

УДК 532.72;669.015.23

## ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ И ВДУВА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВВЕРХ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Р. Мутукумарасвами, П. Ганесан\*

Инженерный колледж Шри Венкатесвара, 602105 Шриперумбудур, Индия

\* Университет Анна, 600025 Ченнай, Индия

Численно исследован нестационарный режим обтекания полубесконечной изотермической пластины несжимаемой вязкой жидкостью в условиях естественной конвекции. Решение получено с учетом гомогенной химической реакции первого порядка и подвода массы через пластину. Полученный в расчетах профиль скорости хорошо согласуется с известным точным решением. Представлены профили скорости, температуры и концентрации. Показано, что скорость жидкости уменьшается при увеличении параметра химической реакции. Проанализированы распределения местных и осредненных значений поверхностного трения, чисел Нуссельта и Шервуда.

**Введение.** Существует ряд природных и промышленных процессов, в которых тепло-массоперенос является следствием эффектов плавучести, обусловленных диффузией тепла и химических компонентов. Исследование подобных течений полезно для совершенствования ряда химических технологий, таких как вытяжка волокна, выращивание монокристаллов методом вытягивания и производство полимеров.

В [1] получено точное решение уравнения Навье — Стокса для случая обтекания бесконечной горизонтальной пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости после приведения пластины в движение. Следуя анализу, проведенному Стоксом [1], в работе [2] приведено точное решение задачи о вязком обтекании бесконечной изотермической вертикальной пластины после приведения ее в движение. Аналогичная задача для случая обтекания бесконечной изотермической вертикальной пластины с массопереносом решена в [3]. В [4] указанная проблема проанализирована численно. В этой работе пластина предполагалась полубесконечной, и определяющие уравнения (в безразмерном виде) решались с использованием неявной конечно-разностной схемы типа Кранка — Николсона. В [5, 6] выполнен анализ процесса массопереноса при нестационарном обтекании бесконечной изотермической вертикальной пластины с однородным вдувом массы с использованием обычной методики преобразования Лапласа. В [6] исследовано влияние гомогенной химической реакции первого порядка на процесс нестационарного обтекания бесконечной вертикальной пластины с постоянным тепло-массопереносом.

Тем не менее проблема нестационарной естественной конвекции вблизи полубесконечной вертикальной пластины с учетом химической реакции изучена недостаточно. В настоящей работе эта задача решается с использованием неявной конечно-разностной схемы Кранка — Николсона.

**1. Определяющее уравнение и математическая постановка.** Рассматривается обтекание вязкой несжимаемой жидкостью полубесконечной изотермической вертикальной пластины с массоподводом при ее движении из состояния покоя. Предполагается, что влияние вязкой диссипации в уравнении энергии пренебрежимо мало и идет химическая реакция между диффундирующими компонентами и жидкостью. Ось  $x$  направлена вдоль

полубесконечной пластины вертикально вверх, ось  $y$  — по нормали к пластине. В начальный момент времени пластина и жидкость имеют одинаковую температуру, а концентрация однородна. При  $t' > 0$  пластина начинает двигаться вертикально вверх с постоянной скоростью  $u_0$  в направлении, противоположном гравитационному полю. В результате гомогенной химической реакции первого порядка температура и концентрация продуктов реакции вблизи пластины повышаются.

С учетом сделанных допущений нестационарное обтекание полубесконечной вертикальной пластины описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T' - T'_\infty) + g\beta^*(C' - C'_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial C'}{\partial t'} + u \frac{\partial C'}{\partial x} + v \frac{\partial C'}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} - K_l C'. \end{aligned} \quad (1)$$

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} t' \leq 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty, \quad C' = C'_\infty, \\ t' > 0: \quad u = u_0, \quad v = 0, \quad T' = T'_w, \quad \frac{\partial C'}{\partial y} = -\frac{j''}{D} \quad \text{при } y = 0, \\ u = 0, \quad T' = T'_\infty, \quad C' = C'_\infty \quad \text{при } x = 0, \\ u \rightarrow 0, \quad T' \rightarrow T'_\infty, \quad C' \rightarrow C'_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

