

УДК 532.529+534.522

ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СЛАБОЗАПЫЛЕННОЙ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ С ГОРЕНИЕМ

А. Л. Кул¹, К. Балакришнан²¹Ливерморская национальная лаборатория им. Лоуренса, Ливермор, Калифорния, США, kuhl2@llnl.gov²Национальная лаборатория им. Лоуренса в Беркли, Беркли, Калифорния, США 94720

Развита газодинамическая модель течения в горячей двухфазной среде. Модель основана на расширенной теории низкоплотной гетерогенной среды, в которой дискретная фаза термодинамически моделируется как некоторый газ (с давлением p_2 , температурой T_2 и внутренней энергией u_2 , которая для твердых сфер определяется в соответствии с кинетической теорией при $\gamma_2 = 5/3$). Для этого «дискретного газа» определены законы сохранения массы, импульса и полной энергии. Кроме того, для частиц определяются собственная температура T_s , связь теплоемкости с внутренней энергией их материала $e_s = c_s T_s$ и соответствующий закон сохранения энергии. В данной формулировке уравнения для обеих фаз являются гиперболическими и разделены, так что для каждой фазы определяется свой полный набор собственных значений и собственных векторов. Законы сохранения для каждой фазы могут быть проинтегрированы с применением схемы Годунова высокого порядка. Уравнения фаз связаны только законами сопротивления, тепло- и массообмена. В рамках модели проведены численные расчеты горения частиц алюминия при взрыве зарядов ударно-диспергируемого горючего. В силу присущей задаче точечной симметрии, поля течений осреднялись азимутально в направлениях θ и φ , откуда были определены средние значения и среднеквадратичные отклонения радиальных распределений термодинамических параметров, полей скорости и параметров в зоне реакции. Установлено, что давление в «дискретном газе» влияет на поток только на начальной стадии ускорения частиц, когда через порошок проходит сначала волна уплотнения, а затем волна разрежения от свободной поверхности. Затем давление в фазе частиц быстро убывает и ускорение частиц определяется главным образом сопротивлением. Тем не менее это оказывает влияние на процесс диспергирования, поскольку форма облака горящих частиц несколько отличается от результатов предыдущих исследований.

Ключевые слова: горение, двухфазная среда, газодинамическая модель, алюминий.

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется задача о горении частиц при взрыве зарядов ударно-диспергируемого горючего (УДГ) [1, 2]. Бустерный заряд УДГ включает сферическую капсулу, заполненную тэном (1/3 массы), окруженную чешуйчатым порошком алюминия (2/3 массы) с объемной плотностью 0.6 г/см^3 . Детонация бустерного заряда создает взрывную волну, которая распыляет порошок Al и воспламеняет формирующуюся алюминиево-воздушную смесь, в результате чего образуется двухфазное горящее облако, вовлеченное во взрыв. Этот процесс моделируется с использованием двухфазной версии развитого ранее программного кода AMR [3, 4].

Код AMR построен на основе законов сохранения для газовой фазы и фазы частиц в приближении слабозапыленной среды [5]. В настоящей работе представлена расширенная модель, в которую включены эффекты давления в фазе частиц.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются законы сохранения для гетерогенных сред с твердыми частицами, сформулированные Нигматулиным [5]. Законы сохранения импульса выражаются следующими уравнениями:

для газа

$$\partial_t \rho_1 \mathbf{v}_1 + \nabla(\rho_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1) + \alpha_1 \nabla p_1 = -\mathbf{D}, \quad (1)$$

для частиц

$$\partial_t \rho_2 \mathbf{v}_2 + \nabla(\rho_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2) + \alpha_2 \nabla p_1 + \nabla p_f = +\mathbf{D}, \quad (2)$$

где p_1 — давление в газовой фазе, p_f — давление в фазе частиц, α_i — объемная доля i -й фазы, для которой выполняется закон сохранения объема $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, ρ_i — плотность, v_i — скорость, $i = 1$ — газовая фаза, $i = 2$ — фаза частиц. Межфазный обмен импульсами описывается с учетом силы сопротивления D . Заметим, что в данной формулировке градиент давления газа ∇p_1 влияет на импульс обеих фаз пропорционально объемной доле; этот член иногда называют силой Архимеда. Давление в фазе частиц p_f должно быть специально определено. В [5] предложен следующий степенной закон:

$$p_f(\alpha_2) = P_s^0 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2^* - \alpha_2} \right)^\chi, \quad (3)$$

где $\alpha_2^* = 0.53$ — предельная (максимальная) объемная доля фазы частиц, P_s^0 — коэффициент для давления фазы частиц при начальной объемной доле α_2^0 и $\chi = 5/3$. Как указано в [3, р. 343], это добавочное (т. е. абсолютно искусственное) давление введено для стабилизации решения уравнений. В [6, 7] степенной закон представлен в форме

$$p_f(\alpha_1) = P_s^0 \left(\frac{\alpha_1^*}{\alpha_1} - 1 \right), \quad (4)$$

где α_1^* — предельная (минимальная) пористость газовой фазы. Авторы [6, 7] применили это уравнение для исследования конвективно-горения в кипящем слое и перехода дефлаграции в детонацию. В [8] при моделировании плотных двухфазных систем с твердыми частицами это выражение было модифицировано:

$$p_f(\alpha_1) = P_s^0 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \alpha_1 - 2 \right). \quad (5)$$

В таком виде оно обеспечивает адекватное поведение скорости звука при всех объемных концентрациях.

В настоящей работе предполагается, что частицы ведут себя как молекулы газа, и для дискретной фазы, согласно кинетической теории [9, 10], определяются давление частиц p_2 , их температура T_2 и энергия столкновений u_2 :

$$p_2 = \frac{1}{3} \frac{m}{V} \overline{C^2}, \quad (6)$$

$$T_2 = \frac{1}{3} \frac{m}{k} \overline{C^2}, \quad (7)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \overline{C^2}. \quad (8)$$

Эти величины зависят от средней кинетической энергии частиц $\overline{C^2}$, где C — скорость частиц, m — их масса в объеме V . Таким образом, давление частиц моделируется аналогично давлению идеального газа:

$$p_f = p_2 = (\gamma_2 - 1) \rho_2 u_2, \quad (9)$$

и соответствует одноатомному газу при $\gamma_2 = 5/3$. Согласно первому закону термодинамики «дискретный газ» получает энергию через работу:

$$du_2 = -p_2 dv_2, \quad (10)$$

где $\nu_2 = 1/\rho_2$ — удельный объем. Соответственно для «дискретного газа» скорость звука определяется следующим образом:

$$a_2 = \sqrt{\gamma_2(\gamma_2 - 1)u_2}. \quad (11)$$

Принимается, что фаза частиц, кроме термодинамической энергии частиц u_2 , может обладать тепловой энергией твердого тела e_s , удовлетворяющей калорическому уравнению состояния

$$e_s = c_s T_s, \quad (12)$$

где c_s , T_s — теплоемкость и температура твердого тела. Таким образом, для описания тепловой энергии фазы частиц предлагается модель двух энергий: u_2 , e_s .

Необходимо отметить, что в [11] рассматривались близкие проблемы, в частности задача о распаде разрыва в двухфазной системе, включающей эффекты хаотического давления частиц.

2. МОДЕЛЬ

Законы сохранения

Плотности газовой и дискретной фаз будем описывать функциями эйлера континуума: $\rho_1(\mathbf{x}, t)$ и $\rho_2(\mathbf{x}, t)$. Их эволюция в единице объема определяется следующими законами сохранения массы:

газ

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \rho_1 \mathbf{v}_1 = +\Omega, \quad (13)$$

частицы

$$\partial_t \rho_2 + \nabla \rho_2 \mathbf{v}_2 = -\Omega. \quad (14)$$

Источниковый член Ω представляет собой массообмен от частиц в газовую фазу, который моделируется уравнением (20).

