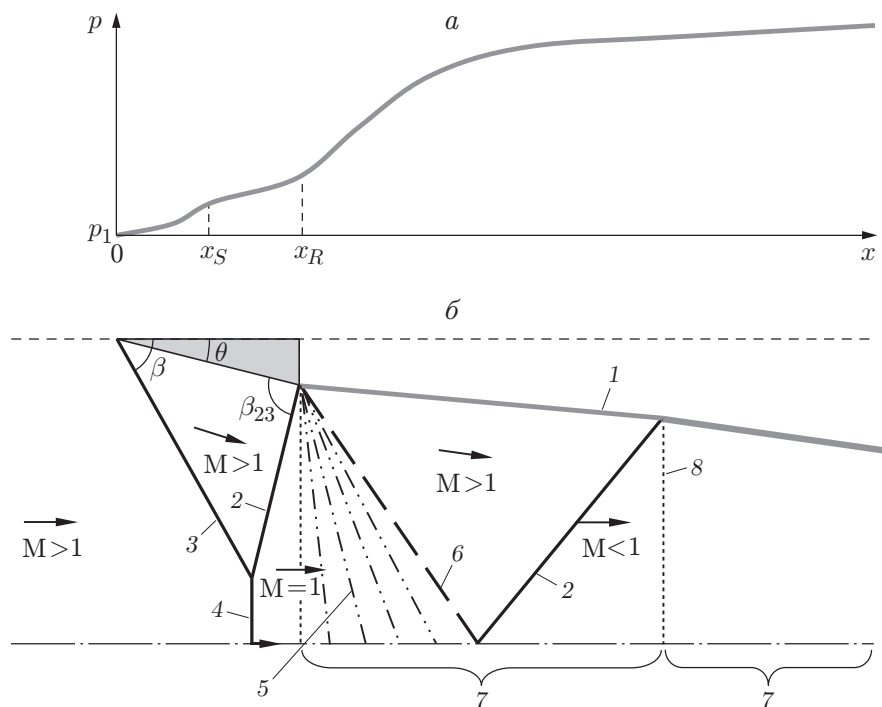


Рис. 1. Распределение статического давления на границе пограничного слоя (*а*) и структура течения в псевдоскачке (*б*):

1 — граница пограничного слоя, 2 — отраженная ударная волна, 3 — косая ударная волна, 4 — “ножка” Маха, 5 — волна разрежения, 6 — волна сжатия, 7 — структурная ячейка, 8 — звуковая линия

В точке x_S происходит отрыв пограничного слоя, за которым устанавливается постоянное давление (плато) до точки x_R , в которую приходит отраженная ударная волна. Ниже по потоку статическое давление монотонно возрастает.

Течение в псевдоскачке (см. рис. 1, б) можно разделить на структурные участки. Участок входа содержит входной скачок с маховским нерегулярным отражением. За “ножкой” Маха и отраженной ударной волной скорость дозвукового течения адиабатически достигает скорости звука.

Последующие структурные ячейки имеют аналогичное строение: ячейка начинается и заканчивается звуковой линией. На верхней границе ячейки (границе пограничного слоя) давление монотонно увеличивается, что определяет структуру течения в ячейке. За входной звуковой линией в центрированной волне разрежения скорость потока увеличивается и далее в центрированной волне сжатия формируется косая ударная волна. Волна сжатия отражается от оси симметрии косой ударной волной. За этой волной скорость дозвукового течения адиабатически достигает скорости звука. Далее начинается следующая структурная ячейка. Как показано ниже, в каждой последующей ячейке интенсивность ударных волн уменьшается и они вырождаются в звуковые волны, что обусловлено монотонным ростом давления на границе пограничного слоя.

2. Математическая постановка задачи. Согласно [3] “явления, которые происходят при псевдоскачке, еще не полностью поняты и слишком сложны, чтобы быть доступными для точного аналитического рассмотрения”. Поэтому модель основана на некоторых приближениях, обеспечивающих простое, однако достаточно точное описание структуры псевдоскачка.

Рассмотрим течение в псевдоскачке. В плоском симметричном канале со сверхзвуковой скоростью движется газ. Течение газа состоит из вязкого пограничного слоя и невязкого ядра, которое рассматривается как политропный газ. Граница раздела пограничного слоя и невязкого течения — звуковая линия тока. Давление поперек пограничного слоя является постоянным и равно давлению на стенке канала (т. е. статическое давление переносится на линию тока). В некоторой точке происходит отрыв пограничного слоя. Угол отрыва пограничного слоя задается эмпирически на основе экспериментальных данных [14, 15]. Отрыв линии тока в пограничном слое для невязкого ядра рассматривается в качестве плоского клина, от которого отражается первый косой скачок уплотнения. Дальнейшее течение в ядре псевдоскачка представляет собой систему взаимодействующих косых скачков, волн сжатия и разрежения.

Для построения модели структуры течения в псевдоскачке необходимы следующие эмпирические данные (помимо ширины канала, давления и числа Маха набегающего потока): точка и угол отрыва ламинарного пограничного слоя и статическое давление на стенке канала.

3. Отражение лидирующей косой ударной волны. Существует два типа псевдоскачков [12, 13, 16]:

— λ -образные псевдоскачки, когда лидирующая косая ударная волна отражается от точки отрыва пограничного слоя нерегулярным образом (маховское отражение косой ударной волны [17, 18]);

— x -образные псевдоскачки, когда лидирующая ударная волна отражается от точки отрыва пограничного слоя регулярным образом (регулярное отражение косой ударной волны [19]).

Тип отражения ударной волны зависит от угла отрыва пограничного слоя. Угол отражения ударной волны определяется по перепаду давления за ней. Для развитого пограничного слоя перепад давления за косой волной при отрыве пограничного слоя был экспериментально измерен (для чисел Рейнольдса потока $Re > 10^5$ и чисел Маха $1,4 \leq M_1 \leq 6,0$)

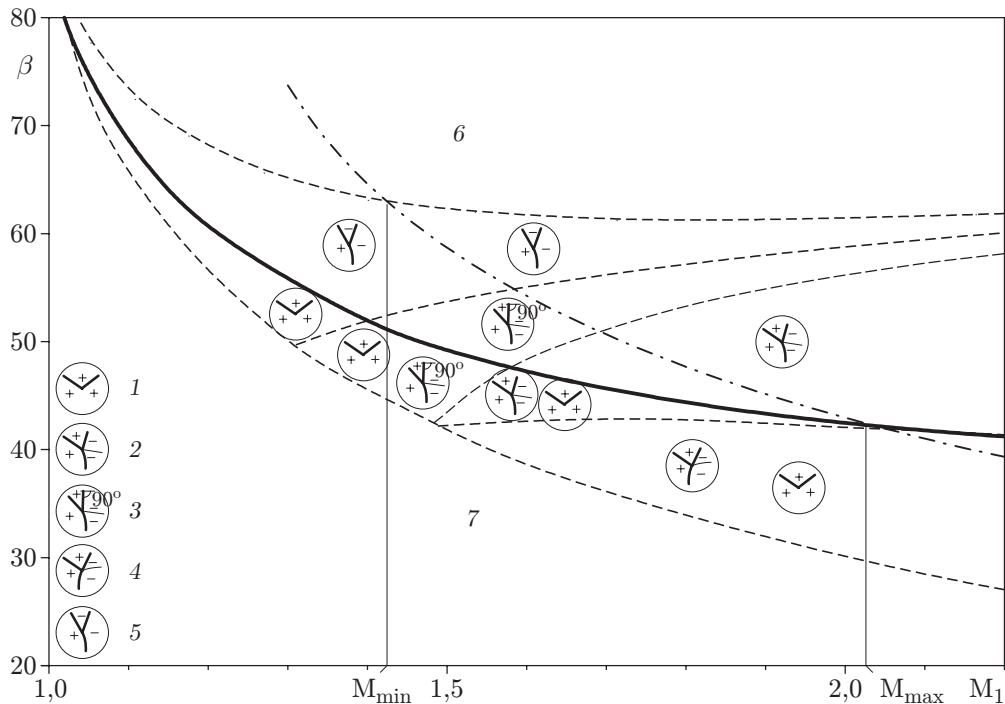


Рис. 2. Зависимость угла отражения косой ударной волны от числа Маха набегающего потока:

