

УДК 539.4

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ТЕРМОУПРУГИХ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С РАВНОНАПРЯЖЕННОЙ АРМАТУРОЙ

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Сформулирована задача равнонапряженного армирования плоских композитных конструкций при термосиловом нагружении. Проведен асимптотический анализ соответствующей граничной задачи, на основе которого показано, что в силу существенной нелинейности статических граничных условий задача может иметь два решения. Предложен итерационный метод решения задачи. Проанализированы конкретные аналитические и численные решения и исследована степень влияния теплового воздействия на равнонапряженно-армированные структуры.

Одним из критериев рационального проектирования волокнистых композитных конструкций при статическом нагружении является равнонапряженность волокон вдоль их траекторий, так как при выполнении этого критерия несущая способность высокомодульной и высокопрочной арматуры используется наиболее полно, а связующее осуществляет лишь равномерное перераспределение нагрузок на элементарные волокна. Постановка задачи рационального армирования (РА) плоских композитных конструкций высокомодульными равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения с учетом теплового воздействия изложена в [1]. Однако до настоящего времени не исследовано качественное и количественное влияние температуры на структуру РА. В данной работе проводится асимптотический анализ системы разрешающих уравнений термоупругой задачи РА, исследуется влияние теплового воздействия на структуру армирования и напряженно-деформированное состояние конструкции с равнонапряженными волокнами.

1. Система разрешающих уравнений и граничные условия. Полная замкнутая обезразмеренная система разрешающих уравнений задачи РА, описывающая поведение плоских термоупругих конструкций, статически нагруженных и армированных двумя семействами равнонапряженных волокон (материалы связующего и волокон предполагаются изотропными, а их поведение — линейно-упругим), включает уравнения равновесия, записанные в перемещениях [1]:

$$A_i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) + \lambda B_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, \theta) = -b_i(\boldsymbol{\omega}) \equiv -\left(aF_{ci} + \sum_k \omega_k F_{ki}\right), \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

условия постоянства поперечных сечений волокон [1]

$$\partial_s(\alpha_k, \omega_k) + \omega_k \partial_n(\alpha_k, \alpha_k) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1.2)$$

условия равнонапряженности арматуры [1]

$$\partial_s(\alpha_k, u_1) \cos \alpha_k + \partial_s(\alpha_k, u_2) \sin \alpha_k - \alpha_{ak} \theta = \varepsilon_k = \sigma_k / E_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, \quad (1.3)$$

уравнение плоской стационарной теплопроводности [2]

$$(\Lambda_{11}\theta_{,1} + \Lambda_{12}\theta_{,2})_{,1} + (\Lambda_{21}\theta_{,1} + \Lambda_{22}\theta_{,2})_{,2} + \mu(\theta_* - \theta) = -Q(\omega) \equiv -\left(aQ_c + \sum_k \omega_k Q_k\right), \quad (1.4)$$

где $A_i, B_i, \partial_s, \partial_n$ — дифференциальные операторы вида

$$A_i(\omega, \alpha) = (-1)^i \sum_k \sigma_k \omega_k l_{kj} \partial_s(\alpha_k, \alpha_k),$$

$$B_i(\omega, \mathbf{u}, \theta) = aa_1[u_{i,ii} + \nu u_{j,ij} + (1 - \nu)(u_{j,ij} + u_{i,jj})/2 - \alpha_c \theta_{,i}/a_2] - \sum_k [a_1(u_{i,i} + \nu u_{j,j} - \alpha_c \theta/a_2)\omega_{k,i} + a_2(u_{j,i} + u_{i,j})\omega_{k,j}/2], \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2; \quad (1.5)$$

$$\partial_s(\alpha_k, f) = f_{,1} \cos \alpha_k + f_{,2} \sin \alpha_k, \quad \partial_n(\alpha_k, f) = -f_{,1} \sin \alpha_k + f_{,2} \cos \alpha_k, \quad (1.6)$$

f — произвольная дифференцируемая функция;

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2\}; \quad (1.7)$$

$$\Lambda_{ij} = \Omega^{-1} \sum_k \omega_k \{[\Omega(\lambda_k - \lambda_c) + \lambda_c]l_{ki}l_{kj} + (-1)^{i+j}l_{ks}l_{kr}\lambda_k\lambda_c[\Omega(\lambda_c - \lambda_k) + \lambda_k]^{-1}\}, \quad (1.8)$$

$$s = 3 - i, \quad r = 3 - j, \quad i, j = 1, 2.$$

На одной части контура Γ_p могут быть заданы статические граничные условия [1]

$$C_n(\alpha, \omega) + \lambda D_n(\omega, \mathbf{u}, \theta) = p_n, \quad C_\tau(\alpha, \omega) + \lambda D_\tau(\omega, \mathbf{u}) = 2p_\tau, \quad (1.9)$$

на другой части Γ_u — кинематические

$$u_i(\Gamma_u) = u_{i0}, \quad i = 1, 2, \quad (1.10)$$

на всем контуре Γ — тепловые

$$\chi_0[(\Lambda_{11}\theta_{,1} + \Lambda_{12}\theta_{,2})n_1 + (\Lambda_{21}\theta_{,1} + \Lambda_{22}\theta_{,2})n_2 + q_0] + \chi_1(\theta - \theta_0) = 0, \quad (1.11)$$

где

$$C_n(\alpha, \omega) = \sum_k \sigma_k \omega_k \cos^2(\alpha_k - \beta), \quad C_\tau(\alpha, \omega) = \sum_k \sigma_k \omega_k \sin 2(\alpha_k - \beta), \quad (1.12)$$

$$D_n(\omega, \mathbf{u}, \theta) = aa_1[(u_{1,1} + \nu u_{2,2})n_1^2 + (u_{2,2} + \nu u_{1,1})n_2^2 + (1 - \nu)(u_{1,2} + u_{2,1})n_1n_2 - \alpha_c \theta/a_2],$$

$$D_\tau(\omega, \mathbf{u}) = aa_2[2(u_{2,2} - u_{1,1})n_1n_2 + (u_{1,2} + u_{2,1})(n_1^2 - n_2^2)]; \quad n_1 = \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta.$$