Для того чтобы сосредоточиться на анализе влияния давления дискретной фазы, принимается приближение разреженной среды ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$), лишенной сил Архимеда. Функции $\rho_1(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)$ и $\rho_2(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}_2(\mathbf{x}, t)$ в единице объема могут быть описаны следующими законами сохранения импульса:

газ

$$\partial_t \rho_1 \mathbf{v}_1 + \nabla(\rho_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1 + p_1) = -\mathbf{D} + \mathbf{v}_2 \Omega, \quad (15)$$

частицы

$$\partial_t \rho_2 \mathbf{v}_2 + \nabla(\rho_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 + p_2) = +\mathbf{D} - \mathbf{v}_2 \Omega. \quad (16)$$

Источниковый член \mathbf{D} представляет собой силу сопротивления, определяемую уравнением (21).

Для описания энергии фаз будем использовать функции эйлера континуума $\rho_1(\mathbf{x}, t)u_1(\mathbf{x}, t)$ для газа, $\rho_2(\mathbf{x}, t)u_2(\mathbf{x}, t)$ для частиц, $\rho_2(\mathbf{x}, t)e_s(\mathbf{x}, t)$ для твердого материала. Энергия фаз в единице объема определяется законами сохранения полной энергии для газа и фазы частиц, дополненными законом сохранения для твердого материала частиц:

газ

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_1 E_1 + \nabla(\rho_1 E_1 \mathbf{v}_1 + p_1 \mathbf{v}_1) = \\ = -\mathbf{v}_2 \mathbf{D} - Q + E_2 \Omega, \end{aligned} \quad (17)$$

частицы

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_2 E_2 + \nabla(\rho_2 E_2 \mathbf{v}_2 + p_2 \mathbf{v}_2) = \\ = +\mathbf{v}_2 \mathbf{D} - E_2 \Omega, \end{aligned} \quad (18)$$

твердый материал

$$\partial_t \rho_2 e_s + \nabla \rho_2 e_s \mathbf{v}_2 = +Q, \quad (19)$$

где $E_i = u_i(T_i) + v_i^2/2$ — полная энергия фаз, e_s — тепловая энергия твердых частиц. Газовая фаза может терять энергию через теплообмен Q от газа к частицам и обмениваться энергией через работу сил сопротивления $\mathbf{v}_2 \Omega$ и массообмен с «дискретным газом» $E_2 \Omega$ в соответствии с феноменологическими соотношениями, приведенными в следующем параграфе.

Взаимодействия

Межфазные взаимодействия определяются следующими эмпирическими соотношениями [5, 12]:

масса

$$\Omega = \begin{cases} 0, & T_s < T_{ign}, \\ 3\rho_2 \frac{1 + 0.276\sqrt{\text{Re}_{12}}}{K d_s^2}, & T_s \geq T_{ign}; \end{cases} \quad (20)$$

импульс

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = C_D(\text{Re})(\pi d_s^2 \rho_1 w_{12}^2 / 2) \mathbf{w}_{12} / w_{12}, \\ \mathbf{w}_{12} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \end{aligned} \quad (21)$$

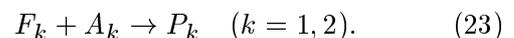
где $C_D(\text{Re}) = 24/\text{Re} + 4.4/\sqrt{\text{Re}} + 0.42$ — коэффициент сопротивления, $\text{Re} = \rho_1 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| / \mu_1$ — число Рейнольдса; теплообмен

$$\begin{aligned} Q = \frac{6\rho_2}{\rho_s d_s} \times \\ \times \left[\frac{\text{Nu} \lambda_1 (T_1 - T_s)}{d_s} + \varepsilon \sigma_{Boltz} (T_1^4 - T_s^4) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где $\text{Nu} = 2 + 0.6 \text{Pr}_1 \sqrt{\text{Re}}$ — число Нуссельта, $\text{Pr}_1 = c_{p1} \mu_1 / \lambda_1$ — число Прандтля. Здесь μ_1 — динамическая вязкость, λ_1 — теплопроводность, c_{p1} — удельная теплоемкость газа, σ_{Boltz} — постоянная Больцмана, ε — излучательная способность, d_s — диаметр частиц, ρ_s — плотность материала частиц, T_s — температура частиц, T_{ign} — температура воспламенения, K — эмпирическая константа, относящаяся к времени сгорания частицы, $K = 150 \text{ с/см}^2$.

Горение

Рассматриваются два вида горючих: продукты детонации тэна (F_1) и алюминий (F_2) замороженного состава, наряду с соответствующими равновесными продуктами горения тэна в воздухе (P_1) и алюминия в воздухе (P_2). Моделируется глобальное горение обоих видов топлива F_k в воздухе (A) с производством равновесных продуктов реакции P_k :



Массовые доли компонентов Y_k регулируются законами сохранения:
горючее

$$\partial_t \rho Y_{F_k} + \nabla \rho Y_{F_k} \mathbf{v} = -\dot{s}_k + \delta_{k2} \dot{\sigma}_k, \quad (24)$$

воздух

$$\partial_t \rho Y_{A_k} + \nabla \rho Y_{A_k} \mathbf{v}_1 = -\alpha_k \dot{s}_k, \quad (25)$$

продукты

$$\partial_t \rho Y_{P_k} + \nabla \rho Y_{P_k} \mathbf{v} = (1 + \alpha_k) \dot{s}_k. \quad (26)$$

Горючее и воздух потребляются в стехиометрической пропорции: $\alpha_k = A_k/F_k$. Член $\delta_{k2} \dot{\sigma}_k$ представляет собой конверсию Al из частиц в газовую фазу, что создает источник горючего (парообразного) Al. В приведенных выше соотношениях \dot{s}_k представляет собой член глобальной кинетики, который моделируется по представленной ниже схеме.

Следуя [13, 14], для предварительно перемешанных систем определяется доля времени индукции $f(\mathbf{x}, t)$, которая меняется от нуля до 1 в конце зоны задержки воспламенения и подчиняется уравнению переноса

$$\partial_t \rho_2 f + \mathbf{v}_1 \nabla \rho_2 f = \rho_2 / \tau_{ind}. \quad (27)$$

Время индукции τ_{ind} базируется на законе Аррениуса в соответствии с данными [15, 16] для частиц алюминия:

$$\tau_{ind} = A \exp \frac{E_a}{RT}, \quad (28)$$

где $A = 1.6 \cdot 10^{-8}$ и $E_a = 60$ ккал/моль для чешуйчатого алюминия. Температура воспламенения T_{ign} удовлетворяет уравнению

$$T_{ign} = T_{mpo} - 0.6 - \frac{C_{ox}^{0.3} d_s}{\lambda_1} \exp(-0.85 \sqrt{d_s}), \quad (29)$$

основанному на данных [17]. Здесь T_{mpo} — точка плавления покрывающей частицу оксидной пленки, C_{ox} — концентрация окислителя. Для описания воспламенения облака частиц используется вероятностная модель [18]:

$$\mu_c(\rho_2) = \frac{1}{1 + \exp[(\rho_f^0 - \rho_2)/b]}, \quad (30)$$

где ρ_f^0 — плотность облака топлива, соответствующая 50%-й вероятности зажигания, b — тангенс угла наклона. В данном случае $\rho_f^0 =$

130 г/м³, $b = 20$ для чешуйчатых частиц Al. Недавно эта модель воспламенения Al была применена для моделирования зарядов УДГ в рамках модели разреженной гетерогенной среды [19]. Воспламенение происходит при $f \geq 1$, $T \geq T_{ign}$, и источниковый член становится равен

$$\dot{s}_2 = \rho_2 \cdot \mu_c(\rho_2). \quad (31)$$

Для горения бустерного газа (\dot{s}_1) установлено, что адекватным является предел быстрой химии, поэтому, если газ и воздух присутствуют в одной расчетной ячейке, они потребляются за один временной шаг.