1–7 — области реализации различных типов отражения косой ударной волны [21] (1 — сверхзвуковое регулярное отражение, 2 — маховское отражение с дозвуковым течением за отраженной волной, 3 — маховское отражение с обратным отражением ударной волны, 4 — инвертное маховское отражение, 5 — отражение фон Неймана, 6 — отражение отсутствует, 7 — ударные волны отсутствуют) (знак “+” — сверхзвуковое течение, знак “-” — дозвуковое), штриховые линии — границы областей реализации различных типов отражения; сплошная линия — граница областей маховского (вверху) и регулярного (маховского в некоторых областях) (внизу) отражений ударной волны; штрихпунктирная линия — значения угла отражения косой ударной волны при отрыве пограничного слоя

в работах [14, 15]. Для аппроксимации этих экспериментальных данных предложена зависимость [14, 15]

$$p_2/p_1 = 0,5 M_1 + 1, \quad (3.1)$$

где p_1 , p_2 — давление перед косым скачком и за ним; M_1 — число Маха набегающего потока. Также возможно использование зависимостей, приведенных в [20].

Зависимость (3.1) позволяет определить величину угла β отражения косой ударной волны при отрыве пограничного слоя (рис. 2) из соотношения Ренкина — Гюгонио

$$p_2/p_1 = F_p(\gamma, M_1, \beta),$$

где $F_p(\gamma, M_1, \beta) = (2\gamma/(\gamma + 1))[M_1^2 \sin^2 \beta - 1] + 1$.

На рис. 2 для случая плоского отражения косой ударной волны приведена зависимость величины угла отражения косой ударной волны β от числа Маха M_1 набегающего потока. При отражении от клина в плоском симметричном канале возможны различные режимы отражения ударной волны [17–19, 21, 22]: сверхзвуковое регулярное отражение, дозвуковое регулярное отражение, маховское отражение со сверхзвуковым течением за отраженной волной, маховское отражение с дозвуковым течением за отраженной волной, маховское

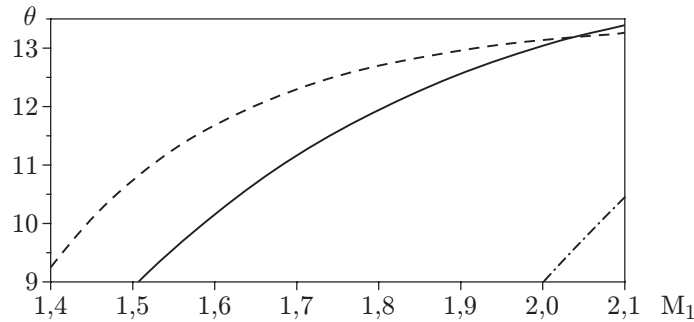


Рис. 3. Зависимость угла отрыва пограничного слоя от числа Маха набегающего потока:
 сплошная линия — данные настоящей работы, штриховая — данные работы [23. С. 249],
 штрихпунктирная — данные работы [24]

отражение с обратным отражением ударной волны, инвертное маховское отражение и отражение фон Неймана (см. рис. 2). Угол отражения косой ударной волны при отрыве пограничного слоя определяется аппроксимацией экспериментальных данных (3.1). При числах Маха набегающего потока в диапазоне от $M_{\min} \approx 1,4$ до $M_{\max} \approx 2,0$ реализуется нерегулярное отражение косой ударной волны при отрыве пограничного слоя. При данных значениях числа Маха течение за лидирующим нерегулярным скачком является дозвуковым и реализуется λ -образный псевдоскачок. При $M > M_{\max}$ реализуются x -образные псевдоскачки, при $M < M_{\min}$ псевдоскачок не существует.

Из зависимости для давления при отрыве (3.1) можно определить угол отрыва пограничного слоя (рис. 3). Видно, что для λ -образных псевдоскачков угол отрыва пограничного слоя $\theta \approx 10^\circ$. Поэтому в приведенных ниже примерах расчета псевдоскачков угол отрыва потока (угол клина) выбирался равным 10° .

4. Статическое давление. Для расчетов по модели необходимо определить распределение давления $p = p_e(x)$ по длине пограничного слоя (статическое давление). Статическое давление можно определить экспериментальным путем или на основе эмпирических формул.

Для статического давления при псевдоскачке существует [25] аппроксимационная зависимость

$$\bar{p} = 3\bar{x} - 3\bar{x}^2 + \bar{x}^3,$$

где $\bar{p} = (p - p_1)/(p_{end} - p_1)$; $\bar{x} = (x - x_1)/(x_{end} - x_1)$; x_1, p_1 — координата и давление в начале псевдоскачка; x — продольная координата; x_{end}, p_{end} — координата и давление в конце псевдоскачка.

В работе [26] для квадратного канала приведена более сложная зависимость статического давления:

$$\frac{x(M_1^2 - 1) \operatorname{Re}_{\delta_1^{**}}^{1/5}}{(h\delta_1^{**})^{1/2}} = 50\left(\frac{p}{p_1} - 1\right) + 170\left(\frac{p}{p_1} - 1\right)^2,$$

где h — ширина квадратного канала; δ_1^{**} — толщина потери импульса перед скачком; $\operatorname{Re}_{\delta_1^{**}}$ — число Рейнольдса, вычисленное по толщине потери импульса.

5. Длина плато. Для замыкания модели найдем длину клина (плато) $L = x_R - x_S$ (см. рис. 1, a).

Длину плато можно вычислить с помощью метода Лиза — Ривза [23, 27]. Однако это требует больших вычислительных затрат и решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и выходит за рамки рассматриваемого “инженерного” подхода.

Полагая, что выражение для “ножки” Маха стремится к нулю, угол наклона падающей ударной волны $\beta_{23} = 90^\circ$, можно получить простейшую оценку сверху длины плато в виде

$$L_{\max} = Y_1 \frac{\cos(\theta) \cos(\beta - \theta)}{\sin(\beta)}, \quad (5.1)$$

где Y_1 — половина ширины канала.