Кроме граничных условий (1.9)–(1.11) на части контура Γ_ω , на которой волокна входят в конструкцию, необходимо задать граничные условия для интенсивностей армирования [3]:

$$\omega_k(\Gamma_\omega) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2. \quad (1.13)$$

Соотношения (1.1)–(1.13) записаны в безразмерных переменных: $\sigma_k = \bar{\sigma}_k/|\bar{\sigma}_1|$, $\varepsilon_k = \bar{\varepsilon}_k/|\bar{\varepsilon}_1|$, $E_k = \bar{E}_k/\bar{E}_1$, $u_i = \bar{u}_i/|D\bar{\varepsilon}_1|$, $b_i = D\bar{b}_i/|\bar{\sigma}_1|$, $F_{ci} = D\bar{F}_{ci}/|\bar{\sigma}_1|$, $F_{ki} = D\bar{F}_{ki}/|\bar{\sigma}_1|$, $\alpha_{ak} = \bar{\alpha}_{ak}/\bar{\alpha}_c$, $\alpha_c = \bar{\alpha}_c/\bar{\alpha}_c = 1$, $\lambda_k = \bar{\lambda}_k/\bar{\lambda}_c$, $\lambda_c = \bar{\lambda}_c/\bar{\lambda}_c = 1$, $\theta = \bar{\alpha}_c\bar{\theta}/|\bar{\varepsilon}_1|$, $\theta_0 = \bar{\alpha}_c\bar{\theta}_0/|\bar{\varepsilon}_1|$, $\theta_* = \bar{\alpha}_c\bar{\theta}_*/|\bar{\varepsilon}_1|$, $Q = \bar{\alpha}_c D^2\bar{Q}/|\bar{\lambda}_c\bar{\varepsilon}_1|$, $Q_k = \bar{\alpha}_c D^2\bar{Q}_k/|\bar{\lambda}_c\bar{\varepsilon}_1|$, $Q_c = \bar{\alpha}_c D^2\bar{Q}_c/|\bar{\lambda}_c\bar{\varepsilon}_1|$, $q_0 = \bar{\alpha}_c D\bar{q}_0/|\bar{\lambda}_c\bar{\varepsilon}_1|$, $\mu = 2D^2\bar{\mu}/(h\bar{\lambda}_c)$, $p_n = \bar{p}_n/|\bar{\sigma}_1|$, $p_\tau = \bar{p}_\tau/|\bar{\sigma}_1|$, $u_{i0} = \bar{u}_{i0}/|D\bar{\varepsilon}_1|$, $l_{k1} = \cos \alpha_k$, $l_{k2} = \sin \alpha_k$,

$a = 1 - \Omega$, $\Omega = \sum_k \omega_k$, $a_1 = 1/(1 - \nu^2)$, $a_2 = 1/(1 + \nu)$ ($i, k = 1, 2$); $\lambda = \bar{E}/\bar{E}_1$ — малый

параметр; $\bar{\sigma}_k, \bar{\varepsilon}_k$ — напряжение и механическая деформация в арматуре k -го семейства; ν, \bar{E}, \bar{E}_k — коэффициент Пуассона связующего и модули упругости связующего и арматуры k -го семейства соответственно; ω_k, α_k — интенсивность и угол (отсчитываемый от направления x_1) армирования волокном k -го семейства; \bar{u}_i, \bar{b}_i — компоненты перемещения и приведенной объемной нагрузки по направлениям \bar{x}_i прямоугольной декартовой системы координат ($\bar{x}_i = Dx_i, i = 1, 2$); $\bar{F}_{ci}, \bar{F}_{ki}$ — компоненты удельных объемных нагрузок, действующих на связующее и арматуру k -го семейства соответственно; D, h — характерный размер и толщина пластины; $\bar{\alpha}_c, \bar{\alpha}_{ak}$ — коэффициенты линейного теплового расширения связующего и арматуры k -го семейства; $\bar{\lambda}_c, \bar{\lambda}_k$ — коэффициенты теплопроводности связующего и арматуры k -го семейства; $\bar{\theta}$ — разность температур пластины в рабочем и исходном состояниях; $\bar{\theta}_0$ — разность температур контура пластины в рабочем и исходном состояниях; $\bar{\theta}_*$ — разность температур окружающей среды (со стороны лицевых поверхностей пластины) и исходного состояния пластины; \bar{Q} — приведенная плотность внутренних источников тепла в волокнистом композите; \bar{Q}_c, \bar{Q}_k — плотности внутренних источников тепла в связующем и арматуре k -го семейства соответственно; $\bar{\mu}$ — коэффициент конвективного теплообмена связующего с окружающей средой на лицевых поверхностях пластины; \bar{q}_0 — тепловой поток через боковую поверхность конструкции (через кромку пластины); β — угол, задающий направление внешней нормали к контуру Γ ; \bar{p}_n, \bar{p}_τ — нормальное и касательное напряжения на Γ_p соответственно; \bar{u}_{i0} — перемещения на контуре; χ_0, χ_1 — функции, зависящие от вида тепловых граничных условий на контуре; ω_{0k} — заданные на Γ_ω интенсивности армирования волокном k -го семейства; по индексу k проводится суммирование от 1 до 2; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной x_i ; в качестве неизвестных выступают функции $\alpha_k, \omega_k, u_i, \theta$. Функции ω_k должны удовлетворять условиям

$$\omega_k > 0 \quad (k = 1, 2), \quad \Omega = \sum_k \omega_k < 1. \quad (1.14)$$

В [1] показано, что система разрешающих уравнений (1.1)–(1.4) является квазилинейной системой смешанно-составного типа [4], замкнутой относительно неизвестных функций $\alpha_k, \omega_k, u_i, \theta$ ($k, i = 1, 2$), имеет две комплексные характеристики, порождаемые уравнением теплопроводности (1.4), и две действительные характеристики, совпадающие с траекториями равнонапряженных волокон.