Уравнения состояния

В применяемом численном алгоритме на основе данных о плотности, удельной внутренней энергии и газовом составе в каждой ячейке из уравнений состояния определяются давление и температура. Термодинамические состояния, возникающие при взрывах УДГ, анализировались в [19]. Здесь перечислены лишь основные функции, необходимые для численного моделирования. Калорические уравнения состояния для удельной внутренней энергии представлены в плоскости Ле-Шателье как функции температуры $u(T)$. Геометрические места точек состояний в диапазоне температур $300 \leq T \leq 6000$ К рассчитаны в рамках кода Cheetah [20] на основе следующих термодинамических предположений:

- воздух: равновесная изобара* ($p = 10$ атм),
- алюминий: равновесная изобара ($p = 10$ атм),
- продукты детонации тэна: равновесная энтропа, проходящая через точку Чепмена — Жуге, с замороженным составом при $T < 1800$ К (см. [21] для данной постановки),
- продукты горения Al — воздух: равновесная изобара* ($p = 10$ атм).

Эти геометрические места точек описываются для каждого компонента кусочно-линейной функцией

$$u(T) = aT^2 + bT + c. \quad (32)$$

*Нами установлено, что $u(T)_{isobar} = u(T)_{isochor}$ при $T < 3500$ К, следовательно, достаточно подобрать функцию внутренней энергии исключительно в зависимости от температуры; выше 3500 К это приближение выполняется с ошибкой, не превышающей 10 %.

Значения коэффициентов a , b , c табулированы в [19]. При заданной в ячейке удельной внутренней энергии u температура вычисляется путем решения вышеприведенного уравнения:

$$T = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - u)}}{2a}. \quad (33)$$

Затем определяется давление из соотношения для совершенного газа*

$$p = \rho RT \quad (34)$$

или из функций Джона — Уилкинса — Ли для газообразных продуктов детонации

$$p_{JWL}(\nu, T) = A \left(1 - \frac{\omega \nu_0}{R_1 \nu} \right) \exp \left(-R_1 \frac{\nu}{\nu_0} \right) + B \left(1 - \frac{\omega \nu_0}{R_2 \nu} \right) \exp \left(-R_2 \frac{\nu}{\nu_0} \right) + \frac{RT}{\nu}, \quad (35)$$

где $\nu = 1/\rho$ — удельный объем, ν_0 — начальный удельный объем. Более детально это описано в [19].

Численные методы

Характеристический анализ вышеприведенных законов сохранения показывает, что система является гиперболической и имеет вещественные характеристики: $\{\lambda_0 = v_1; \lambda_{\pm} = v_1 \pm a_1\}$ для газовой фазы и $\{\lambda_0 = v_2; \lambda_{\pm} = v_2 \pm a_2\}$ для дискретной фазы. Соответствующие переменные Римана $\{v_1; v_1 \pm 2a_1/(\gamma_1 - 1)\}$ и $\{v_2; v_2 \pm 2a_2/(\gamma_2 - 1)\}$ используются для построения решателей Римана для системы уравнений.

Уравнения интегрировались с применением обобщенного метода Годунова высокого порядка [22]. Алгоритм основан на эффективном решателе Римана для газодинамики, впервые разработанном в [23, 24] и расширенном для обобщенных законов сохранения в [25]. В [26] он был применен к противопотоковым схемам. Для обеих фаз, газовой и дискретной, применяется единый алгоритм (с соответствующим изменением переменных). Источниковые члены разрешаются методом расщепления Стрэнга. Так как интегрирование основано на решателях Римана, информация распространяется вдоль характеристик с корректной скоростью,

в том числе и нелинейные волновые взаимодействия в ячейке на каждом шаге по времени. Решатели включают в себя предельные шаги (с уплощением наклона), что автоматически уменьшает порядок аппроксимации в окрестности разрывов, тогда как в гладких областях течения схема имеет второй порядок по времени и пространству.

На основе схемы Годунова построен алгоритм адаптивного сеточного разрешения (AMR). Наши адаптивные методы основаны на блочно-структурированных алгоритмах AMR [27], распространенных на трехмерные гиперболические системы в [28]. Для нерегулярных геометрических конфигураций применяются методы встроенных границ [29]. В настоящем подходе области сгущения сетки организованы как прямоугольные участки с числом ячеек от нескольких сотен до нескольких тысяч. Сгущение возможно на разрывах (ударных волнах и контактных поверхностях), что следует из оценок погрешности в методе Ричардсона, или, как для целей настоящей работы, на поверхностях фронтов пламени и ударных волн. Распределение участков расчетной сетки по процессорам осуществляется на основе оценок рабочей загрузки [30], поэтому программы AMR эффективно работают на широкомасштабных параллельных компьютерах [31].

Метод AMR также используется для разрешения областей турбулентного перемешивания; последовательными сгущениями расчетной сетки ухватываются энергонесущие масштабы турбулентности. Таким образом, метод позволяет рассчитать эффекты турбулентного перемешивания без детального моделирования турбулентности. Это совместимо с так называемым подходом MILES (моделирование крупных вихрей с монотонным интегрированием) [32]. Детальный обзор неявных методов моделирования крупных вихрей (iLES) можно найти в [33]. Верификация способности применяемой схемы Годунова воспроизводить спектр Колмогорова турбулентных течений была продемонстрирована в [34].

Начальные условия

Моделируются взрыв и горение заряда УДГ массой 1.5 г, состоящего из 0.5 г сферического бустерного заряда тэна (плотность 1 г/см³), окруженного оболочкой чешуйчатого Al массой 1 г при насыпной плотности

*Мы обнаружили, что это верно и для взрывов в постоянном объеме при $p \leq 1$ кбар.