При введении безразмерных величин

$$\begin{aligned} X = \frac{xu_0}{\nu}, \quad Y = \frac{yu_0}{\nu}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0}, \quad t = \frac{t'u_0^2}{\nu}, \\ T = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty}, \quad \text{Gr} = \frac{\nu g\beta(T'_w - T'_\infty)}{u_0^3}, \quad C = \frac{C' - C'_\infty}{j''\nu/(Du_0)}, \quad \text{Gc} = \frac{g\beta^*\nu^2 j''}{Du_0^4}, \\ \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D}, \quad K = \frac{\nu K_l}{u_0^2} \end{aligned}$$

уравнения (1) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \text{Gr} T + \text{Gc} C + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Sc}} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} - KC. \end{aligned} \quad (2)$$

Соответствующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} t \leq 0: \quad U = 0, \quad V = 0, \quad T = 0, \quad C = 0, \\ t > 0: \quad U = 1, \quad V = 0, \quad T = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial Y} = -1 \quad \text{при } Y = 0, \\ U = 0, \quad T = 0, \quad C = 0 \quad \text{при } X = 0, \\ U \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0, \quad C \rightarrow 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

**2. Процедура решения.** Нестационарные нелинейные связанные уравнения (2) с условиями (3) решаются с использованием неявной конечно-разностной схемы Кранка — Николсона.

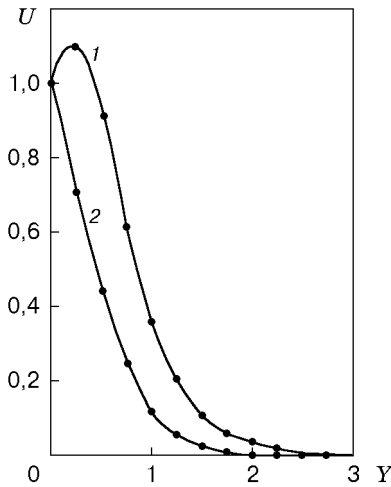


Рис. 1

Рис. 1. Профили скорости в отсутствие реакции ( $Pr = 0,71$ ,  $t = 0,2$ ,  $K = 0$ ):

сплошные линии — результаты настоящей работы, точки — данные [5]; 1 —  $Gr = 5$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 0,24$ ; 2 —  $Gr = 0,4$ ,  $Gc = 0,2$ ,  $Sc = 1$

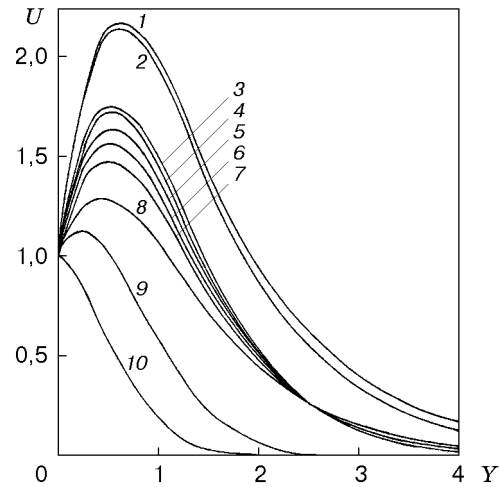


Рис. 2

Рис. 2. Нестационарные профили скорости при  $X = 1$  ( $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Pr = 0,71$ ):

1 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 0,16$ ,  $t = 0,78$ ; 2 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 0,16$ ,  $t = 4,2$  (стационарный режим); 3 —  $K = -2$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $t = 0,82$ ; 4 —  $K = -2$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $t = 6,1$  (стационарный режим); 5 —  $K = -1$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $t = 6,7$  (стационарный режим); 6 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $t = 11,6$  (стационарный режим); 7 —  $K = 2$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $t = 12,7$  (стационарный режим); 8 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 2$ ,  $t = 13,7$  (стационарный режим); 9 —  $K = -2$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $t = 0,3$ ; 10 —  $K = -2$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $t = 0,15$

Рассматривается прямоугольная область интегрирования со сторонами  $X_{\max} = 1$  и  $Y_{\max} = 16$ , где  $Y_{\max}$  соответствует  $Y = \infty$ . Значение  $Y_{\max}$  заведомо находится вне пограничных слоев (динамического, теплового и концентрационного) и выбрано после предварительных расчетов, с тем чтобы два последних граничных условия (3) удовлетворялись с погрешностью не более  $10^{-5}$ . После вариации размер сетки был выбран равным  $\Delta X = 0,05$  и  $\Delta Y = 0,25$ , шаг по времени  $\Delta t = 0,01$ .