Заметим, что расстояние от носика падающей ударной волны (точки отрыва x_S (см. рис. 1) до точки пересечения отраженной ударной волны со стенкой канала является величиной, не зависящей от угла θ отрыва пограничного слоя [15. С. 187; 28]. Это справедливо только для маховского отражения падающей ударной волны. Поэтому оценку (5.1) можно уменьшить, выбрав вместо углов β и θ максимально возможный угол $\beta_{\max}(M_1)$ и соответствующий ему угол $\theta_{\max}(\beta_{\max}(M_1))$. Угол $\beta_{\max}(M_1)$ находится из рис. 1: если при заданном M_1 угол β расположен на сплошной кривой, то угол $\beta_{\max}(M_1)$ расположен вертикально на линии, разделяющей область маховского отражения и области, где отражение невозможно. Получаем новую оценку

$$\tilde{L}_{\max} = L_{\max} \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)}{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_{\max})}. \quad (5.2)$$

Для оценки можно выбрать угол $\beta_{\max} \approx 60^\circ$. Угол $\theta_{\max} = F_\theta(\gamma, M_1, \beta_{\max})$ рассчитывается по формуле [29]

$$\theta = F_\theta(\gamma, M_1, \beta) = \operatorname{arccctg} \left\{ \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)} - 1 \right] \operatorname{tg} \beta \right\}.$$

В работе [20. С. 54] приведена оценка расстояния до точки отрыва x_S на основе теории свободного взаимодействия:

$$L_S = x_S \approx \delta_1^* (c_{f1})^{-1/2} (M_1^2 - 1)^{-1/4}, \quad (5.3)$$

где $c_{f1} = 0,0262(\operatorname{Re}_1)^{-1/7} \left[\frac{4}{4 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]^{5/7}$ — коэффициент поверхностного трения; $\frac{\delta_1^*}{\delta_1} = 1 - 7(D - 1) \left[\frac{D^3}{2} \ln \left(\frac{D}{D - 1} \right) - \frac{D^2}{2} - \frac{D}{4} - \frac{1}{6} \right]$ — отношение толщины вытеснения к толщине пограничного слоя; $D = 1 + 2/[(\gamma - 1) M_1^2]$; величины с индексом 1 соответствуют началу отрыва (см. рис. 1). Формулы для расчета коэффициента поверхностного трения и отношения толщин пограничного слоя взяты из [12]. Точка отрыва пограничного слоя x_S расположена левее точки x_R прихода отраженной ударной волны на пограничный слой. Поэтому величину L_S можно считать нижней границей длины плато L . Таким образом, длина плато равна

$$L_S \leq L \leq \tilde{L}_{\max}. \quad (5.4)$$

6. Входная структура псевдоскачка. Входная структура псевдоскачка представляет собой маховское отражение косою ударной волны (рис. 4). На рис. 4 ABF_{in} — клин, от которого отражается косою ударная волна AT ; θ, β — угол клина и угол наклона косою ударной волны AT соответственно; AB — стенка, $A'OS_{in}$ — ось симметрии канала; TO — “ножка” Маха; TF_{in} — отраженная ударная волна; M_i — число Маха; p_i — давление в соответствующих областях течения ($i = 1, 2, 3, 4$). Структура и геометрические параметры течения при маховском отражении плоской ударной волны исследованы в работах [17, 22, 30].

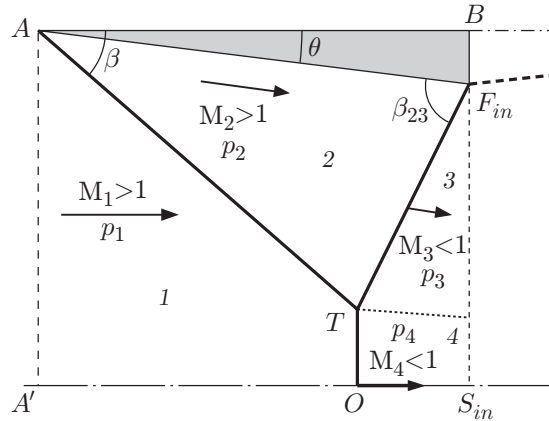


Рис. 4. Структура течения на входном участке псевдоскачка:
 стрелки — направления потока; штриховая линия — линия тока (граница пограничного слоя);
 1–4 — области постоянных значений параметров

Пусть заданы половина ширины канала $AA' = Y_1$, длина клина $AB = L$ и параметры набегающего потока (число Маха $M_1 > 1$ и давление p_1). Приведем простейшие “инженерные” соотношения [22] для определения параметров течения при маховском отражении ударной волны.

Значения параметров за косой ударной волной M_2, p_2 и величина угла β определяются соотношениями

$$M_2 = F_M(\gamma, M_1, \beta), \quad p_2 = F_p(\gamma, M_1, \beta)p_1, \quad \theta = F_\theta(\gamma, M_1, \beta), \quad (6.1)$$

где

$$F_M(\gamma, M_1, \beta) = \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} + \frac{2 M_1^2 \cos^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}}$$

соотношение Ренкина — Гюгонно на косой ударной волне.

Геометрические соотношения находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} F_{in} S_{in} &= Y_1 - L \operatorname{tg}(\theta), & TO &= Y_1 - (L - OS_{in}) \operatorname{tg}(\beta), \\ OS_{in} &= (F_{in} S_{in} - TO) / \operatorname{tg}(\beta_{23} - \theta), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где угол β_{23} определяется из условия равенства давлений $p_3 = p_4$ за тройной точкой T :

$$\beta_{23} = \arcsin \left[\frac{1}{2 M_2} \sqrt{2 \left(\frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma p_2/p_1} - \frac{\gamma + 1}{\gamma} + 2 \right)} \right]. \quad (6.3)$$

Алгебраические уравнения (6.1)–(6.3) допускают несколько решений. Выбор решения определяется типом отражения, которое реализуется при заданных числах Маха M_1 и угле отражения β (см. рис. 2).

Решение в областях параметров 3, 4 (см. рис. 4) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} M_3 &= F_M(\gamma, M_2, \beta_{23}), & p_3 &= F_p(\gamma, M_2, \beta_{23})p_2, \\ M_4 &= F_M(\gamma, M_1, \pi/2), & p_4 &= p_3. \end{aligned}$$

За “ножкой” Маха TO (область 4) и отраженной ударной волной TF_{in} (область 3) течение является дозвуковым. Это следует из рис. 2, так как при данных числах Маха возможны лишь отражение фон Неймана, маховское отражение с обратным отражением

ударной волны и маховское отражение с дозвуковым течением за отраженной волной. Заметим, что в модели [12, 13] течение в области 3 ошибочно полагалось сверхзвуковым.

Поскольку угол между отраженной ударной волной и клином $\beta_{23} \approx \pi/2$, угол клина $\theta = 10^\circ$, угол отклонения линии тока, разделяющей области 3, 4, от горизонтали приблизительно равен 10° . В областях 3, 4 давление и скорость течения различаются незначительно, течение полагается одномерным адиабатическим течением в сужающемся канале ($F_{in}TO$, $F_{in}S_{in}$ — входное и выходное сечения), заканчивающемся вертикальной звуковой линией. На звуковой линии $F_{in}S_{in}$ параметры рассчитываются по формуле

$$M_s = 1, \quad p_s = H_p(\gamma, 1, M_{34})p_4,$$

где $M_{34} = (M_3 F_{in}T + M_4 TO)/(F_{in}T + TO)$ — среднее число Маха, $H_p(\gamma, M, M_1) = [(2 + (\gamma - 1)M_1^2)/(2 + (\gamma - 1)M^2)]^{\gamma/(\gamma-1)}$ — формула адиабатического течения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отраженная ударная волна TF_{in} и звуковая линия $F_{in}S_{in}$ пересекаются в одной точке F_{in} . Решение строится таким образом, чтобы выполнялся закон сохранения импульса в пределах одной ячейки. Положение звуковой линии не влияет на суммарный баланс импульса в ячейке, а также другие ее характеристики, в частности размер. Поэтому данное упрощение оказывает влияние только на положение звуковой линии, но не влияет на интегральные характеристики ячейки.

