

С другой стороны, учет инерционного члена $\propto V_i$ в уравнении (3.5) позволяет решать задачу (3.5)—(3.11) при произвольных начальных данных. Однако при малых κ информация о начальном поле скоростей (но не о начальном профиле пленки) в процессе движения быстро забывается.

Автор выражает благодарность доктору Г. К. Моффату, работа которого [2] явилась стимулом для написания данной работы.

Поступила 17^{го} XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Солонников В. А. Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975, с. 182—197.
2. Moffat H. K. Syrup rings on a rotating roller. Preprint of Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics of Cambridge University. Cambridge, 1975, p. 1—27.
3. Пухначев В. В. Переменные Мизеса в задачах со свободной границей для уравнений Навье — Стокса.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 240, № 2, с. 298—301.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
5. Солонников В. А., Шадилов В. Е. Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье — Стокса.— «Труды МИ АН СССР», 1973, т. 125, с. 196—210.
6. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. М., ИЛ, 1962.
7. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. П. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.

УДК 532.526

ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ГРАДИЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРЕДОТРЫВНЫХ ОБЛАСТЯХ И НА ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Н. Долгов, В. М. Шулемович

(Новосибирск)

Существующие конечно-разностные методы расчета турбулентного пограничного слоя, в которых для замыкания системы уравнений используются различные модификации турбулентной вязкости (длины пути смешения), приводят для сильно неравновесных (близких к отрыву) течений к большим отличиям расчетных и экспериментальных данных [1—3]. Одной из причин наблюдаемых расхождений, по-видимому, является тот факт, что существующие модели турбулентной вязкости содержат недостаточную информацию о предыстории течения. В частности, соотношение для турбулентной вязкости во внешней части пограничного слоя [2] или, например, зависимость, используемая в [4],

$$(1) \mu_t = \rho(\lambda y_e)^2 |\partial u / \partial y|$$

в явном виде, совсем не зависят от предыстории. Величина λ в (1) постоянна и обычно принимается равной 0,09.

В результате обработки опытов Гольдберга [3], Шубауэра и Спэнденберга [1] было показано, что во внешней части пограничного слоя численное значение λ может изменяться приблизительно от 0,045 до 0,090, т. е. $\lambda \neq \text{const}$ вдоль линии тока. В то же время, как будет показано ниже, величина λ может оказать большое влияние на наполненность профиля и интегральные характеристики слоя.

В работах [4, 5] для определения характеристик пограничного слоя в предотрывных областях предлагаются различные формы безразмерных «универсальных» профилей скорости, соответствие с опытами достигается введением эмпирических коэффициентов в соотношения для профилей скорости.

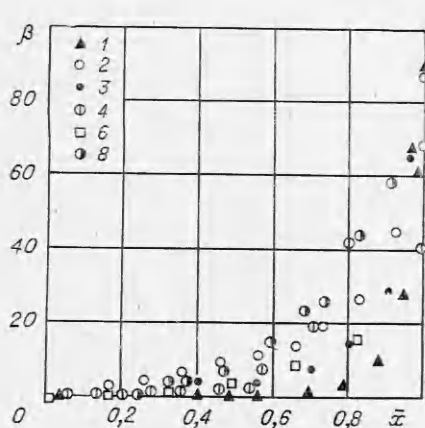
В данной работе произведен анализ большого числа экспериментальных работ Перри (2900), Шубауэра и Клебанова (2100), Ньюмана (3500), Мозеса (3700, 3800), Шубауэра и Спэнденберга (4500, 4800), Фрезера (5000, 5100), в которых реализовались течения с сильным градиентом давления, приводящие в ряде случаев к отрыву пограничного слоя (цифры в скобках после фамилий экспериментаторов в точности соответствуют номерам названных опытов в работе [1]). На основе этого анализа можно отметить некоторые характерные для предотрывных течений закономерности. Во-первых, градиент скорости внешнего течения (du_∞/dx) при приближении к отрыву стремится к нулю. Это обстоятельство приводит к тому, что расчетные методы при обычных соотношениях для замыкания уравнений турбулентного пограничного слоя, по-видимому, не реагируют на приближение отрыва и определяют характеристики слоя, соответствующие течению на пластине. Во-вторых, течение в предотрывной области становится существенно неравновесным и сопровождается резким увеличением (фиг. 1) параметра равновесия Клаузера