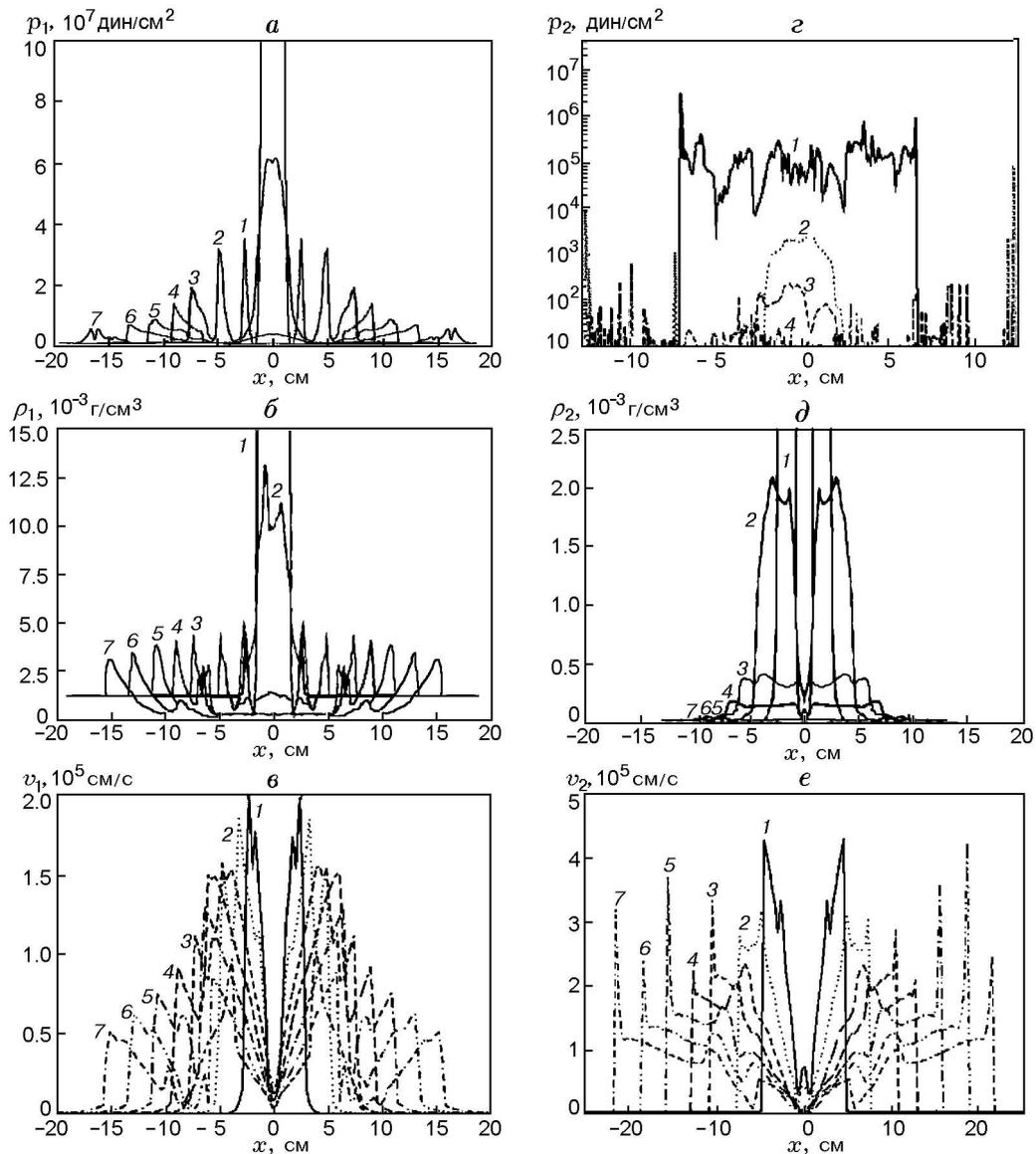


Рис. 1. Формирование и затухание волны в двухфазной реагирующей среде при взрыве УДГ с частицами алюминия:

a — распределение давления газа $p_1(x, t)$; *б* — распределение плотности газа $\rho_1(x, t)$; *в* — распределение скорости газа $v_1(x, t)$; *г* — распределение давления частиц $p_2(x, t)$; *д* — распределение плотности частиц $\rho_2(x, t)$; *е* — распределение скорости частиц $v_2(x, t)$; *a-в, д, е* — $t = 8$ (1), 18 (2), 33 (3), 44 (4), 60 (5), 81 (6), 107 мкс (7); *г* — 33 (1), 140 (2), 350 (3), 2700 мкс (4)

0.6 г/см³. Расчетная область: $\{-25 \leq x \leq +25$ см, $-25 \leq y \leq +25$ см, $-25 \leq z \leq +25$ см $\}$. Используется базовая сетка с начальным размером ячейки $\Delta_0 = 3$ мм и четырьмя уровнями уточнения, минимальный размер ячейки $\Delta_4 = 0.2$ мм. Взрыв инициируется в воздухе при нормальных атмосферных условиях ($p_0 = 1$ атм, $T_0 = 273$ К, $\rho_0 = 1.2$ мг/см³). Расчетный период составляет 4 мс.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Взрывная волна

Образование двухфазной взрывной волны от взрыва УДГ с Al иллюстрирует рис. 1, где изображены распределения давления, плотности, скоростей газовой фазы и фазы частиц. Пиковая скорость составляет ≈ 1 км/с. К мо-

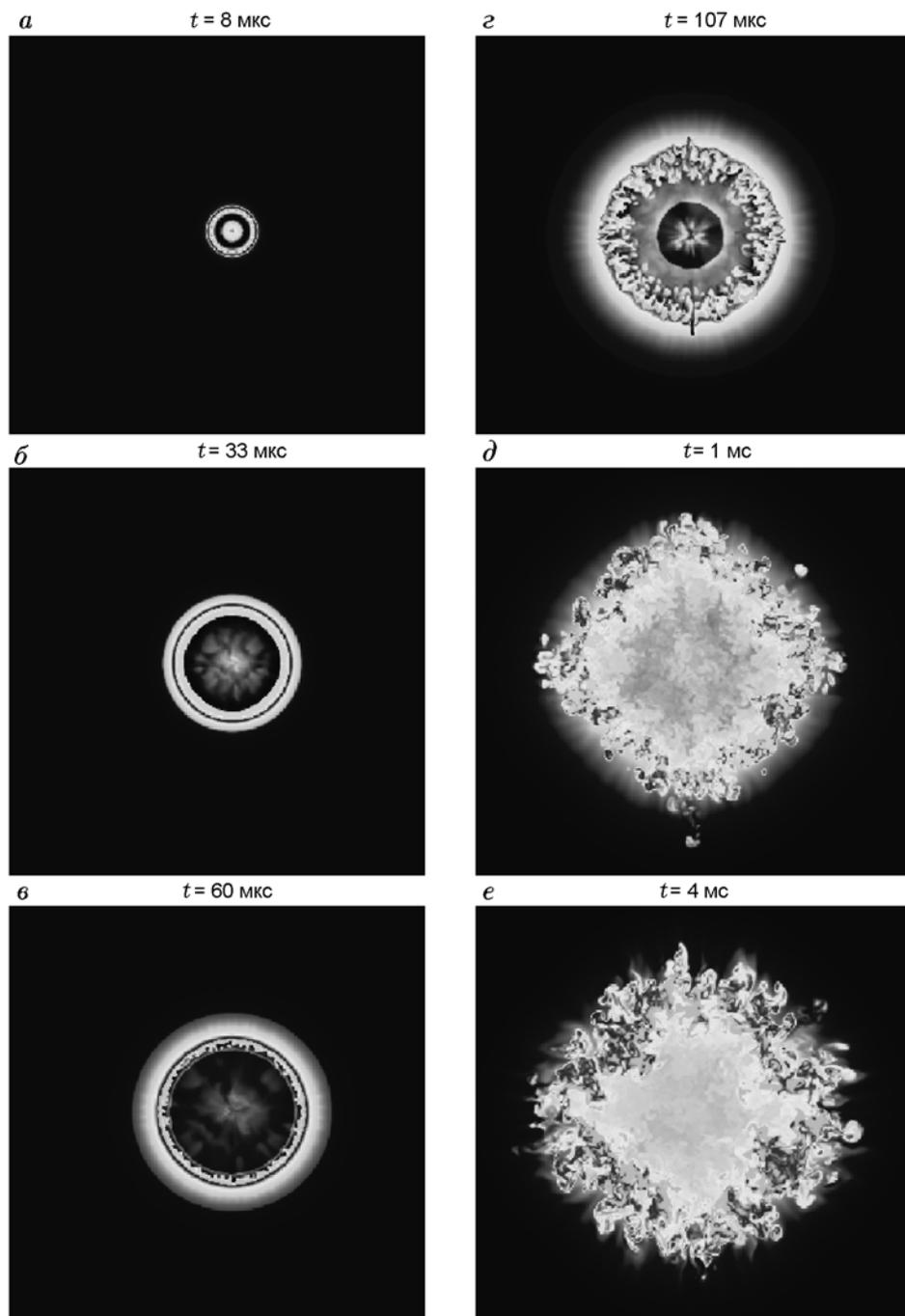


Рис. 2. Эволюция поля температур газа при взрыве заряда Al — УДГ

менту времени 107 мкс фронт частиц достигает расстояния 18 см и значительно опережает ударную волну в газе (15 см). Это связано с большей инерционностью частиц по сравнению с газом, поэтому они замедляются в меньшей степени. Таким образом, фронт частиц неизбежно обгоняет фронт первичной ударной волны.