Длина $F_{in}S_{in}$, координата x_{in} звуковой линии и давление p_s на ней являются входными параметрами для следующей расчетной ячейки. В точке F_{in} необходимо знать входное давление p_{in} (в рассматриваемом случае $p_{in} = p_2$).

Ниже по потоку структура течения состоит из ячеек двух типов, различающихся значением давления на границе $p_e(x_{in})$ в точке F_{in} (x_{in}, y_{in} — координаты точки F_{in}): тип 1 — $p_{in} \leq p_e(x_{in})$, тип 2 — $p_{in} > p_e(x_{in})$.

7. Структура ячейки псевдоскачка, когда входное давление меньше давления на границе пограничного слоя (ячейка типа 1). Ячейка представляет собой четырехугольник (рис. 5, а), ограниченный вертикальными входящей $F_{in}S_{in}$ и выходящей $F_{out}S_{out}$ (x_{out}, y_{out} — координаты точки F_{out}) звуковыми линиями, линией симметрии $S_{in}S_{out}$ и границей пограничного слоя $F_{in}F_{out}$. На входе в ячейку заданы положение входящей звуковой линии $F_{in}S_{in}$ и давление p_s на ней, входное давление p_{in} и распределение давления на границе $p_e(x)$. Входное давление меньше давления на границе пограничного слоя: $p_{in} \leq p_e(x_{in})$.

Течение в ячейке начинается с волны разрежения (примыкающей к звуковой линии), в которой давление в потоке восстанавливается до значения входного давления p_{in} ($p_s > p_{in}$):

$$p_{exp} = p_{in}, \quad M_{exp} = H_M(\gamma, 1, p_{exp}, p_s), \quad \theta_{exp} = \mu(M_{exp}), \quad (7.1)$$

где

$$H_M(\gamma, M_1, p, p_1) = \sqrt{\left(\frac{p_1}{p}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \left(\frac{2}{\gamma-1} + M_1^2\right) - \frac{2}{\gamma-1}} —$$

формула изоэнтропического течения;

$$\mu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1} —$$

угол поворота потока в центрированной волне Прандтля — Майера; M_{exp} — число Маха; θ_{exp} — угол поворота границы пограничного слоя.

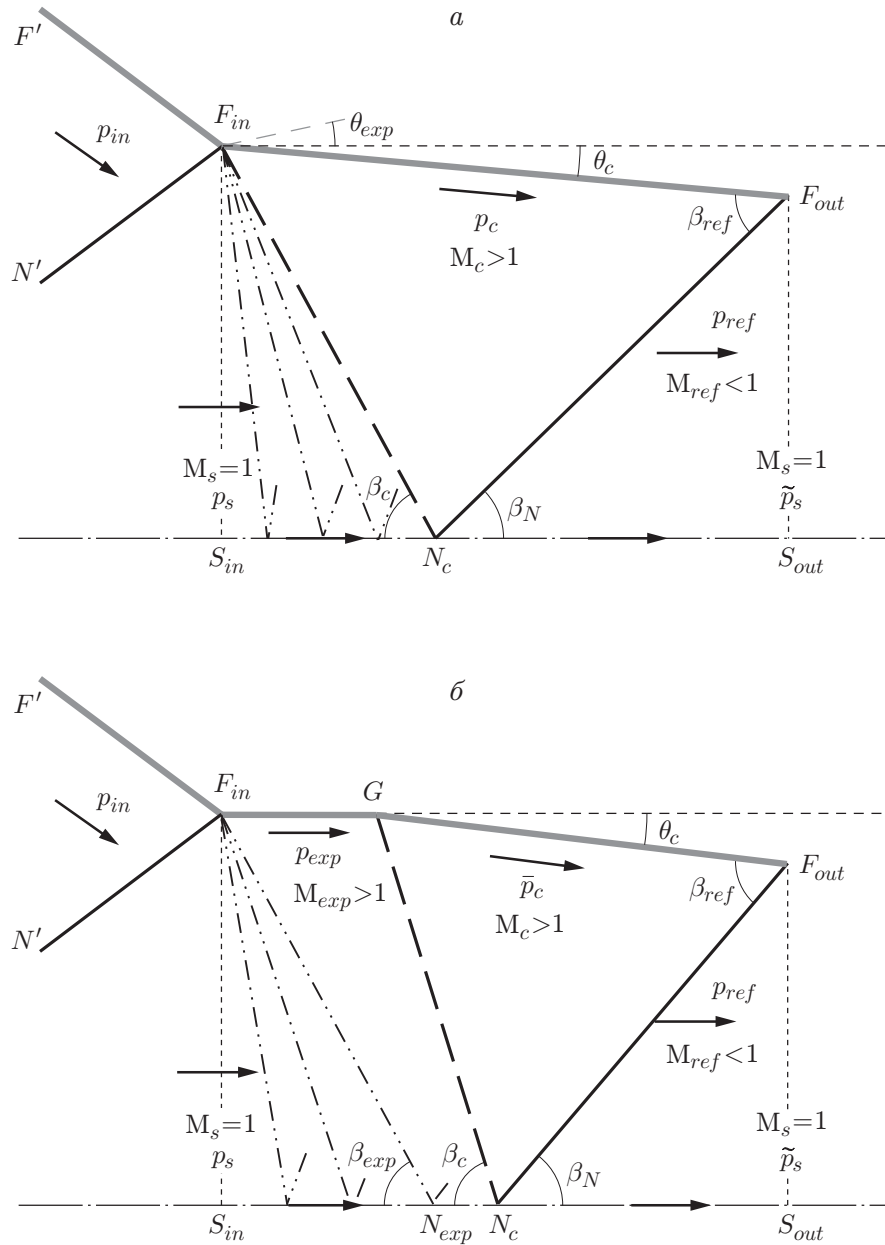


Рис. 5. Схема ячейки псевдоскачка в случае, когда входное давление меньше (а) и больше (б) давления в пограничном слое:
 стрелки — направления течения

За точкой F_{in} давление на границе монотонно растет. Поэтому к волне разрежения примыкает волна сжатия, характеристики которой пересекаются на линии $F_{in}N_c$. Формируется волна сжатия (ударная волна) с параметрами

$$\begin{aligned} p_c &= p_e(x_{in}), & M_c &= H_M(\gamma, 1, p_c, p_s), \\ \alpha_c &= \alpha(M_c), & \theta_c &= |\mu(M_c) - \theta_{exp}|, & \beta_c &= |\mu(M_c) - \theta_{exp} - \alpha_c|, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где p_c , M_c — давление и число Маха за волной сжатия; α_c — угол Маха ($\alpha(M) = \arcsin(1/M)$); θ_c — угол поворота границы пограничного слоя; β_c — угол между волной сжатия и осью канала.