2. Асимптотический анализ системы разрешающих уравнений и граничных условий. В уравнениях (1.1) и граничных условиях (1.9) малый параметр λ устремим к нулю. Тогда уравнения асимптотического анализа будут иметь вид

$$A_i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) = -b_i(\boldsymbol{\omega}), \quad i = 1, 2 \quad (\lambda \rightarrow 0); \quad (2.1)$$

$$\partial_s(\alpha_k, \omega_k) + \omega_k \partial_n(\alpha_k, \alpha_k) = 0, \quad k = 1, 2; \quad (2.2)$$

$$(\Lambda_{11}\theta_{,1} + \Lambda_{12}\theta_{,2})_{,1} + (\Lambda_{21}\theta_{,1} + \Lambda_{22}\theta_{,2})_{,2} + \mu(\theta_* - \theta) = -Q(\boldsymbol{\omega}); \quad (2.3)$$

$$\partial_s(\alpha_k, u_1) \cos \alpha_k + \partial_s(\alpha_k, u_2) \sin \alpha_k = \varepsilon_k + \alpha_{ak}\theta, \quad k = 1, 2. \quad (2.4)$$

Граничные условия (1.9)–(1.11), (1.13) при $\lambda \rightarrow 0$ приводятся к виду

$$C_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}) = p_n, \quad C_\tau(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}) = 2p_\tau, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p; \quad (2.5)$$

$$u_i(\Gamma_u) = u_{i0}, \quad i = 1, 2; \quad (2.6)$$

$$\chi_0[(\Lambda_{11}\theta_{,1} + \Lambda_{12}\theta_{,2})n_1 + (\Lambda_{21}\theta_{,1} + \Lambda_{22}\theta_{,2})n_2 + q_0] + \chi_1(\theta - \theta_0) = 0; \quad (2.7)$$

$$\omega_k(\Gamma_\omega) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2. \quad (2.8)$$

(Очевидно, что система уравнений (2.1)–(2.4) и граничные условия (2.5)–(2.8) описывают термоупругую задачу РА при использовании “нитяной” модели армированного слоя.)

Анализ системы уравнений (2.1)–(2.4) показывает, что уравнения асимптотического анализа, в отличие от исходной системы (1.1)–(1.4), распадаются на три замкнутых подсистемы: первая подсистема (2.1), (2.2) состоит из четырех квазилинейных уравнений и замкнута относительно α_k, ω_k ; вторая подсистема (2.3) включает одно уравнение и при известных из (2.1), (2.2) α_k, ω_k замкнута относительно θ ; третья подсистема (2.4) состоит из двух уравнений и при известных из (2.1)–(2.3) α_k, θ замкнута относительно u_k ($k = 1, 2$). Аналогично распадаются граничные условия (2.5)–(2.8): условия (2.5), (2.8) включают четыре равенства и замкнуты (при $\Gamma_p = \Gamma_\omega$) относительно значений функций α_k, ω_k на границе; тепловые условия (2.7) при α_k, ω_k , известных из решения краевой задачи (2.1), (2.2), (2.5), (2.8), задают на контуре Γ значения функции θ на границе или условия по тепловому потоку, а кинематические условия (2.6) определяют на контуре Γ_u значения двух функций u_k ($k = 1, 2$). Следовательно, применение асимптотического анализа позволяет расщепить ранее связанные задачи определения параметров РА, температурного поля и напряженно-деформированного состояния в конструкции на ряд подзадач, которые можно последовательно интегрировать.

В [5] показано, что подсистема (2.1), (2.2) имеет две двукратные действительные характеристики, определяемые углами α_k (т. е. совпадающие с траекториями армирования). Однако эта подсистема не приводится к характеристической форме [6], поэтому не относится ни к гиперболическому, ни к параболическому типу (в частности, при $\alpha_1 = \alpha_2$ система (2.1), (2.2) вырождается в систему параболического типа). Если объемные нагрузки в задаче РА не учитываются, т. е. $b_i = 0$ в (2.1), то система (2.1), (2.2) является приводимой и ее общий интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} -x_2 \cos \alpha_k + x_1 \sin \alpha_k &= f_k(\alpha_k), \\ \omega_k &= g_k(\alpha_k)[x_2 \sin \alpha_k + x_1 \cos \alpha_k - f'_k(\alpha_k)]^{-1}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где f_k, g_k — произвольные функции одного аргумента; штрих означает производную по указанному аргументу. Если на некоторой линии (в частности, на контуре конструкции) известны значения функций α_k, ω_k , то на этой линии, используя (2.9), можно определить функции f_k, g_k ($k = 1, 2$). Пусть, например, на контуре Γ_ω , где волокна входят в конструкцию, известны значения $\alpha_k(\Gamma_\omega) = \alpha_{0k}(s)$ и $\omega_k(\Gamma_\omega) = \omega_{0k}(s)$ (см. (1.13), (2.8)), тогда из (2.9) получим

$$\begin{aligned} f_k(\alpha_k) &= -\xi_2(s) \cos \alpha_{0k}(s) + \xi_1(s) \alpha_{0k}(s), \\ g_k(\alpha_k) &= \omega_{0k}(s)[- \xi_2'(s) \cos \alpha_{0k}(s) + \xi_1'(s) \sin \alpha_{0k}(s)] / \alpha_{0k}'(s), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где ξ_i — функции, задающие уравнение контура Γ_ω ($x_i = \xi_i(s)$, $i = 1, 2$).