Визуализация

Поле температуры газа при взрыве УДГ с Al приведено на рис. 2. Горение начинается в тонком слое пламени на границе раздела фаз воздух — частицы (рис. 2, а-в). В промежутке между 60 и 107 мкс (рис. 2, в, г) видно несколько радиальных бороздок, обуслов-

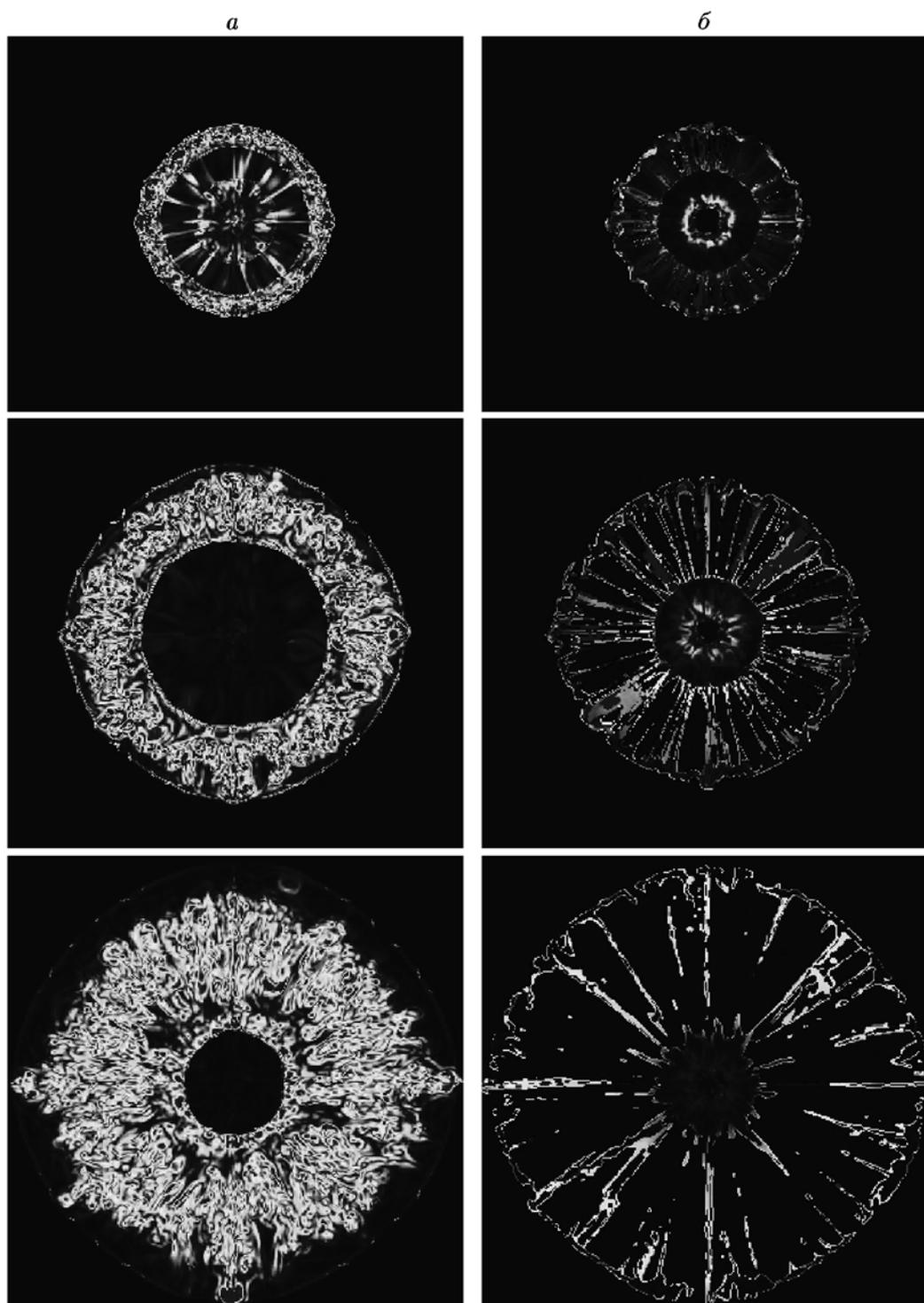


Рис. 3. Эволюция полей завихренности газа (*a*) и частиц (*b*)