Расчеты проводятся до выхода на стационарный уровень. Предполагается, что стационарное решение достигнуто, когда разность значений  $U$ , а также температуры  $T$  и концентрации  $C$  на двух последовательных шагах по времени становится меньше  $10^{-5}$  во всех точках сетки.

Локальная погрешность “обрезания”  $O(\Delta t^2 + \Delta Y^2 + \Delta X)$  стремится к нулю, когда  $\Delta t$ ,  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  стремятся к нулю. Следовательно, схема совместимая. Конечно-разностная схема безусловно стабильна, как показано в [4]. Стабильность и совместимость обеспечивают сходимость.

**3. Результаты и обсуждение.** С целью проверки точности расчетов данные настоящего исследования сравниваются с известным точным решением [5] для случая  $K = 0$ . Наблюдается хорошее соответствие сравниваемых данных (рис. 1). Значения  $K > 0$  соответствуют реакции разложения,  $K < 0$  — реакции образования.

Профили скорости в нестационарном режиме при различных значениях параметра химической реакции и числа Шмидта показаны на рис. 2 (сечение  $X = 1$ ). Видно, что при  $Pr = 0,71$ ,  $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 0,6$  и  $K = -2$  скорость увеличивается со временем, достигает максимума при  $t = 0,82$  и принимает стационарное значение при  $t = 6,1$ . Скорость растет в случае реакции образования и уменьшается при протекании реакции

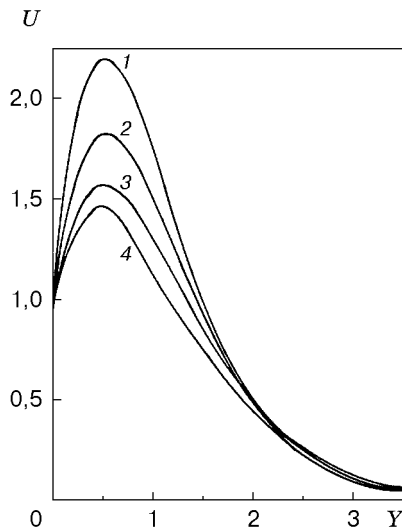


Рис. 3

Рис. 3. Стационарные профили скорости при  $X = 1$  ( $Sc = 0,6$ ,  $K = 0,2$ ):

1 —  $Gr = 5$ ,  $Gc = 10$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $t = 7,1$ ; 2 —  $Gr = 5$ ,  $Gc = 5$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $t = 7,4$ ; 3 —  $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $t = 11,6$ ; 4 —  $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Pr = 7$ ,  $t = 10,3$

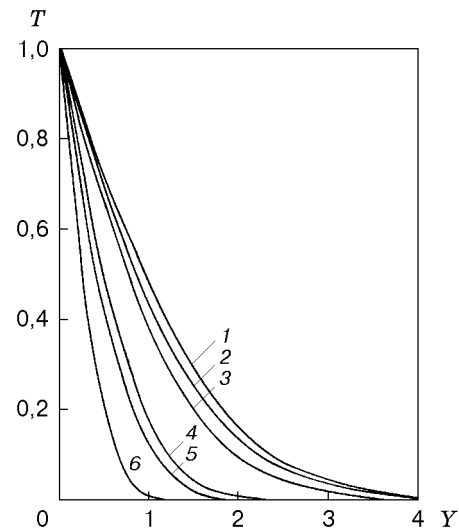


Рис. 4

Рис. 4. Профили температуры при  $X = 1$  ( $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ):

1 —  $K = 2$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $t = 0,67$ ; 2 —  $K = 2$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $t = 12,7$  (стационарный режим); 3 —  $K = -2$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $t = 6,1$  (стационарный режим); 4 —  $K = 2$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $t = 0,2$ ; 5 —  $K = 2$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $t = 0,15$ ; 6 —  $K = 2$ ,  $Pr = 7$ ,  $t = 10,4$  (стационарный режим)