Точка N_c имеет координаты (x_c — x -координата точки N_c)

$$x_c = x_{in} + y_{in}/\operatorname{tg}(\beta_c). \quad (7.3)$$

От оси симметрии волна сжатия $F_{in}N_c$ отражается ударной волной N_cF_{out} . Угол отражения β_{ref} ударной волны от границы находится из уравнения

$$\theta_c = F_\theta(\gamma, M_c, \beta_{ref}). \quad (7.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение (7.4) имеет два решения: “слабое” и “сильное”. На практике [29] при отражении от клина реализуется “слабое” решение. В предлагаемой модели используется “сильное” отражение. Как показано ниже, результаты расчетов с “сильным” отражением хорошо согласуются с экспериментальными данными. В случае выбора “слабого” решения полученные результаты существенно отличаются от экспериментальных данных (зона псевдоскачка значительно увеличивается). Выбор “сильного” решения обусловлен следующим: 1) давление на границе пограничного слоя (в отличие от случая обтекания клина) монотонно растет; 2) косой скачок $F_{in}N_c$ (см. рис. 5, *a*) моделирует криволинейную ударную волну, которая в реальности образуется при отражении криволинейной волны сжатия. Это не противоречит общепринятому “слабому” отражению, так как в данном случае “сильное” отражение лишь приближенно описывает криволинейную отраженную ударную волну. В противном случае невозможно объяснить наличие экспериментально наблюдаемых (например, в работах [31–35]) дозвуковых зон в структуре псевдоскачка. Для “слабого” решения течение за скачком является сверхзвуковым, за исключением узкой области параметров $\beta_{sound}(\gamma, M_c) < \beta_{ref} < \beta_{max}(\gamma, M_c)$, где

$$\begin{aligned} \beta_{max}(\gamma, M) &= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4\gamma M^2} \left(\gamma - 3 + (\gamma + 1)M^2 + \sqrt{(\gamma + 1)[(M^2 - 3)^2 + \gamma(M^2 + 1)^2]} \right)}, \\ \beta_{sound}(\gamma, M) &= \arcsin \sqrt{\frac{\gamma + 1}{4\gamma M^2} \left(M^2 - \frac{4}{\gamma + 1} + \sqrt{M^4 + 8 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M^2 + \frac{16}{\gamma + 1}} \right)}, \end{aligned}$$

с дозвуковым течением за косой ударной волной [21].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $\theta_c > \theta_{max}(\gamma, M_c)$ ($\theta_{max}(\gamma, M) = F_\theta(\gamma, M, \beta_{max}(\gamma, M))$ [21]) ударная волна N_cF_{out} отражается отсоединенным скачком уплотнения. Вследствие малой интенсивности этого скачка в первом приближении будем считать его прямолинейной волной отражения с углом отражения $\beta_{ref} = \pi/2$.

Параметры течения за отраженной ударной волной N_cF_{out} имеют вид

$$M_{ref} = F_M(\gamma, M_c, \beta_{ref}), \quad p_{ref} = F_p(\gamma, M_c, \beta_{ref})p_c. \quad (7.5)$$

Координаты точки F_{out} находятся из решения треугольника $F_{in}N_cF_{out}$:

$$\begin{aligned} F_{in}N_c &= \sqrt{y_{in}^2 + (x_c - x_{in})^2}, & N_cF_{out} &= F_{in}N_c \sin(\beta_c - \theta_c) / \sin(\beta_{ref}), \\ x_{out} &= x_c + N_cF_{out} \cos(\beta_N), & y_{out} &= N_cF_{out} \sin(\beta_N). \end{aligned} \quad (7.6)$$

На выходе из ячейки за ударной волной $F_{out}N_c$ скорость дозвукового течения адиабатически достигает скорости звука на звуковой линии $F_{out}S_{out}$

$$M_s = 1, \quad \tilde{p}_s = H_p(\gamma, 1, M_{ref})p_{ref}. \quad (7.7)$$

Таким образом, формулы (7.1)–(7.7) позволяют рассчитать геометрические характеристики и параметры течения в ячейке. Для расчета следующей ячейки необходимы параметры: давление на выходной звуковой линии \tilde{p}_s и выходное давление $p_{out} = p_c$ в точке F_{out} .

Течение в области $F_{in}N_cF_{out}$ всегда сверхзвуковое ($M_c > 1$), так как линия $F_{in}N_c$ является линией пересечения характеристик в сверхзвуковом потоке.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Входящие в ячейку ударная волна $N'F_{in}$, звуковая линия $F_{in}S_{in}$, центрированная волна разрежения и волна сжатия $F_{in}N_c$ сходятся в одной точке F_{in} . Как сказано выше, решение построено таким образом, чтобы закон сохранения импульса выполнялся в пределах одной ячейки. Поэтому данное упрощение оказывает влияние только на локальные характеристики течения внутри ячейки, но не влияет на ее интегральные характеристики. Ниже показано, что такое упрощение аналогично замене гладкого монотонно возрастающего профиля давления на границе эквивалентным монотонно возрастающим, но негладким профилем.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Поскольку центрированная волна разрежения $F_{in}S_{in}N_c$ отражается от оси симметрии, характеристики разрежения и волна сжатия $F_{in}N_c$ не являются прямыми. Вследствие малости чисел Маха волны разрежения это отклонение будет небольшим.

8. Структура ячейки псевдоскачка, когда входное давление больше давления на границе пограничного слоя (ячейка типа 2). Ячейка представляет собой многогранник (рис. 5, б), ограниченный вертикальными входящей $F_{in}S_{in}$ и выходящей $F_{out}S_{out}$ звуковыми линиями, линией симметрии $S_{in}S_{out}$ и границей пограничного слоя $F_{in}GF_{out}$. Входное давление p_{in} в точке F_{in} больше давления на границе пограничного слоя $p_e(x_{in})$: $p_{in} > p_e(x_{in})$.

Течение в ячейке начинается с волны разрежения $F_{in}S_{in}N_e$ (примыкающей к звуковой линии), в которой давление в потоке восстанавливается до давления на границе $p_e(x_{in})$:

$$\begin{aligned} p_{exp} &= p_e(x_{in}), & M_{exp} &= H_M(\gamma, 1, p_{exp}, p_s), \\ \beta_{exp} &= |\mu(M_{exp}) - \alpha(M_{exp})|, & N_{exp} &= x_{in} + F_{in}S_{in} / \operatorname{tg}(\beta_{exp}), \end{aligned}$$

где M_{exp} — число Маха; x_{exp} — x -координата точки N_{exp} ; β_{exp} — угол наклона последней характеристики $F_{in}N_{exp}$ волны разрежения.

Далее за волной разрежения давление должно увеличиваться до значения давления p_{in} за счет роста давления на границе $p_e(x)$ в нецентрированной волне сжатия. Разделим рост давления в потоке на два процесса: течение при постоянном давлении, а затем увеличение давления в центрированной волне сжатия. При этом “компенсируем” потерю давления в потоке увеличением давления в центрированной волне сжатия GN_c .

Выражение для баланса давления на верхней границе ячейки (на пограничном слое) имеет вид

$$\int_{x_{in}}^{x_G} p_e(x) dx + \int_{x_G}^{x_{out}} p_e(x) dx = p_{exp}(x_G - x_{in}) + \bar{p}_c(x_{out} - x_G) \cos(\theta_c), \quad (8.1)$$

где выражение в левой части — интеграл давления пограничного слоя, в правой — интеграл давления в модели; x_G — x -координата начала волны сжатия; $\bar{p}_c = p_{in} + \Delta p_c$; Δp_c — добавка к давлению, “компенсирующая” потерю импульса на участке $F_{in}G$.

На границе давление $p_e(x)$ монотонно увеличивается и в точке G достигает значения p_{in} :

$$p_e(x_G) = p_{in}. \quad (8.2)$$

Из уравнения (8.2) находим точку x_G .