$$(2) \quad \beta = (\delta_1/\tau_w) dp/dx,$$

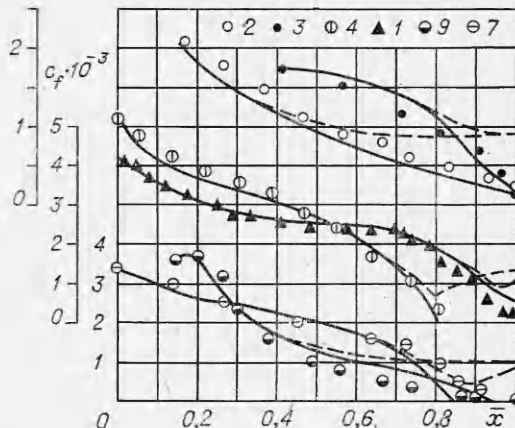
где δ_1 — толщина вытеснения; τ_w — напряжение трения на стенке; dp/dx — градиент давления; x — продольная координата, $\bar{x} = x/x_{\text{max}}$.

На фиг. 1—4 условные обозначения экспериментальных точек 1—9 соответствуют номерам опытов, представленных в работе [1]: 1 — 2500; 2 — 2900; 3 — 3500; 4 — 3700; 5 — 3800; 6 — 4500; 7 — 4800; 8 — 5000; 9 — 5100.

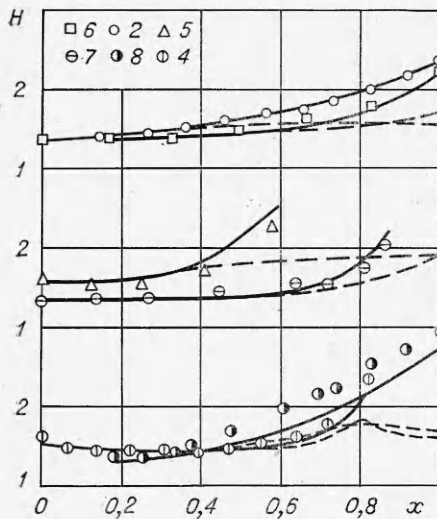
На основе указанных фактов можно предположить, что вместо λ в (1) более целесообразно применять зависимость вида $\lambda = \lambda(\text{Re}_\infty, \delta/R, \zeta d\beta/dx)$,



Ф и г. 1



Ф и г. 2



Фиг. 3

где Re_2 — число Рейнольдса, построенное по толщине потери импульса; δ — толщина пограничного слоя; R — текущий радиус тела; ξ — характерный линейный размер. Для проверки этого предположения на базе работы [6] была создана программа конечно-разностного расчета турбулентного пограничного слоя, о которой необходимо сделать несколько замечаний. Составление конечно-разностного уравнения было произведено аналогично [6] интегрированием по контрольному объему — приемом, предложенным ранее в работе [7].

Для расчета пограничного слоя на шероховатых поверхностях соотношение для суммарной вязкости вблизи стенки [6] обобщено с использованием подхода работы [8], где

рассматривались бугорки шероховатости как «генераторы вихрей», и имеет вид

$$(3) \quad \mu_{\Sigma} = \mu + \rho k^2 y^2 \left\{ 1 - \exp \left[-y \sqrt{\tau_w} / (\mu A) \right] + \exp \left[-A_r y \sqrt{\tau_w} / (A h) \right] \right\}^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|,$$

где μ — коэффициент динамической вязкости; ρ — плотность; $k = 0,40$; y — расстояние от стенки по нормали к поверхности; τ — касательное напряжение поперек пограничного слоя; h — высота бугорков шероховатости; u — продольная составляющая скорости; A_r зависит от формы и расположения бугорков шероховатости. Выбор соотношения для A сделан на основе работы [9] в виде

$$(4) \quad A = 13,6 + 12,4 \exp[-10,75(\rho v)_w / (\rho v_*)],$$

где $(\rho v)_w$ — поток массы на проницаемой стенке; $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$. Контрольные обсчеты экспериментов [9] для максимальных вдувов и отсосов с использованием (4), выполненные по данной программе, показали хорошее совпадение с результатами опытов. В [6] принимали величину $A = 26$, что приводит к значительному расхождению расчета с экспериментальными данными [9].