разложения. Ясно, что скорость увеличивается при уменьшении числа Шмидта или параметра химической реакции. Увеличение скорости может быть связано с тем, что скорость массопереноса в жидкости, влияющая на силы плавучести, растет с уменьшением числа Шмидта. Время, необходимое для выхода на стационарное состояние, растет с увеличением числа Шмидта или параметра химической реакции. Однако время, необходимое для достижения стационарного значения скорости, зависит как от числа Шмидта, так и от параметра химической реакции. Вклад массовой диффузии в силы плавучести приводит к значительному увеличению максимальной скорости. На рис. 3 показаны стационарные профили скорости для различных значений теплового и массового чисел Грасгофа и числа Прандтля. Видно, что скорость увеличивается с ростом теплового или массового числа Грасгофа и уменьшается с ростом числа Прандтля.

Нестационарные и стационарные профили температуры для различных значений числа Прандтля и параметра химической реакции показаны на рис. 4. Известно, что число Прандтля играет важную роль в процессах, происходящих в потоке, так как оно характеризует отношение толщин динамического и теплового пограничных слоев. Наблюдается рост температуры с увеличением параметра химической реакции и понижение температуры с увеличением числа Прандтля.

Влияние параметра химической реакции и числа Шмидта очень существенно для профиля концентрации. Нестационарные и стационарные профили концентрации для различных значений параметра химической реакции показаны на рис. 5. При увеличении параметра химической реакции наблюдается уменьшение концентрации. На рис. 6 показаны профили концентрации для различных значений теплового числа Грасгофа. Видно, что концентрация растет с уменьшением  $Gr$ .

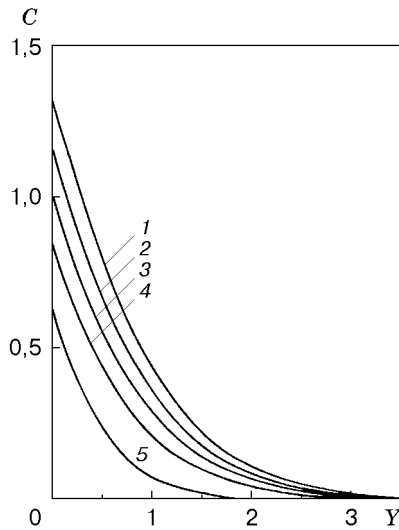


Рис. 5

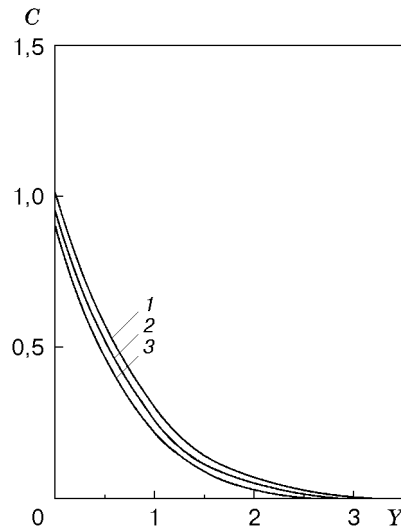


Рис. 6

Рис. 5. Профили концентрации при  $X = 1$  ( $Gr = 2, Gc = 5, Pr = 0,71$ ):

1 —  $K = -2, Sc = 0,6, t = 6,1$ ; 2 —  $K = -1, Sc = 0,6, t = 6,7$ ; 3 —  $K = 0,2, Sc = 0,6, t = 11,6$ ; 4 —  $K = 2, Sc = 0,6, t = 12,7$ ; 5 —  $K = 0,2, Sc = 2, t = 13,7$

Рис. 6. Профили концентрации при  $X = 1$  ( $Pr = 0,71, Sc = 0,6, K = 0,2, Gc = 5$ ):