Покажем, что значения функций α_k на контуре можно определить из статических граничных условий (2.5). Пусть волокна входят в конструкцию на части контура, на которой заданы статические граничные условия (Γ_p совпадает с Γ_ω) и выходят на части контура Γ_u , где заданы кинематические условия. Тогда на контуре Γ_p будут известны значения функций ω_k (2.8), входящие в уравнения (2.5), а систему трансцендентных уравнений (2.5), замкнутую относительно α_k ($k = 1, 2$), можно привести к виду

$$\begin{aligned} \cos(2\varphi_2 - \psi) &= (b^2 + c^2 - \sigma_1^2 \omega_{01}^2 + \sigma_2^2 \omega_{02}^2)(2\sigma_2 \omega_{02} \sqrt{b^2 + c^2})^{-1}, \\ \operatorname{tg} 2\varphi_1 &= (2p_\tau - \sigma_2 \omega_{02} \sin 2\varphi_2) \left(2p_n - \sum_k \sigma_k \omega_{0k} - \sigma_2 \omega_{02} \cos 2\varphi_2 \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\alpha_k(\Gamma_\omega) = \alpha_{0k}(s) = \varphi_k + \beta \quad (k = 1, 2), \quad \cos \psi = c / \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \sin \psi = b / \sqrt{b^2 + c^2},$$

где $b = 2p_\tau$; $c = 2p_n - \sigma_1 \omega_{01} - \sigma_2 \omega_{02}$.

Таким образом, уравнения (2.9), (2.10) и краевые условия (2.8), (2.11) определяют выражения для параметров РА α_k , ω_k в аналитической форме при отсутствии объемных нагрузок. При этом первое уравнение (2.9) в плоскости x_1Ox_2 задает прямую линию, проходящую под углом α_k к оси Ox_1 . Следовательно, при отсутствии объемных нагрузок траектории армирования в асимптотическом приближении являются прямыми линиями.

Функция β в (2.11) задает направление внешней нормали к контуру Γ_p . Чтобы волокна входили на нем в конструкцию, необходимо решение системы (2.11) искать на открытых интервалах $\varphi_k \in (\pi/2, 3\pi/2)$. В этих интервалах первое уравнение (2.11) в зависимости от ψ и значения правой части может иметь до двух различных корней, второе же уравнение при известном φ_2 имеет только один корень. Таким образом, система (2.11) может иметь до двух различных наборов решений относительно $\alpha_k(\Gamma_p) = \alpha_{0k}(s)$, а значит, уравнения (2.9), (2.10) с учетом (2.8) будут определять два набора параметров РА, удовлетворяющих одной и той же задаче рационального проектирования. Из асимптотического анализа системы разрешающих уравнений следует, что задача РА может иметь два решения.

Отметим, что уравнения (2.9), (2.10) являются решением задачи Коши для системы (2.1) ($b_i = 0$) при начальных условиях $\alpha_k(\Gamma_\omega) = \alpha_{0k}(s)$ и $\omega_k(\Gamma_\omega) = \omega_{0k}(s)$. При наличии объемных нагрузок ($b_i \neq 0$) для системы (2.1) (в силу того, что все ее характеристики действительны) ставится задача Коши с начальными условиями (2.8), (2.11) (в предположении аналитичности всех входных данных). При этом так же, как и в случае отсутствия объемных сил, можно получить два набора параметров РА, удовлетворяющих одной и той же исходной задаче.

Если задача Коши для системы (2.1), (2.2) при начальных условиях (2.8), (2.11) проинтегрирована во всей области G , занимаемой конструкцией в плане, т. е. всюду в G известны функции α_k , ω_k , то, как показано в [1, 2], при выполнении условий (1.14) уравнение (2.3) является линейным эллиптическим уравнением второго порядка относительно температуры θ , которому соответствуют линейные тепловые граничные условия (2.7). Граничные задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка хорошо изучены в [7].

Если функции α_k , θ ($k = 1, 2$) известны из подсистем (2.1)–(2.3), то подсистема (2.4) является линейной гиперболической системой первого порядка относительно перемещений u_k , причем ее характеристики определяются углами α_k и совпадают с характеристиками системы (2.1), (2.2). Начальными условиями для подсистемы (2.4) являются кинематические граничные условия (2.6), заданные на части контура Γ_u , где по предположению волокна выходят из конструкции. При отсутствии объемных нагрузок и постоянной температуре в конструкции ($b_i = 0$, $\theta = \text{const}$) решение задачи Коши (2.4), (2.6) может быть получено в аналитической форме. Действительно, ранее показано, что при $b_i = 0$ ($i = 1, 2$) характеристики системы (2.1), (2.2), а значит, и системы (2.4) прямолинейны, т. е. $\partial_s(\alpha_k, \alpha_k) = 0$, $k = 1, 2$. Поэтому систему (2.4) при $\theta = \text{const}$ можно записать в форме инвариантов Римана [6] с нулевой правой частью, после чего легко строится решение задачи Коши (2.4), (2.6):

$$u_1 \cos \alpha_k + u_2 \sin \alpha_k - (\varepsilon_k + \alpha_{ak}\theta)(x_1 \cos \alpha_k + x_2 \sin \alpha_k) = u_{10}(s) \cos \alpha_{ku}(s) + \\ + u_{20}(s) \sin \alpha_{ku}(s) - (\varepsilon_k + \alpha_{ak}\theta)[\eta_1(s) \cos \alpha_{ku}(s) + \eta_2(s) \sin \alpha_{ku}(s)], \quad k = 1, 2, \quad (2.12)$$

где $\varepsilon_k + \alpha_{ak}\theta = \text{const}$; $\alpha_{ku}(s)$ — начальные значения функций α_k на контуре Γ_u , известные из решения задачи Коши (2.8)–(2.11); η_k — функции, задающие уравнение Γ_u ($x_k = \eta_k(s)$, $k = 1, 2$). (Так как характеристики системы (2.4) при $b_i = 0$ прямолинейны, то в уравнениях (2.12) имеют место равенства $\alpha_k(x_1, x_2) = \alpha_{ku}(s)$.)