В работе [6] граничное условие для конечно-разностного уравнения и местный коэффициент трения c_f определялись с использованием аппроксимационных соотношений, полученных ее авторами на основе параметрических расчетов куэттовского течения вблизи стенки. Эти соотношения в [6] распространялись вплоть до «логарифмической» части профиля скорости, что в ряде случаев не позволяло произвести расчет течений с сильными градиентами давления и отсосами. С целью увеличения точности расчета и преодоления указанных затруднений был введен итерационный процесс счета, и конечно-разностное уравнение решалось совместно с обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(5) \quad \frac{du_+}{dy_+} = \frac{2\tau_+}{1 + \sqrt{1 + 4y_+^2 \tau_+ \left\{ 1 - \exp(-y_+ \sqrt{\tau_+} / A_+) + \exp[-A_r y_+ \sqrt{\tau_+} / (A h_+)] \right\}^2}},$$

где

$$(6) \quad \begin{aligned} \tau_+ &= (1 + p_+ y_+ + m_+ u_+) / (1 + y_+ \cos \alpha / R_+); \\ u_+ &= ku/v_*; \quad y_+ = ky_0 v_* / \mu; \quad p_+ = \mu (dp/dx) / (k\rho^2 v_*^3); \\ m_+ &= m_w / (k\rho v_*); \quad R_+ = y_+ |_{y=R}; \quad h_+ = y_+ |_{y=h}; \quad A_+ = kA \end{aligned}$$

(α — местный угол наклона поверхности к оси симметрии). Уравнение (4) распространялось до безразмерного расстояния $y_+ = 1,4$, т. е. справедливо только в непосредственной близости стенки. Соотношение (6) получено разложением в ряд Маклорена касательного напряжения в окрестности стенки с использованием уравнения движения и условия прилипания. На основе численных расчетов по изложенной методике и сравнения с экспериментальными данными [1] для плоского и осесимметричного случаев, в которых реализовались течения, близкие к отрыву, установлена зависимость для коэффициента λ в соотношении (1) в виде

$$(7) \quad \lambda = 0,09 / (1 + cF),$$

где $c = 0,011 \sqrt{\text{Re}_2} / (1 + \delta_2 \cos \alpha / R)^2$; $F = \delta_2 |d\beta/dx|$ — формпараметр, характеризующий степень неравномерности течения; δ_2 — толщина потери импульса.

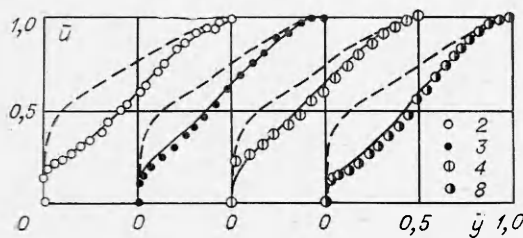
Формула (7) справедлива для $\lambda \geq 0,045$. В том случае, когда функция справа в (7) становится меньше 0,045, принималось, что $\lambda = 0,045$. Таким образом, соотношение для турбулентной вязкости во внешней части пограничного слоя можно представить в виде

$$(8) \quad \mu_T = \rho [0,09 y_l / (1 + cF)]^2 |\partial u / \partial y|,$$

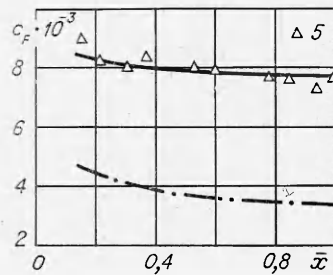
где y_l — расстояние от стенки, на котором $u/u_\delta = 0,995$.

На фиг. 2—4 представлены результаты сравнения расчетных и экспериментальных данных для коэффициентов трения, формпараметров и безразмерных профилей скорости, где сплошная линия соответствует расчету с использованием μ_T , определяемой по соотношению (8), штриховая — по (1) с $\lambda = 0,09$, $H = \delta_1 / \delta_2$, $\bar{u} = u/u_\delta$, $\bar{y} = y/\delta$. Профили скорости на фиг. 4 соответствуют продольной координате $\bar{x} \approx 1$.