1 —  $Gr = 2$ ; 2 —  $Gr = 5$ ; 3 —  $Gr = 10$

Зная поля скорости, температуры и концентрации, можно определить поверхностное трение, скорость теплопереноса и интенсивность переноса компонентов в нестационарном и стационарном режимах. Безразмерные и осредненные значения поверхностного трения, чисел Нуссельта и Шмидта определяются следующими выражениями:

$$\tau_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{Y=0}, \quad \bar{\tau} = -\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{Y=0} dX, \quad Nu_x = -X \left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{Y=0}, \tag{4}$$

$$\bar{Nu} = -\int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{Y=0} dX, \quad Sh_x = -X \left[\frac{(\partial C/\partial Y)_{Y=0}}{C_{Y=0}}\right], \quad \bar{Sh} = -\int_0^1 \left[\frac{(\partial C/\partial Y)_{Y=0}}{C_{Y=0}}\right] dX.$$

Производные, входящие в уравнения (4), можно оценить с помощью формулы пятиточечной аппроксимации, а затем вычислить интегралы, используя формулу Ньютона — Коте для интегрирования по замкнутому контуру.

Зависимость местного поверхностного трения, вычисленного по первому уравнению в (4), от осевой координаты  $X$  показана на рис. 7. Значения  $\tau_x$  увеличиваются с ростом параметра химической реакции или числа Шмидта.

На рис. 8 представлена зависимость  $Nu_x(X)$ . Видно, что скорость теплопереноса увеличивается с ростом теплового и массового чисел Грасгофа и уменьшается с ростом числа Шмидта. На рис. 9 представлена зависимость  $Sh_x(X)$ . Видно, что местное число Шервуда растет с увеличением числа Шмидта. Интенсивность переноса компонента возрастает в случае реакции разложения и уменьшается в случае реакции образования.

Влияние чисел  $Gr, Gc, Sc$  и параметра химической реакции на средние значения поверхностного трения, чисел Нуссельта и Шервуда показано на рис. 10, 11 и 12. Среднее значение поверхностного трения растет с уменьшением  $Gr$  или  $Gc$  и с увеличением  $Sc$

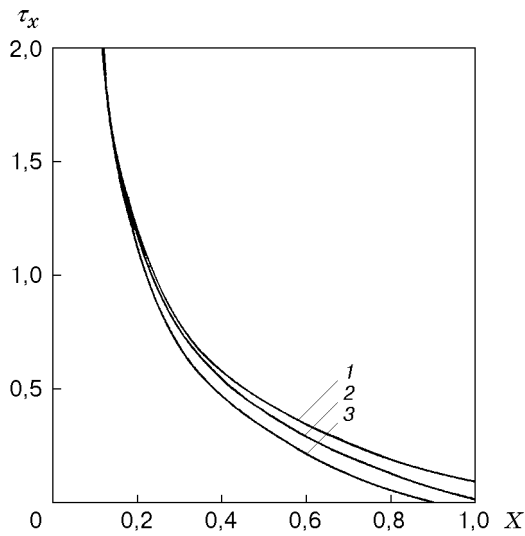


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость местного поверхностного трения от координаты  $X$  ( $Pr = 0,71$ ,  $Gr = 0,4$ ,  $Gc = 0,2$ ):

1 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 0,6$ ; 2 —  $K = -2$ ,  $Sc = 0,6$ ; 3 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 0,16$

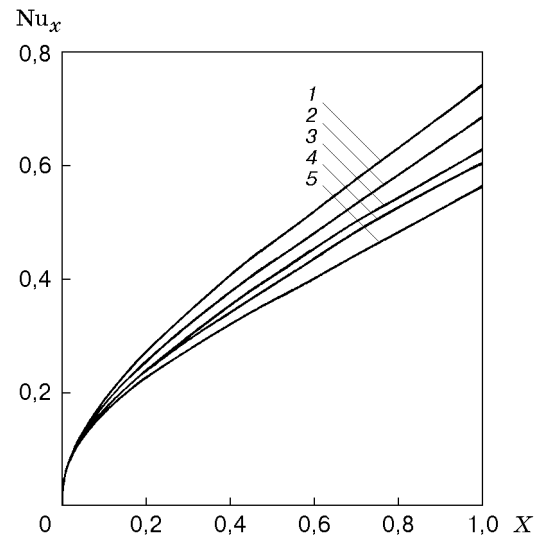


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость местного числа Нуссельта от координаты  $X$  ( $Pr = 0,71$ ):