Таким образом, в асимптотическом приближении ($\lambda \rightarrow 0$) решение термоупругой задачи РА сводится к последовательному интегрированию задачи Коши (2.1), (2.2), (2.8),

(2.11), граничной задачи (2.3), (2.7) и задачи Коши (2.4), (2.6). Такое неклассическое сведение граничной задачи РА при $\lambda \rightarrow 0$ к задаче Коши возникает из-за того, что система разрешающих уравнений (1.1)–(1.4) и граничные условия (1.9)–(1.11), (1.13) образуют систему нелинейных уравнений с сингулярным возмущением [8].

Следует отметить, что уравнения (2.1), (2.2), (2.11) (в частности, (2.9)–(2.11)) не содержат температуру θ . Поэтому в асимптотическом приближении (т. е. в рамках нитяной модели) температура влияет только на податливость конструкции (см. (2.4) и (2.12)), но не оказывает влияния на структуру РА. Для того чтобы учесть это влияние, нужно построить более высокие приближения, используя метод малого параметра [8] или следующий итерационный процесс. Пусть $\alpha_k^{(m)}, \omega_k^{(m)}, u_k^{(m)}, \theta^{(m)}$ ($k = 1, 2$) — известные m -е приближения неизвестных функций, тогда $(m+1)$ -е приближение для них получим интегрированием уравнений

$$A_i(\boldsymbol{\omega}^{(r)}, \boldsymbol{\alpha}^{(r)}) = -b_i(\boldsymbol{\omega}^{(r)}) - \lambda B_i(\boldsymbol{\omega}^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)}, \theta^{(m)}), \quad i = 1, 2; \quad (2.13)$$

$$\partial_s(\alpha_k^{(r)}, \omega_k^{(r)}) + \omega_k^{(r)} \partial_n(\alpha_k^{(r)}, \alpha_k^{(r)}) = 0, \quad k = 1, 2; \quad (2.14)$$

$$(\Lambda_{11}^{(r)} \theta_{,1}^{(r)} + \Lambda_{12}^{(r)} \theta_{,2}^{(r)})_{,1} + (\Lambda_{21}^{(r)} \theta_{,1}^{(r)} + \Lambda_{22}^{(r)} \theta_{,2}^{(r)})_{,2} + \mu(\theta_* - \theta^{(r)}) = -Q(\boldsymbol{\omega}^{(r)}); \quad (2.15)$$

$$\partial_s(\alpha_k^{(r)}, u_1^{(r)}) \cos \alpha_k^{(r)} + \partial_s(\alpha_k^{(r)}, u_2^{(r)}) \sin \alpha_k^{(r)} = \varepsilon_k + \alpha_{ak} \theta^{(r)}, \quad k = 1, 2, \quad r = m + 1 \quad (2.16)$$

с граничными условиями

$$C_n(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\omega}^{(r)}) = p_n - \lambda D_n(\boldsymbol{\omega}^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)}, \theta^{(m)}), \quad (2.17)$$

$$C_\tau(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\omega}^{(r)}) = 2p_\tau - \lambda D_\tau(\boldsymbol{\omega}^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)});$$

$$u_i^{(r)}(\Gamma_u) = u_{i0}(s), \quad i = 1, 2; \quad (2.18)$$

$$\chi_0[(\Lambda_{11}^{(r)} \theta_{,1}^{(r)} + \Lambda_{12}^{(r)} \theta_{,2}^{(r)})n_1 + (\Lambda_{21}^{(r)} \theta_{,1}^{(r)} + \Lambda_{22}^{(r)} \theta_{,2}^{(r)})n_2 + q_0] + \chi_1(\theta^{(r)} - \theta_0) = 0; \quad (2.19)$$

$$\omega_k^{(r)}(\Gamma_\omega) = \omega_{0k}(s), \quad k = 1, 2, \quad r = m + 1. \quad (2.20)$$

Для начала итерационного процесса нулевое приближение примем в виде

$$u_i^{(0)} = 0, \quad \theta^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.21)$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\omega}^{(r)}, \mathbf{u}^{(r)}$ — вектор-функции, подобные вектор-функциям в (1.7); выражения для $\Lambda_{ij}^{(r)}$ получаются из (1.8) заменой α_k, ω_k их r -ми приближениями.

Сравнение уравнений и граничных условий итерационного процесса (2.13)–(2.20) с соответствующими уравнениями и граничными условиями (2.1)–(2.8) показывает, что они отличаются лишь возмущенными правыми частями в (2.13), (2.17), причем на первой итерации ($r = 1$) в силу начального приближения (2.21) уравнения (2.1)–(2.8) и (2.13)–(2.20) совпадают. Поэтому все результаты, полученные выше при анализе уравнений (2.1)–(2.8), справедливы для уравнений итерационного процесса (2.13)–(2.20). В частности, итерационный процесс позволяет получить два решения задачи РА; при отсутствии объемных нагрузок ($b_i = 0$) параметры РА и перемещения (при $\theta = \text{const}$) в первом приближении определяются равенствами (2.9)–(2.12). Правые части в (2.13), (2.17) (в отличие от (2.1), (2.5))

зависят от температуры $\theta^{(m)}$, вычисленной на шаге m итерационного процесса. Следовательно, структура РА, определенная с помощью итерационного процесса, будет зависеть от теплового воздействия, оказываемого на конструкцию.