Анализ представленных данных указывает на ряд характерных особенностей расчета турбулентного пограничного слоя, когда для замыкания уравнений использовалось соотношение (1) с $\lambda = 0,09$ и λ , согласно (7). Прежде всего нужно отметить, что применение $\lambda = 0,09$ не давало «расчетного» отрыва, реализовавшегося в ряде опытов, с которыми было проведено сравнение. Во всей предотрывной области течения расчет приводил к систематическому завышению величин c_f , значительному заниже-



Фиг. 4



Фиг. 5

нию формпараметров H и существенному наполнению профилей скорости по сравнению с наблюдаемыми в экспериментах. Величина β в расчетах практически не изменялась. Таким образом, расчетное течение в пограничном слое становится квазиравновесным и не соответствует физике явления.

В то же время использование соотношения (8) позволяло получить отрыв, координата которого удовлетворительно коррелировала с данными опытов. В программе отрыв фиксировался, когда расчетное значение $c_f \rightarrow 0$. Для областей, близких к отрыву, численные значения c_f , H и наполненность профилей скорости в координатах $\bar{u} = \bar{u}(\bar{y})$ достаточно хорошо соответствовали аналогичным экспериментальным характеристикам пограничного слоя. При этом наблюдается, как и в опытах, резкое увеличение параметра равновесия β .

Таким образом, более быстрое, по сравнению с общепринятым, уменьшение вдоль линии тока турбулентной вязкости, соответствующей соотношению (8), которое учитывает степень неравновесности течения, приводит к значительному улучшению совпадения расчетных и опытных данных. Следовательно, соотношение (8), по-видимому, позволяет более удовлетворительно описать процесс турбулентного переноса во внешней части пограничного слоя для областей, близких к отрыву.

Возможность численного расчета турбулентного пограничного слоя на шероховатых поверхностях проверена с использованием соотношения (3). В качестве примера рассмотрено течение на шероховатой нити с удлинением $x_{\max}/2R = 1740$, $R = 1$ мм, $h = 0,085$ мм при скорости воздуха $u_0 = 35$ м/с. Величина A_r в формуле для турбулентной вязкости (3) принималась равной 26. На фиг. 5 представлены результаты сравнения расчетных значений среднего коэффициента трения c_F (сплошная линия соответствует течению на нити, штрихпунктирная — на шероховатой пластине) с опытными данными [10]. Видно, что совпадение теоретических и экспериментальных величин удовлетворительное. Следовательно, подход работы [6], где рассматривались бугорки шероховатости как «генераторы вихрей», применительно к конечно-разностному методу расчета характеристик турбулентного пограничного слоя является приемлемым.

Поступила 26 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Computation of Turbulent Boundary Layers.** Proceedings of conference. 1968, Stanford. Vol. 1, 2. California, Stanford University, 1969.
2. **Klebanoff P. S.** Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. NACA Tech. Note, 1954, N 3178.
3. **McDonald H., Camarata F. J.** An extended mixing length approach for computing the turbulent boundary layer development.— In: Computation of Turbulent Boundary Layers. Proceedings of conference. 1968. Stanford. Vol. 1. California, Stanford University, 1969, p. 83—98.
4. **Galbraith R. A. McD. Head M. R.** Eddy viscosity and mixing length from measured boundary layer developments.— «Aeron. Quart.», 1975, vol. 26, p. 2.
5. **Abbot D. E., Walker J. D. A., York B. E.** Numerical solution of turbulent boundary layers approaching separation.— In: Lecture Notes in Physics. Vol. 35. Berlin — Heidelberg — New York, Springer — Verlag, 1975.
6. **Патанкар С., Сполдинг Д.** Тепло- и массообмен в пограничных слоях. М., «Энергия», 1971.
7. **Марчук Г. И.** Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
8. **Drist V.** On turbulent flow near a wall.— «J. Aeron. Sci.», 1956, vol. 23, N 11.
9. **Rotta J. C.** Control of turbulent boundary layers by uniform injection and suction of fluid.— In: Jahrbuch, Deutsche Gesellschaft für Luft- and Raumfahrt E. V. (DGLR). Köln, 1970.
10. **Шулемович В. М.** Экспериментальное исследование турбулентного пограничного слоя на длинной шероховатой нити.— «Инж.-физ. журн.», 1975, № 5.