1 —  $Gr = 5$ ,  $Gc = 10$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $K = 0,2$ ; 2 —  $Gr = 5$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $K = 0,2$ ; 3 —  $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $K = 0,2$ ; 4 —  $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $K = 2$ ; 5 —  $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 2$ ,  $K = 0,2$

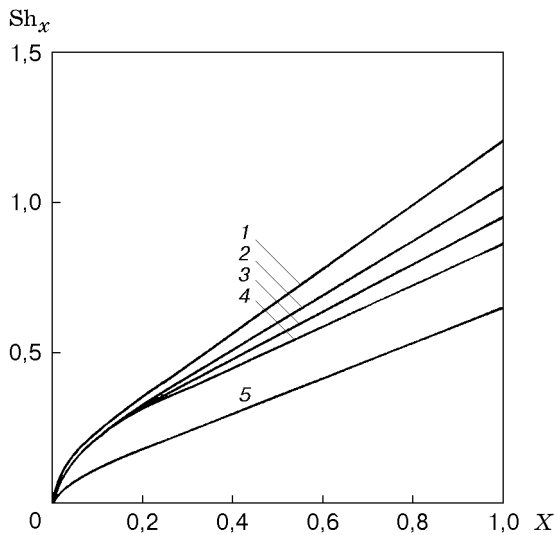


Рис. 9

Рис. 9. Зависимость местного числа Шервуда от координаты  $X$  ( $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Pr = 0,71$ ):

1 —  $K = 2$ ,  $Sc = 0,6$ ; 2 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 0,6$ ; 3 —  $K = -1$ ,  $Sc = 0,6$ ; 4 —  $K = -2$ ,  $Sc = 0,6$ ; 5 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 0,16$

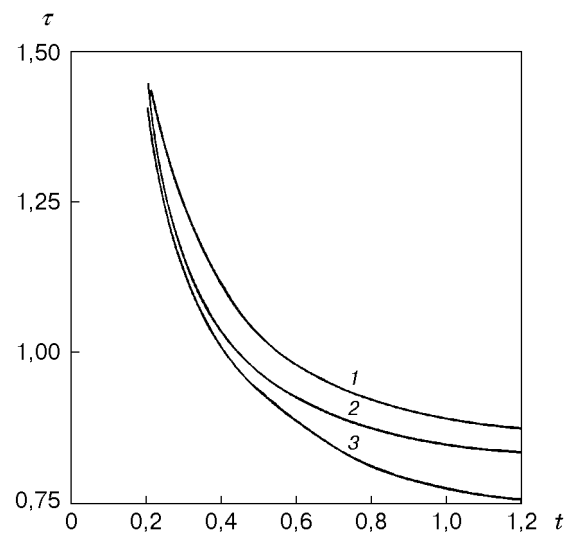


Рис. 10

Рис. 10. Зависимость среднего поверхностного трения от времени ( $Pr = 0,71$ ,  $Gr = 0,4$ ,  $Gc = 0,2$ ):

1 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 0,6$ ; 2 —  $K = -2$ ,  $Sc = 0,6$ ; 3 —  $K = 0,2$ ,  $Sc = 0,16$