Для проверки сходимости итерационного процесса целесообразно r -е приближения неизвестных функций подставить в систему разрешающих уравнений (1.1)–(1.4) и соответствующие ей граничные условия (1.9)–(1.11), (1.13) и определить возникающие невязки. Невязки возникают лишь в уравнениях (1.1) и граничных условиях (1.9) и имеют вид

$$\begin{aligned}\delta_i^{(r)} &= \lambda[B_i(\boldsymbol{\omega}^{(r)}, \mathbf{u}^{(r)}, \theta^{(r)}) - B_i(\boldsymbol{\omega}^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)}, \theta^{(m)})], \quad i = 1, 2, \\ \delta_n^{(r)} &= \lambda[D_n(\boldsymbol{\omega}^{(r)}, \mathbf{u}^{(r)}, \theta^{(r)}) - D_n(\boldsymbol{\omega}^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)}, \theta^{(m)})], \\ \delta_\tau^{(r)} &= \lambda[D_\tau(\boldsymbol{\omega}^{(r)}, \mathbf{u}^{(r)}) - D_\tau(\boldsymbol{\omega}^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})], \quad r = m + 1.\end{aligned}\tag{2.22}$$

3. Анализ некоторых решений термоупругой задачи РА. Рассмотрим удлиненную прямоугольную пластину единичной ширины, ориентированную вдоль оси Ox_2 . В предположении, что в продольном направлении нагрузка, тепловое воздействие, закрепление и армирование конструкции не меняются и локальными торцевыми эффектами можно пренебречь, решение задачи РА будет зависеть только от переменной x_1 . Будем считать, что пластина равномерно нагрета или охлаждена ($\theta = \text{const}$, $Q = 0$, $\mu = 0$), тогда, если проинтегрировать уравнения (1.1), (1.2), получим следующую систему разрешающих уравнений, описывающую термоупругую задачу РА:

$$\lambda a_1 \left(1 - \sum_k \omega_k\right) (\varepsilon_{11} - \alpha_c \theta / a_2) + \sum_k \sigma_k \omega_k \cos^2 \alpha_k = P_1(x_1),\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\lambda a_2 \left(1 - \sum_k \omega_k\right) \varepsilon_{12} + \sum_k \sigma_k \omega_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k &= P_2(x_1); \\ \omega_k \cos \alpha_k &= \omega_{k^*} = \text{const}, \quad k = 1, 2;\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha_k + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha_k = \varepsilon_k + \alpha_{ak} \theta = \text{const}, \quad k = 1, 2,\tag{3.3}$$

где $P_i(x_1) = p_i - \int_0^{x_1} b_i(s) ds$, $i = 1, 2$; $p_1 = p_n$, $p_2 = p_\tau$; ω_{k^*} — постоянные интегрирования,

имеющие смысл суммарной площади поперечных сечений арматуры k -го семейства, пересекающей площадку единичной (вдоль x_2) длины и ортогональной к направлению x_1 (ω_{k^*} можно задавать вместо ω_{0k} в (1.13)); на кромке $x_1 = 0$ заданы статические граничные условия (1.9), а на кромке $x_1 = 1$ пластина жестко закреплена. Уравнение теплопроводности (1.4) при $\theta = \text{const}$, $Q = 0$, $\mu = 0$ выполняется тождественно, поэтому оно исключено из рассмотрения. Кроме того, для упрощения предполагается, что приведенная нагрузка b_i не зависит от интенсивности армирования ω_k , что имеет место при $b_i = F_{ci} = F_{ki}$, $i, k = 1, 2$ (см. (1.1)). Эти равенства выполняются при действии распределенных поверхностных нагрузок, возникающих, например, при обтекании пластины вязкой жидкостью.

Систему (3.1)–(3.3) можно преобразовать, исключив из (3.1) с учетом (3.2), (3.3) функции ω_k , ε_{11} , ε_{12} . В результате получим систему трансцендентных уравнений, определяющих в каждой точке x_1 две неизвестные $\alpha_k(x_1)$, $k = 1, 2$.

Предположим, что нагрузка в продольном направлении x_2 отсутствует ($p_\tau = 0$, $b_2 = 0$). В этом случае в конструкцию целесообразно внедрить волокна двух семейств, изготовленных из одного материала ($\sigma_2 = \sigma_1$, $E_2 = E_1$, $\alpha_{a2} = \alpha_{a1}$) и уложенных с одинаковой интенсивностью ($\omega_2 = \omega_1$) симметрично относительно направления x_1 ($\alpha_2 = -\alpha_1$).

Функция	Упругая задача ($\theta = 0$)			Термоупругая задача ($\theta = 4$)		
	$\lambda = 0$	$\lambda = 0,01$	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0,01$	$\lambda = 0,1$
α_1	0,615 48	0,627 29	0,757 50	0,615 48	0,590 61	0,251 00
ε_{11}	1,5000	1,5256	1,8943	2,1000	2,0293	1,4920

Такой выбор структуры армирования позволяет исключить из рассмотрения сдвиговые деформации ($\varepsilon_{12} = 0$). При этом второе уравнение в (3.1) выполняется тождественно, а из первого, используя (3.2), (3.3), можно исключить ω_k , ε_{11} :

$$\lambda a_1(1 - 2\omega_{1^*}/g)[(\varepsilon_1 + \alpha_{a1}\theta)/g^2 - \alpha_c\theta/a_2] + 2\sigma_1\omega_{1^*}g = P_1(x_1), \quad g = \cos \alpha_1(x_1). \quad (3.4)$$

Умножением на g^3 уравнение (3.4) сводится к алгебраическому уравнению четвертого порядка относительно g , коэффициенты которого зависят от θ и ω_{1^*} . Следовательно, уравнение (3.4), а значит, и рассматриваемая термоупругая задача РА могут иметь до четырех решений, каждое из которых параметрически зависит от уровня теплового воздействия θ и количества арматуры, внедряемой в конструкцию (от ω_{1^*}).