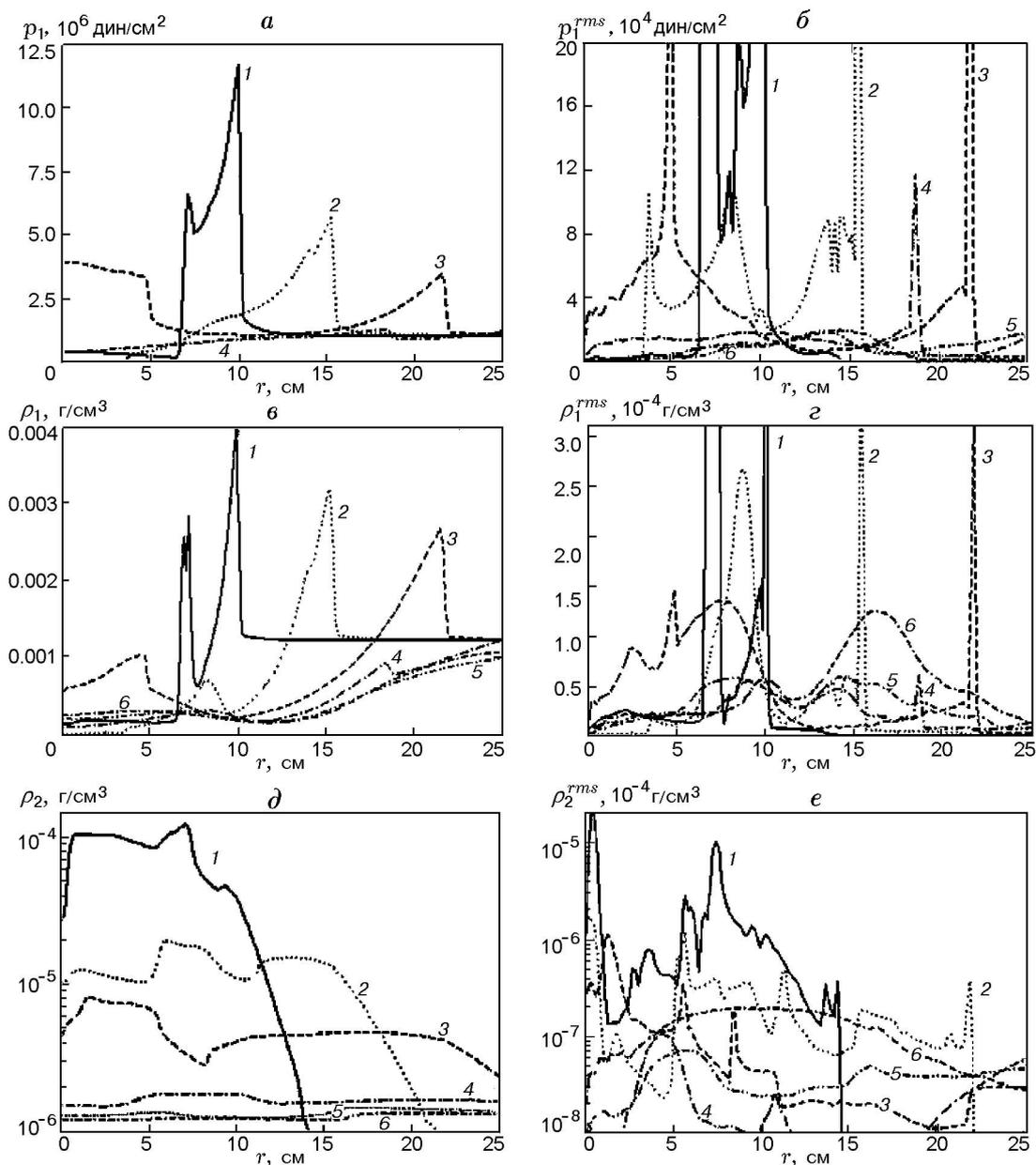


Рис. 4. Эволюция средних и пульсационных характеристик в горящем облаке Al — воздух: $t = 0.05$ (1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.4 (4), 1 (5), 4 мс (6)

ленных струйными эффектами в частицах. Тем не менее горение остается ограниченным сферической оболочкой — сферическим слоем смешения — даже в конце периода (рис. 2, д, е). Это отличается от результатов нашего предыдущего моделирования (см. рис. 3, б и рис. 11 в [3]), где горение частиц алюминия было распределено по всему облаку. По существу, ненулевое значение p_2 предполагает преобразование смещаемой в радиальном направлении кинетиче-

ской энергии в давление. В силу этого смещение в радиальном направлении уменьшается, поскольку p_2 трансформирует энергию из радиального направления в азимутальное. Таким образом, мы наблюдаем турбулентный огненный шар, который содержит меньше радиально направленных бороздчатых струйных образований.

Поля завихренности газа и частиц представлены на рис. 3. Их структуры существен-

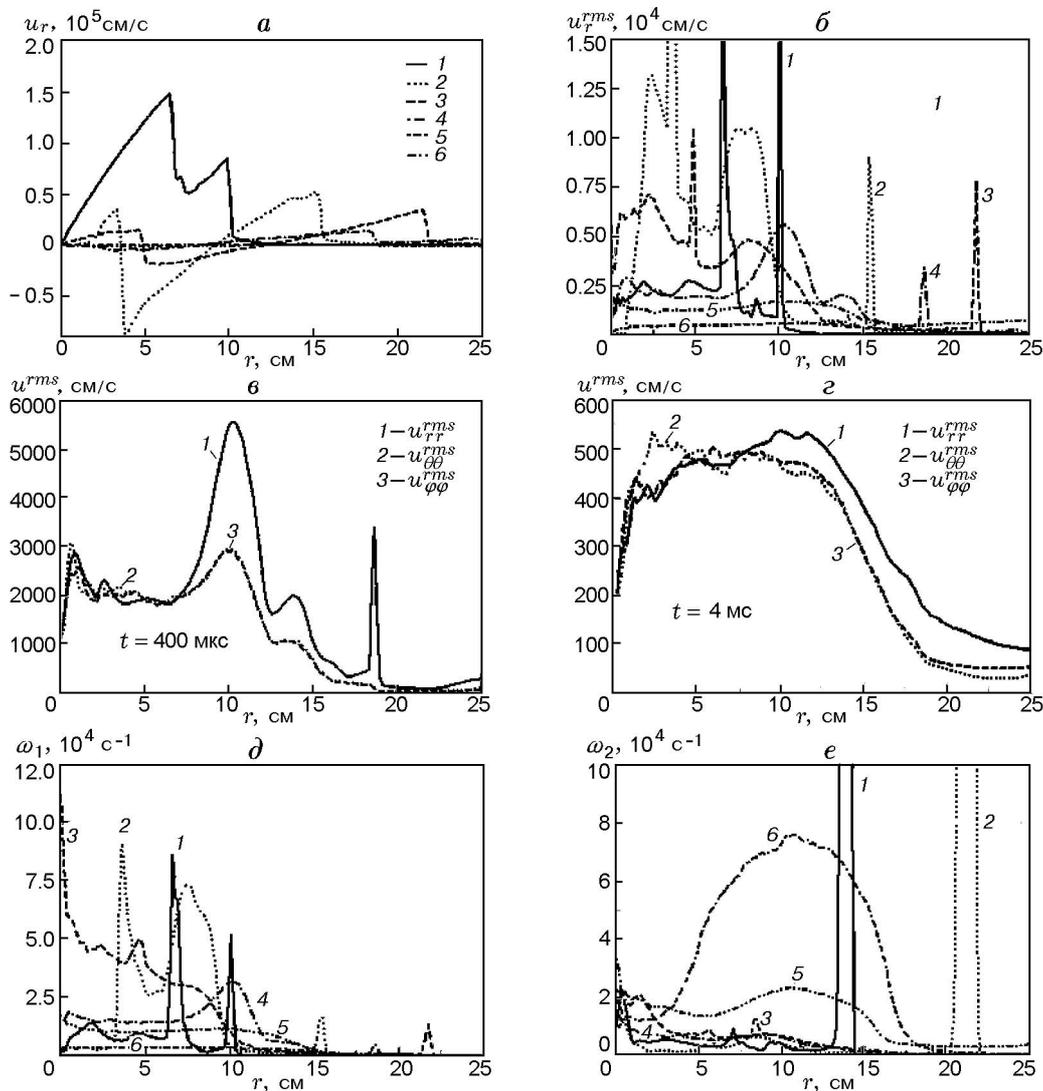


Рис. 5. Эволюция средних и пульсационных профилей скорости в горящем облаке Al — воздух: *a* — радиальная скорость газа, *б-г* — среднеквадратичные пульсации, *д* — завихренность газа, *е* — завихренность частиц; *a*, *б*, *д*, *е* — $t = 0.05$ (1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.4 (4), 1 (5), 4 мс (6)

но различаются. Завихренность в газе развивается из слоя смешения сферической оболочки, сосредоточенного на поверхности раздела алюминий — воздух. Ширина оболочки растет по мере расширения взрывной волны, ее фронт втягивает слой смешения в центр. В итоге вся сфера горения оказывается покрытой завихренностью газа. Завихренность в фазе частиц (дискретном газе), как видно, концентрируется в тонких радиальных пальцевидных образованиях, формирующихся за счет сопротивления сдвига между газом и фазой частиц.

Профили средних параметров и среднеквадратичных отклонений

В рассматриваемой постановке задача сферически-симметрична. В отсутствие неустойчивости на поверхности раздела топливо — воздух решение является исключительно функцией радиуса и времени — $\Phi(r, t)$. Примеры таких расчетов взрывной волны от заряда ТНТ приведены в [35, 36]. Можно получить это решение путем азимутального осреднения расчетного поля течения и определения $\bar{\Phi}(r, t)$. Зная эти средние значения, можно вычислить вторые моменты поля течения для оценки среднеквадратичного отклонения пульсаций

относительно среднего — $\Phi'(r, t)_{rms}$. Соответствующий численный алгоритм описан в приложении. Метод впервые был использован в [37] для исследования сферических слоев смешения при взрывах ТНТ.