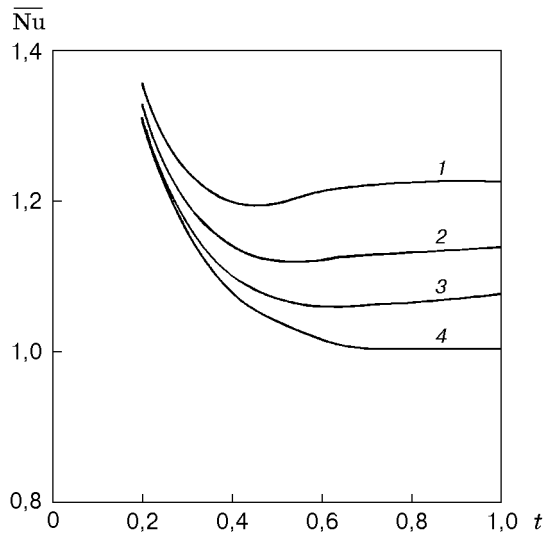


Рис. 11

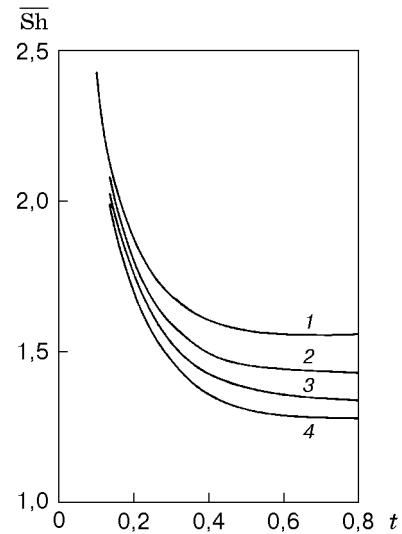


Рис. 12

Рис. 11. Зависимость среднего числа Нуссельта от времени ( $Pr = 0,71$ ,  $K = 0,2$ ):

1 —  $Gr = 5$ ,  $Gc = 10$ ,  $Sc = 0,6$ ; 2 —  $Gr = 5$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 0,6$ ; 3 —  $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 0,6$ ; 4 —  $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 2$

Рис. 12. Зависимость среднего числа Шервуда от времени ( $Gr = 2$ ,  $Gc = 5$ ,  $Sc = 0,6$ ,  $Pr = 0,71$ ):

1 —  $K = 2$ ; 2 —  $K = 0,2$ ; 3 —  $K = -1$ ; 4 —  $K = -2$

в течение всего переходного периода. Среднее значение числа Нуссельта растет с уменьшением  $Sc$  и с увеличением  $Gr$  или  $Gc$ . Среднее значение числа Шервуда увеличивается с ростом параметра химической реакции.

**4. Выводы.** В работе представлено детальное численное исследование обтекания полубесконечной изотермической вертикальной пластины несжимаемой вязкой жидкостью с однородным подводом массы при движении пластины из состояния покоя с учетом гомогенной химической реакции первого порядка. Безразмерные уравнения решаются с помощью неявной конечно-разностной схемы типа Кранка — Николсона. В данной работе в качестве среды, в которой движется пластина, рассматриваются воздух и вода. Результаты расчетов хорошо согласуются с точным решением при отсутствии химической реакции ( $K = 0$ ). Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

1. Скорость и концентрация растут в случае реакции образования ( $K < 0$ ) и уменьшаются при протекании реакции разложения ( $K > 0$ ).

2. Температура растет при увеличении значений параметра химической реакции и уменьшается с ростом числа Прандтля.

3. Местные и средние значения числа Шервуда растут при увеличении параметра химической реакции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Stokes G. G.** On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Cambridge Philos. Trans. 1851. V. 9. P. 8–106.

2. **Soundalgekar V. M.** Free convection effects on the Stokes problem for an infinite vertical plate // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1977. V. 99. P. 499–501.
3. **Soundalgekar V. M.** Effects of mass transfer and free convection currents on the flow past an impulsively started vertical plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1979. V. 46. P. 757–760.
4. **Muthukumaraswamy R., Ganesan P.** Unsteady flow past an impulsively started vertical plate with heat and mass transfer // Heat Mass Transfer. 1998. V. 34. P. 187–193.
5. **Das U. N., Ray S. N., Soundalgekar V. M.** Mass transfer effects on flow past an impulsively started infinite vertical plate with constant mass flux- an exact solution // Heat Mass Transfer. 1996. V. 31. P. 163–167.
6. **Das U. N., Deka R., Soundalgekar V. M.** Effects of mass transfer on flow past an impulsively started infinite vertical plate with constant heat flux and chemical reaction // Forsch. Ingenieurw. 1994. Bd 60. S. 284–287.
7. **Carnahan B., Luther H. A., Wilkes J. O.** Applied numerical methods. N. Y.: John Wiley and Sons, 1969.

*Поступила в редакцию 10/XI 1999 г.,  
в окончательном варианте — 20/I 2001 г.*

---