Если уравнение (3.4) рассмотреть на кромке $x_1 = 0$ и вместо ω_{1^*} задать граничное условие (1.13), то (3.4) принимает вид

$$\lambda a_1(1 - 2\omega_{01})[(\varepsilon_1 + \alpha_{a1}\theta)/g^2 - \alpha_c\theta/a_2] + 2\sigma_1\omega_{01}g^2 = p_n. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) будет определять структуру РА во всех точках пластины, если $b_1(x_1) = 0$. Умножением на g^2 уравнение (3.5) сводится к биквадратному уравнению относительно g . Очевидно, что из всех действительных корней уравнений (3.4), (3.5) решениями задачи РА будут только те, которые удовлетворяют неравенствам $0 \leq g = \cos \alpha_1 \leq 1$ (отрицательные значения g исключаются из рассмотрения в силу предположения о том, что волокна входят в пластину на кромке $x_1 = 0$) и физическим ограничениям (1.14).

В таблице приведены значения неизвестных функций, определяющих решение упругой ($\theta = 0$) и термоупругой ($\theta = 4$) задач РА удлиненной прямоугольной пластины при различных λ и следующих входных данных: $\nu = 0,3$, $E_1 = \sigma_1 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$, $p_n = 0,4$, $p_\tau = 0$, $\alpha_c = 1$, $\alpha_{a1} = 0,1$, $\omega_{01} = 0,3$. Значения, приведенные в таблице, получены из решения уравнения (3.5). Второе решение задачи РА, соответствующее второму корню уравнения (3.5), имеет особенность типа $\alpha_1 \rightarrow \pi/2$, $|\varepsilon_{11}| \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$ и в данной работе не рассматривается.

Из таблицы следует, что при использовании высокомодульной арматуры ($\lambda \approx 0,01$) решения упругой и термоупругой задач РА отличаются от решений в асимптотическом приближении ($\lambda \rightarrow 0$) не более чем на 5%. Поэтому в случае высокомодульной арматуры в качестве приближенного решения задачи РА можно использовать решение, построенное на основе нитяной модели механического поведения армированного слоя ($\lambda = 0$).

Кроме того, как отмечалось в п. 2 и как следует из таблицы, в асимптотическом приближении структуры РА в случае упругой и термоупругой задач совпадают, поэтому если при $\lambda \approx 0,01$ требуется определить только структуру РА (без определения деформативности конструкции и поля температур в ней), то достаточно ограничиться решением задачи Коши (2.1), (2.2), (2.8), (2.11). Следовательно, в этом случае можно пренебречь влиянием теплового воздействия на структуру РА.

Рассмотрим примеры РА кольцевых пластин при равномерном охлаждении и нагреве. Кольцевая пластина ограничена двумя окружностями радиусов r_0 , r_1 ($r_0/r_1 = 0,5$). К внутреннему контуру Γ_p приложено равномерное давление $p_n = 0,5$ ($p_\tau = 0$), а на внешнем контуре Γ_u пластина жестко закреплена. Распределенные нагрузки отсутствуют, конструкция равномерно охлаждена: $\theta = -2$. В силу симметрии конструкции и отсутствия

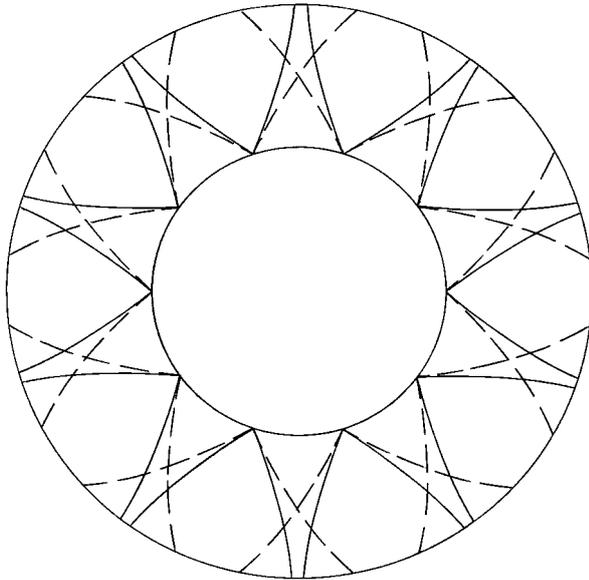


Рис. 1

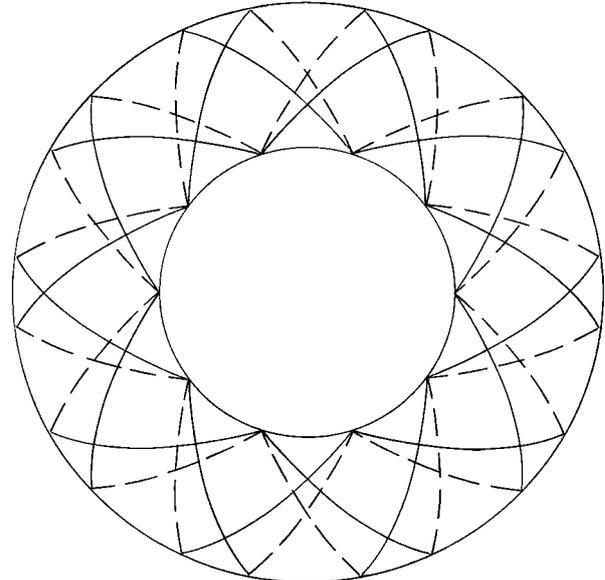


Рис. 2

окружных нагрузок в пластину целесообразно внедрять два семейства арматуры, изготовленных из одного материала ($\sigma_1 = \sigma_2 = E_1 = E_2 = 1$, $\alpha_{a1} = \alpha_{a2} = 1,5$; $\lambda = 0,1$, $\nu = 0,25$, $\alpha_c = 1$) и уложенных радиально-симметрично с одинаковой интенсивностью ($\omega_2(r) = \omega_1(r)$). Это позволит исключить сдвиговые деформации ($\varepsilon_{r\varphi} = 0$). На рис. 1 сплошными линиями показана структура РА, соответствующая этой термоупругой задаче при граничных условиях $\omega_k(\Gamma_p) = 0,4$ ($k = 1, 2$), штриховыми — структура РА конструкции, не подверженной тепловому воздействию. Сравнение проектов армирования, приведенных на рис. 1, показывает, что охлаждение пластины приводит к сгущению траекторий армирования (количество волокон k -го семейства, входящих в конструкцию на отрезке контура Γ_p единичной длины, определяется произведением $\omega_k(\Gamma_p) \cos(\alpha_k(\Gamma_p) - \beta)$ [3] или величиной ω_{k*} в (3.2)), но длина волокон при этом уменьшается, вследствие чего общий расход материала волокон уменьшается на 4%. При более интенсивном охлаждении пластины на внешнем контуре волокна разных семейств касаются друг друга ($\alpha_1 = \alpha_2$), что приводит к возникновению точек возврата траекторий армирования.