Профили средних и пульсационных термодинамических параметров в горящем облаке показаны на рис. 4. Профили средних значений давления и плотности газа (рис. 4, а, в) типичны для взрывных волн [35, 36]. Среднеквадратичные пульсации давления составляют несколько процентов, что указывает на изобаричность горения. Среднеквадратичные пульсации плотности равны $\approx 10\%$. Средние плотности фазы частиц изменяются от $\approx 10^{-4}$ г/см³ при 50 мкс до $\approx 10^{-6}$ г/см³ при 4 мс из-за расширения облака частиц. Пульсации плотности составляют $\approx 1\%$ от средних. Интересно отметить, что на более поздних стадиях процесса распределения масс газа и частиц резко отличаются. Большая часть массы газа сосредоточена позади лидирующей ударной волны (рис. 4, в). Для частиц наблюдается (рис. 4, д) медленное постепенное увеличение плотности на внешнем фронте и расширение вплоть до начала координат. Поэтому масса частиц распределена по всему расширяющемуся облаку, в отличие от газа. Именно это свойство обуславливает распределенный режим горения в данной задаче.

Профили скорости в горящем облаке приведены на рис. 5. Профили средней радиальной скорости газа (рис. 5, а) представляют решение для взрывной волны. Соответствующие среднеквадратичные пульсации в направлениях (r, θ, φ) (рис. 5, б–г) начинаются от ≈ 100 м/с и убывают до ≈ 5 м/с к концу расчетного периода (4 мс). Радиальные пульсации скорости несколько больше, чем азимутальные. Средние завихренности газа и частиц (рис. 5, д, е) сравнимы по величине. Радиальные скорости газа и фазы частиц показаны на рис. 6. При $t = 33$ мкс эти скорости достигают пика ≈ 1600 м/с и убывают до 600 м/с при $t = 139$ мкс. Заметны эффекты проскальзывания.

Зона горения

Профили средних массовых долей фракций $Y_k(r, t)$ в зоне горения изображены на рис. 7. Представлены данные для горючего (алюминий) и продуктов его горения (алюминий — воздух), для подрывного заряда (продукты детонации тэна) и продуктов его горения (тэн —

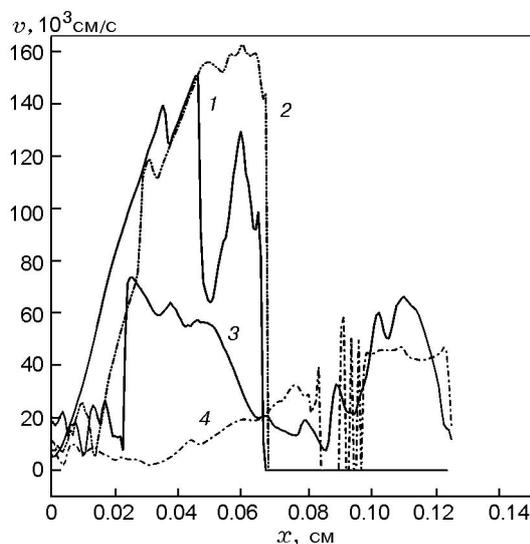


Рис. 6. Распределение радиальной скорости газа и частиц в моменты времени 33 мкс (1, 2) и 139 мкс (3, 4):
линии 1, 3 — газовая фаза, 2, 4 — фаза частиц

воздух), а также для окислителя (воздух). Видна динамика роста продуктов горения и расходования горючего и воздуха с течением времени. Тонкая зона реакции возникает при $r \approx 7$ см на ранней стадии, затем она уширяется и центрируется при $r \approx 11$ см, в конечном счете заполняя все облако.

Изменение массы алюминия иллюстрирует рис. 8. Примерно половина горючего расходуется в течение первых 130 мкс взрыва, к моменту времени $t = 3$ мс остается лишь 5%. Расход горючего в расчетах на основе модели «дискретного газа» (с давлением в фазе частиц) несколько меньше, чем расход топлива в модели разреженной гетерогенной среды [3]. Это обусловлено имеющейся дополнительной степенью свободы для энергии ($p_2 \cdot dv_2$), что уменьшает количество тепла, доступного для воспламенения частиц. Следовательно, горение затягивается, хотя суммарно сгорает то же самое количество Al.

Кинетическая энергия и энтропия

Эволюция полной кинетической энергии системы представлена на рис. 9. Полная кинетическая энергия фазы частиц изначально больше, чем газовой фазы, но убывает быстрее из-за быстрого снижения плотности частиц $\bar{\rho}_2(t)$. Эволюцию параметра глобальной

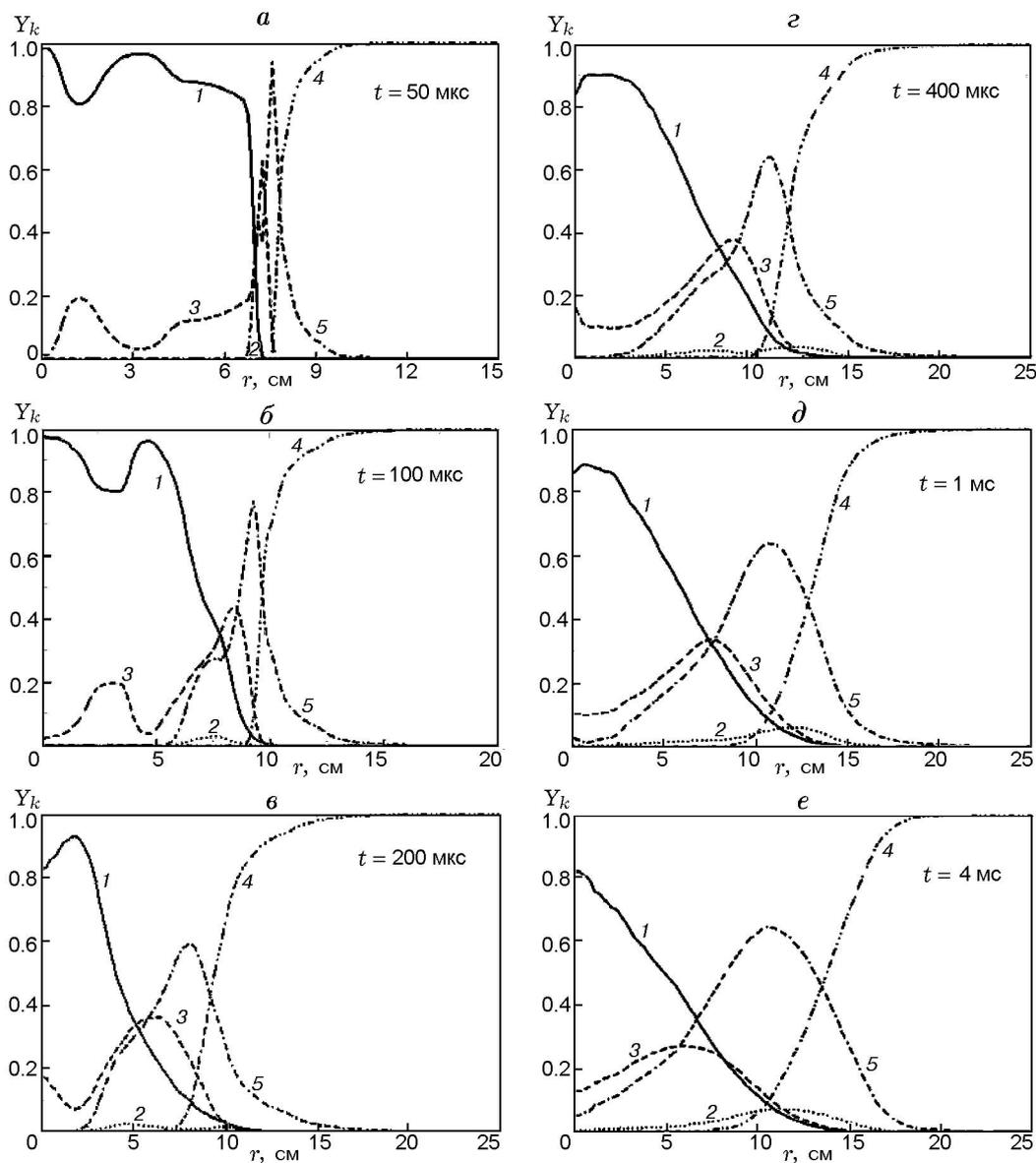


Рис. 7. Профили средних массовых концентраций $Y_k(r, t)$ в зоне горения облака Al — воздух: 1 — инициирующий заряд тэна, 2 — продукты горения тэна в воздухе, 3 — алюминий, 4 — воздух, 5 — продукты горения Al в воздухе