Положение выходного сечения $F_{out}S_{out}$ (координата x_{out}) до решения не известно. Приведем оценку (достаточно грубую) координаты этой точки. Поскольку угол $\theta_c < 10^\circ$, будем полагать, что в (8.1) $\cos(\theta_c) \approx 1$. Угол $\beta_{ref} \approx \pi/2$. Угол наклона волны сжатия больше угла наклона последней характеристики волны разрежения: $\beta_c \geq \beta_{exp}$. Поэтому в качестве первого приближения для точки x_{out} используем значение $\hat{x}_{out} \approx x_G + (x_{exp} - x_{in})$.

Второй интеграл в левой части (8.1) можно оценить следующим образом:

$$\int_{x_G}^{\hat{x}_{out}} p_e(x) dx > p_{in}(\hat{x}_{out} - x_G).$$

Тогда из интегрального закона сохранения (8.1) получим поправку к давлению Δp_c в волне сжатия в виде

$$\Delta p_c = \frac{1}{x_{exp} - x_{in}} \left(\int_{x_{in}}^{x_G} p_e(x) dx - p_{exp}(x_G - x_{in}) \right).$$

После расчета волны сжатия с этой добавкой уточняется положение конца ячейки x_{out} . Параметры за волной сжатия рассчитываются так же, как для ячейки типа 1, но с давлением \bar{p}_c .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Выполнение закона сохранения импульса вдоль x -координаты гарантировано построением решения. По y -координате закон сохранения импульса выполняется приближенно. Для ячеек типа 1 давление на границе моделируется ломаной линией. Среднее значение давления на стенке в модели меньше статического давления. Для ячеек типа 2 интегральный закон сохранения импульса (8.1) также выполняется приближенно вследствие простоты модели.

9. Обсуждение результатов и сравнение с экспериментальными данными.

Сравним результаты расчета по предложенной модели псевдоскачка с известными экспериментальными и расчетными данными (рис. 6–8).

В работах [12, 13] приведены результаты экспериментов для λ -образных псевдоскачков при следующих значениях параметров: половина ширины канала $Y_1 = 40$ мм, число Маха набегающего потока $M_1 = 1,7$, толщина пограничного слоя $\delta_1 = 0,1Y_1$, число Рейнольдса $Re \approx 4 \cdot 10^7$. Оценка длины клина L по формулам (5.1)–(5.3) дала следующие значения: $L_{max} = 42,8$ мм, $\tilde{L}_{max} = 40,6$ мм, $L_S = 17$ мм, в расчетах $L = 32$ мм.

На рис. 6, а, б показаны входной участок (структура ударных волн с маховским отражением) и пять ячеек псевдоскачка. Данный расчет проводился для ячеек типа 1 (см. п. 7).

На рис. 6, б, 8, а видно, что в каждой последующей ячейке число Маха уменьшается и в пределе ударные волны вырождаются в звуковые. На рис. 7 показано распределение давления. Видно, что в расчете сглаженное статическое давление моделируется ступенчатым давлением. Положение пиков давления на оси канала соответствует положению экспериментальных пиков давления. В расчетах по модели пики давления не сглажены,

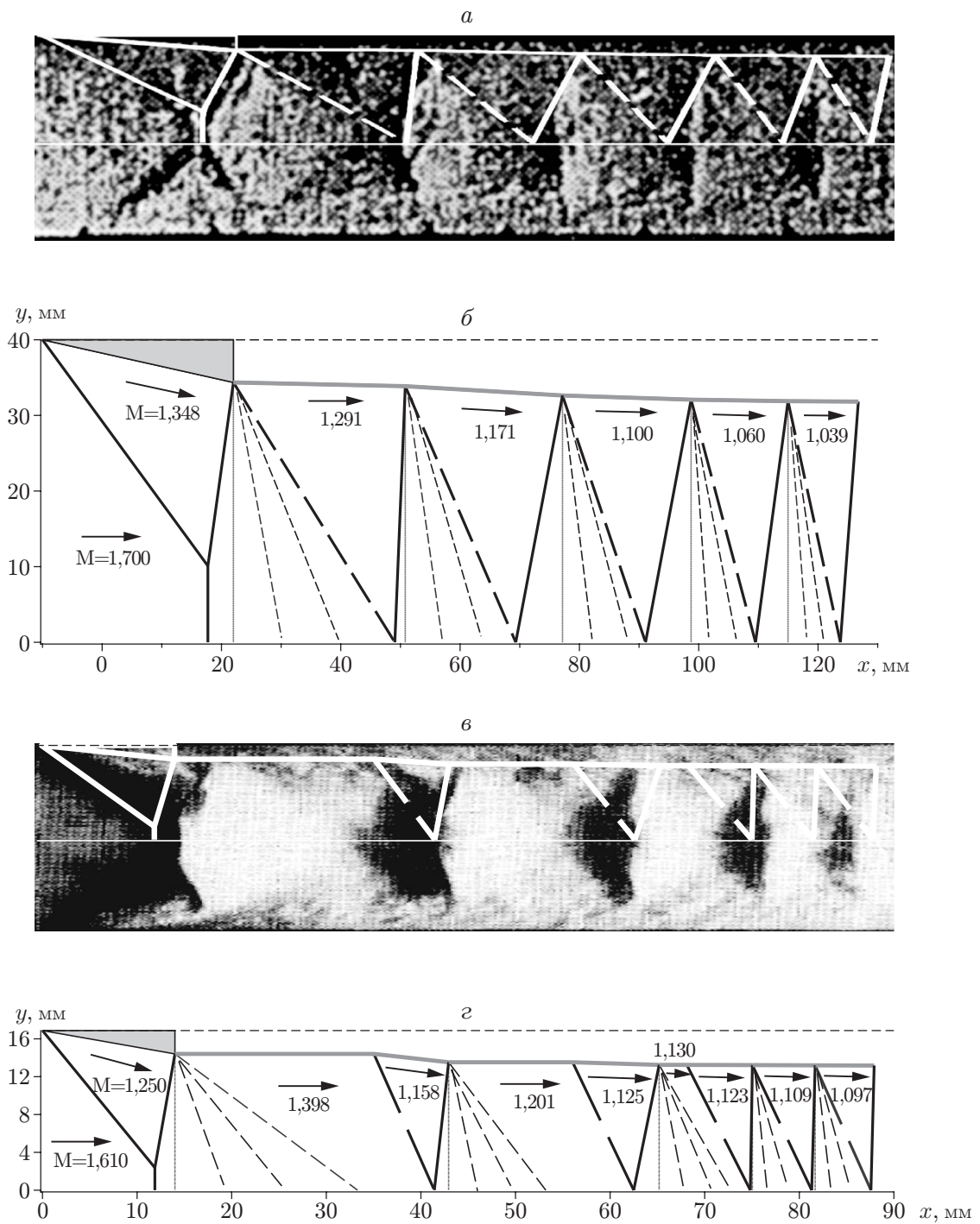


Рис. 6. Экспериментальная (*а*, *в*) и расчетная (*б*, *г*) структура течения в псевдо-скачке:

а, *б* — данные работ [12, 13], *в*, *г* — данные работ [31–33]; белые линии — расчет, жирные штриховые линии — ударные волны, сформированные волнами сжатия, штриховые линии — веер волн разрежения, которые начинаются с вертикальной звуковой линии; стрелки — направления потока (масштаб рис. 6,*а* уменьшен по оси y в три раза, масштаб рис. 6,*в* — в 1,7 раза)