На рис. 2 сплошными линиями показан проект РА, полученный для описанной выше конструкции, но равномерно нагретой до температуры $\theta = 1,2$. Нагрев пластины вызывает существенное изменение структуры РА по сравнению со структурой упругого проекта (штриховые линии), причем кривизна траекторий армирования увеличивается, сохраняя тот же знак, что и в упругом случае. Кривизны траекторий армирования проекта в случае охлаждения пластины и упругого проекта имеют противоположные знаки (см. рис. 1). Более интенсивный нагрев пластины приводит к тому, что кривизна траекторий армирования еще больше увеличивается по модулю, и при некотором предельном значении температуры на внешнем контуре происходит нарушение второго условия в (1.14), т. е. при реализации такого проекта волокна будут выпучиваться из плоскостей армирования.

Траектории РА, изображенные на рис. 1, 2, результаты, приведенные в таблице, и серии расчетов, проведенных авторами, показывают, что если коэффициенты линейного теплового расширения волокон больше соответствующего коэффициента связующего, то при совпадении знака температуры со знаком напряжения в волокнах траектории РА разреживаются, в противном случае сгущаются. Если указанные коэффициенты волокон меньше коэффициента связующего (см. таблицу), то при совпадении знаков температуры и напряжения в волокнах траектории РА сгущаются, в противном случае разреживаются.

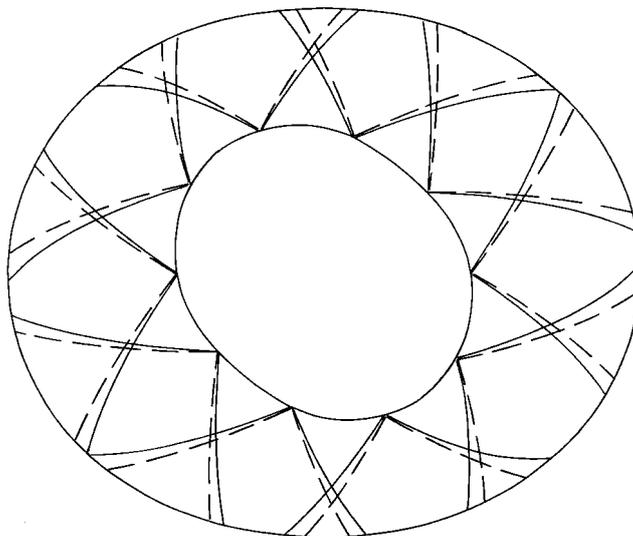


Рис. 3

Рассмотрим неосесимметричную термоупругую задачу РА. Пусть плоская конструкция ограничена двумя контурами Γ_p и Γ_u , задаваемыми в полярной системе координат уравнениями $r(\varphi) = 0,5 - 0,05 \sin 2\varphi$ и $r(\varphi) = 1 + 0,08 \cos 2\varphi$ соответственно. К внутреннему контуру Γ_p приложена равномерная нормальная нагрузка $p_n = 0,5$ ($p_\tau = 0$), а по внешнему контуру Γ_u конструкция жестко закреплена. Объемные нагрузки отсутствуют, пластина равномерно нагрета до температуры $\theta = 2$. Механические характеристики фаз композиции такие же, как и в примерах, рассмотренных выше, за исключением $\lambda = 0,05$. Краевые условия для интенсивностей армирования заданы на внутреннем контуре: $\omega_{0k}(\varphi) = 0,4$, $k = 1, 2$. На рис. 3 сплошными линиями показана структура РА, соответствующая этой неосесимметричной задаче и полученная при помощи итерационного процесса (2.13)–(2.21), штриховыми — структура упругого проекта ($\theta = 0$).

Так как в рассматриваемом примере $\lambda \approx 0,01$, то, как и следовало ожидать, структура РА в термоупругом случае незначительно отличается от структуры РА упругого проекта. Таким образом, при определении структуры РА в случае использования высоко модульной арматуры ($\lambda \approx 0,01$) тепловое воздействие можно не учитывать, так как при этом термоупругий проект РА незначительно отличается от соответствующего упругого. Однако даже при $\lambda \approx 0,01$ температура существенно влияет на деформативность конструкции и напряженно-деформированное состояние в связующем. Так, в последнем примере (см. рис. 3) максимальное значение интенсивности напряжений в связующем в нагретой конструкции в 2,41 раза больше, чем в ненагретой ($\theta = 0$). Эти результаты подтверждаются данными, приведенными в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** О некоторых свойствах решений плоских термоупругих задач рационального армирования композитных конструкций // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 2. С. 312–321.
2. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Теплопроводность волокнистых оболочек // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5, № 2. С. 215–235.
3. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиц. материалов и конструкций. 1997. Т. 3, № 2. С. 20–40.

4. **Джураев Т. Д.** Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
5. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Об одной задаче целевого управления структурами армирования термоупругих плоских композитных конструкций // Механика композиц. материалов и конструкций. 1998. Т. 4, № 3. С. 9–27.
6. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
7. **Бицадзе А. В.** Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
8. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 31/V 2000 г.