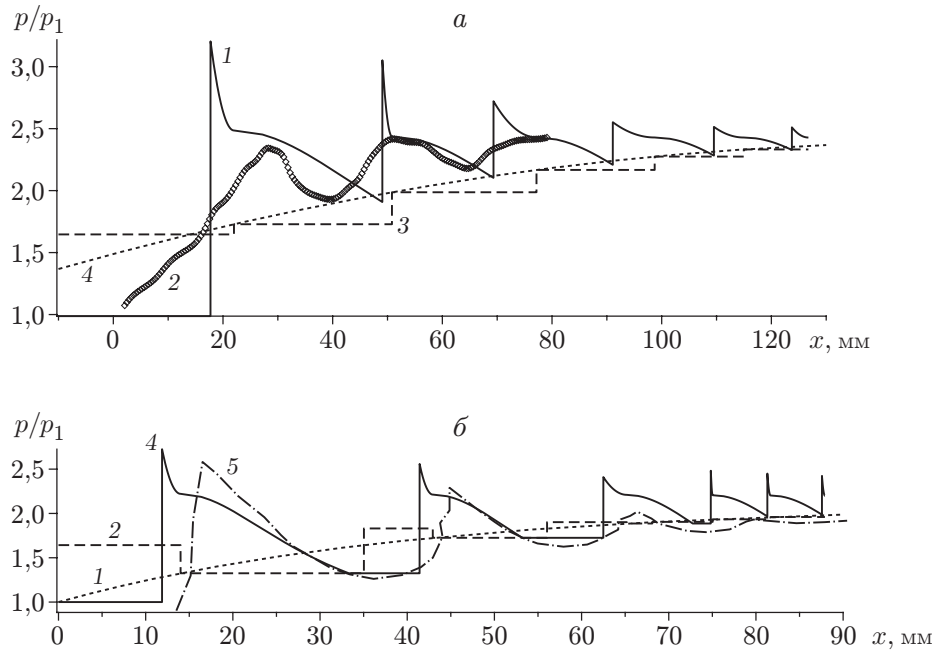


Рис. 7. Распределение давления в псевдоскачке:

a — данные работ [12, 13], *б* — данные работ [16, 31–33]; 1 — экспериментальное статическое давление; 2 — расчетное давление на границе пограничного слоя; 3 — экспериментальное давление на оси канала; 4 — расчетное (по модели) давление на оси канала; 5 — расчетное давление на оси канала [16]

как в экспериментах, поскольку в модели течение внутри канала описывается моделью невязкого газа.

На рис. 8 представлены распределения числа Маха потока.

В работах [31–33] приведены результаты экспериментов, а в работе [16] — данные численного расчета при следующих значениях параметров: $Y_1 = 16,875$ мм, $M_1 = 1,61$, $\delta_1 = 5,4$ мм, единичное число Рейнольдса $Re_1 = 30\,000$ мм⁻¹. Оценка длины клина L по формулам (5.1)–(5.3) дала следующие значения: $L_{\max} = 16,3$ мм, $\tilde{L}_{\max} = 15,8$ мм, $L_S = 16,7$ мм (условие (5.4) не выполняется, однако параметры для ограничений на длину плато близки), в расчетах $L = 14$ мм.

На рис. 6,6,2 приведены расчетная и экспериментальная структуры псевдоскачка. В данном расчете первые три структурные ячейки относятся к типу 2 (см. п. 8), остальные — к типу 1 (см. п. 7). Однако сравнение с данными эксперимента показывает, что четвертая ячейка также должна быть ячейкой типа 2. Несовпадение положения четвертой расчетной ячейки с положением экспериментальной ячейки обусловлено приближенностью оценки, “компенсирующей” потерю добавки давления (см. п. 8).

На рис. 7,б приведены распределения давления на оси канала, полученные численно [16] и аналитически. Видно, что зависимость $p/p_1(x)$, рассчитанная по модели (кривая 4), является немонотонной: имеются “полочки” (давление \bar{p}_c), которые компенсируют потерю давления на предыдущем участке ячейки. Положение и величина первых трех пиков давлений, полученных аналитически и численно (кривые 1, 2), достаточно хорошо согласуются. Давление, полученное аналитически, в отличие от вычисленного давления имеет острые пики, что обусловлено влиянием вязкости в расчетах (в модели вязкость не учитывается). Дальнейшее несовпадение пиков давления обусловлено приближенностью рассматриваемой модели течения.

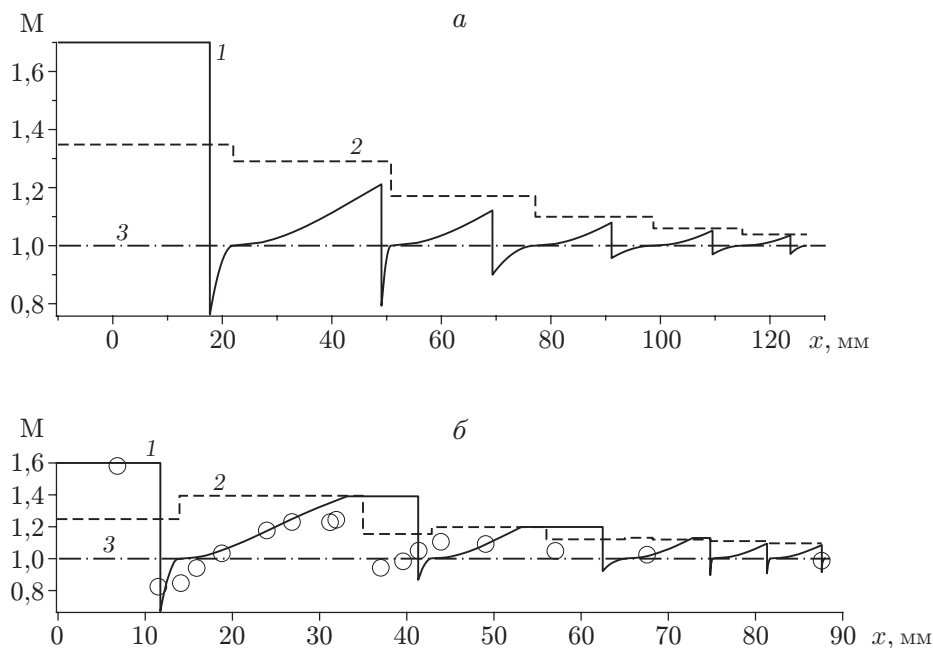


Рис. 8. Распределение числа Маха потока в псевдоскачке:
a — данные работ [12, 13], *б* — данные работ [31–33]; 1 — расчетное число Маха на оси канала, 2 — расчетное число Маха на границе пограничного слоя, 3 — линия $M = 1$, точки — экспериментальные значения числа Маха на оси канала

Заключение. Рассмотрена структура течения в λ -образном плоском псевдоскачке. Показано, что при числах Маха набегающего потока $M_1 \approx 1,4 \div 2,0$ течение в псевдоскачке начинается с маховского отражения ударных волн, поскольку при этих числах Маха наблюдаются λ -образные псевдоскачки. Для описания структуры течения в λ -образном псевдоскачке получена приближенно-аналитическая, или “инженерная” модель. Течение в канале полагается двухслойным, состоящим из вязкого пограничного слоя и невязкого ядра. Структура течения в невязком ядре включает входной участок с маховским отражением ударной волны, который заканчивается звуковой линией. Далее структура течения представляет собой набор ячеек (двух типов) секций, начинающихся и заканчивающихся звуковыми линиями. Внутри ячеек реализуется течение, состоящее из волн разрежения и сжатия, косых ударных волн, дозвукового адиабатического течения. В каждой последующей (ниже по потоку) ячейке интенсивность ударных волн и волн сжатия уменьшается и ударные волны асимптотически вырождаются в звуковые. Поэтому модель не позволяет получить точное значение длины псевдоскачка, как, например, диффузионные модели [3, 4]. Модель описывается конечными математическими формулами. Для ее проверки проведено сравнение с экспериментальными и численными данными, которое показало, что модель качественно и количественно адекватно описывает структуру течения: положение первых трех пиков в эксперименте и в модели совпадает. Дальнейшее расхождение теории и эксперимента обусловлено тем, что в модели не учитывается диссипация вследствие отсутствия вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Авиация:** Энцикл. / Под ред. Г. П. Свищева. М.: Большая рос. энцикл., 1994.
2. **Weiss A., Grzona A., Olivier H.** Behavior of shock trains in a diverging duct // Exp. Fluids. 2010. V. 49, N 2. P. 355–365.

3. **Крокко Л.** Одномерное рассмотрение газовой динамики установившихся течений // Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 64–324.
4. **Takefumi I., Kazuyasu M., Minoru N.** The mechanism of pseudo-shock waves // Bull. JSME. 1974. V. 17, N 108. P. 731–739.
5. **Щетинков Е. С.** О кусочно-одномерных моделях сверхзвукового горения и псевдоскачка в канале // Физика горения и взрыва. 1973. Т. 9, № 4. С. 473–483.
6. **Kanda T., Tani K.** Momentum balance model of flow field with pseudo-shock. Reno, 2005. (Paper/ AIAA; N 2005–1045).
7. **Kanda T., Tani K.** Momentum balance model of flow field with pseudo-shock: JAXA res. develop. rep. / Japan aerospace exploration agency. N JAXA-RR-06-037E. Tokyo, 2007.
8. **Matsuo K., Miyazato Y., Kim H.-D.** Shock train and pseudo-shock phenomena in internal gas flows // Progr. Aerospace Sci. 1999. V. 35, N 1. P. 33–100.
9. **Godbole A.** Shock-assisted pneumatic injection technology: Diss. ... Ph. D. Wollongong, 1998.
10. **Godbole A., Wypych P., Soh W. K., et al.** Pseudo-shock in supersonic injection feeder // Proc. of the 2nd Intern. conf. on CFD in the minerals and process industries CSIRO, Melbourne (Australia), 6–8 Dec. 1999. S. 1., 1999. P. 107–112.
11. **Латыпов А. Ф.** Принцип максимума энтропии для стационарного течения газа в канале // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 3. С. 68–73.
12. **Tamaki T., Tomita Y., Yamane R.** A study of pseudo-shock: 1st report, λ -type pseudo-shock // Bull. JSME. 1970. V. 13, N 55. P. 51–58.
13. **Tamaki T., Tomita Y., Yamane R.** A study of pseudo-shock: 2nd report, X -type pseudo-shock // Bull. JSME. 1971. V. 14, N 74. P. 807–817.
14. **Zukoski E. E.** Turbulent boundary-layer separation in front of a forward-facing step // AIAA J. 1967. V. 5, N 10. P. 1746–1753.
15. **Knight D. D., Zheltovodov A. A.** Ideal-gas shock wave — turbulent boundary-layer interactions (STBLIs) in supersonic flows and their modeling: Two-dimensional interactions // Shock wave — boundary-layer interactions. Chap. 4 / Ed. by H. Babinsky, J. Harvey. N. Y. etc.: Cambridge Univ. Press, 2011. P. 137–201. (Cambridge Aerospace Ser.).
16. **Гуськов О. В.** Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах / О. В. Гуськов, В. И. Копченков, И. И. Липатов и др. М.: Физматлит, 2008.
17. **Медведев А. Е., Фомин В. М.** Приближенно-аналитический расчет маховской конфигурации стационарных ударных волн в плоском сужающемся канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 3. С. 52–58.
18. **Медведев А. Е., Фомин В. М.** Модель маховской конфигурации стационарных ударных волн в плоском сужающемся канале // Теплофизика и аэромеханика. 1999. Т. 6, № 2. С. 157–164.
19. **Медведев А. Е.** Отражение косо́й ударной волны в реагирующем газе с конечной длиной зоны реакции // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 33–41.
20. **Delery J.** Physical introduction. Chap. 2 / Ed. by H. Babinsky, J. Harvey. N. Y. etc.: Cambridge Univ. Press, 2011. P. 5–86. (Cambridge Aerospace Ser.).
21. **Mouton C. A.** Transition between regular reflection and Mach reflection in the dual-solution domain: Diss. ... Ph. D. Pasadena, 2007.
22. **Azevedo D. J., Liu C. S.** Engineering approach to the prediction of shock patterns in bounded high-speed flows // AIAA J. 1993. V. 31, N 1. P. 83–90.
23. **Чжен П.** Отрывные течения. М.: Мир, 1972. Т. 1.
24. **Henderson L. F.** The reflexion of a shock wave at a rigid wall in the presence of a boundary layer // J. Fluid Mech. 1967. V. 30, N 4. P. 699–722.

25. **Тарасов Ф. Ф.** Исследование псевдоскачка в длинных каналах: Дис. ... канд. техн. наук. Казань, 1967.
26. **Billig F.** Research on supersonic combustion // J. Propuls Power. 1992. V. 9, N 4. P. 499–514.
27. **Lees L., Reeves B. L.** Supersonic separated and reattaching laminar flows. 1. General theory and application to adiabatic boundary-layer/shock-wave interactions // AIAA J. 1964. V. 2, N 11. P. 1907–1920.
28. **Петров Г. И.** Избранные труды. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования / Под ред. Ю. В. Чудецкого. М.: Наука, 1992. С. 146–184.
29. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
30. **Li H., Ben-Dor G.** A parametric study of Mach reflection in steady flows // J. Fluid Mech. 1997. V. 341. P. 101–125.
31. **Dutton J. C., Carroll D. F.** Numerical and experimental investigation of multiple shock wave/turbulent boundary layer interactions in a rectangular duct: Rep. / Univ. Illinois. N UIIU-ENG-88-4001. Urbana, 1988.
32. **Carroll B., Dutton J.** An LDV investigation of a multiple shock wave. Turbulent boundary layer interaction. Reno, 1989. (Paper / AIAA; N 89-0355).
33. **Carroll B., Dutton I.** Turbulence phenomena in multiple normal shock wave. Turbulent boundary layer interaction // AIAA J. 1992. V. 30, N 1. P. 43–48.
34. **Sun L. Q., Sugiyama H., Mizobata K., et al.** Numerical and experimental investigations on the Mach 2 pseudo-shock wave in a square duct // J. Visual. 2003. V. 6, N 4. P. 363–370.
35. **Sun L., Sugiyama H., Mizobata K., et al.** Numerical and experimental investigations on Mach 2 and 4 pseudo-shock waves in a square duct // Trans. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci. 2004. V. 47, N 156. P. 124–130.

Поступила в редакцию 6/XII 2013 г.