энстрофии $\varepsilon(t) = 1/\sqrt{0.5\overline{\omega^2(t)}}$ (где $\overline{\omega^2(t)}$ — среднее значение завихренности фазы частиц) иллюстрирует рис. 10 для двух фаз. Завихренность фазы частиц убывает быстрее, чем газовой фазы.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Проанализируем некоторые характеристики полей двухфазного горения при взрыве УДГ с частицами Al. На рис. 11 показано рас-

пределение средней объемной доли частиц α_2 . К моменту $t = 8$ мкс объемная доля частиц упала ниже 1 %. Таким образом, предел разреженной среды ($\alpha_2 = 0$) является очень хорошим приближением при $t > 8$ мкс. Это указывает, что влияние объема частиц имеет значение лишь в период первой волны уплотнения и быстро уменьшается, когда волна разрежения от поверхности порошок — воздух проходит через порошок Al. При этом скорость звука в фазе частиц («дискретном газе») также быстро

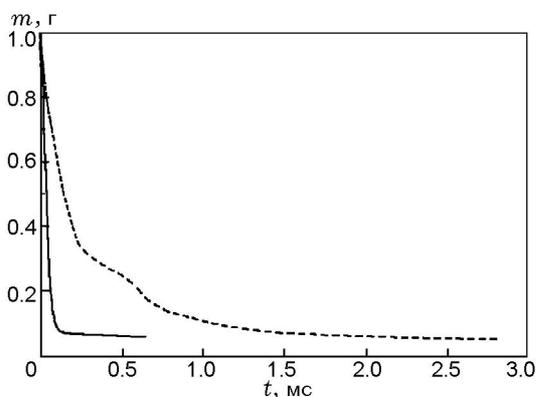


Рис. 8. Изменение массы частиц Al:
штриховая линия — модель «дискретного газа»,
сплошная — модель разреженной гетерогенной
среды

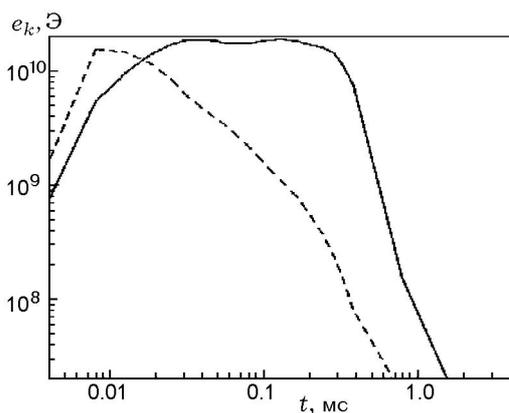


Рис. 9. Изменение полной кинетической энергии:
сплошная линия — газовая фаза, штриховая —
фаза частиц

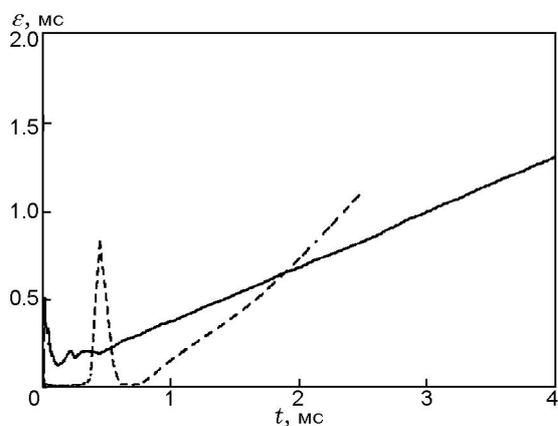


Рис. 10. Изменение параметра полной энтропии:
сплошная линия — газовая фаза, штриховая —
фаза частиц

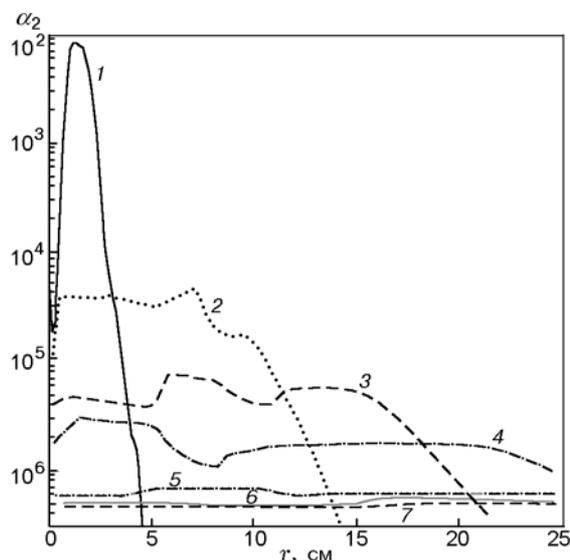


Рис. 11. Изменение средней объемной концентрации частиц α_2 при взрыве заряда Al — УДГ:
 $t = 0.008$ (1), 0.05 (2), 0.1 (3), 0.2 (4), 0.4 (5), 1 (6),
 4 мс (7)

стремится к нулю. Поэтому для вычислительных целей была задана минимальная скорость звука в «дискретном газе» $a_{2,min} = 10$ м/с.

Сравнение моделей двухфазных течений приведено в таблице. Модель 1 представляет разреженную гетерогенную среду [3], в которой пренебрегают давлением и скоростью звука в фазе частиц. Система является гиперболической, но вырожденной. Газовая фаза и фаза частиц не связаны; для газа имеются три действительные характеристики, для фазы частиц — одна действительная характеристика, отвечающая скорости частиц (плюс две вырожденные характеристики, также отвечающие скорости частиц). Уравнения модели 1 интегрировались с использованием схемы Годунова, которая позволяет получить решение этой вырожденной задачи Римана (см. [38]). Модель 2 соответствует модели настоящей работы. Здесь для фазы частиц («дискретного газа») определены давление и скорость звука. Система является гиперболической. Газовая и дискретная фазы не связаны. Для газа имеются три действительные характеристики, для фазы частиц — также три действительные характеристики и характеристика для твердых частиц. Уравнения модели 2 интегрировались по схеме Годунова [25], разрешающей газодинамические уравнения. Как видно из рис. 1, 2,

Модели двухфазных течений

Номер модели	Формулировка	Гиперболическая структура	Параметры
1	Разреженная гетерогенная среда [3]	Разделенная {3:1}-волновая система: $\{\lambda_{\pm} = v_1 \pm a_1; \lambda_0 = v_1\}$ $\{\lambda_s = v_2\}$	$p_2 = 0$ $a_2 = 0$ $e_s = c_s T_s$
2	«Дискретный газ»	Разделенная {3:3:1}-волновая система: $\{\lambda_{1,\pm} = v_1 \pm a_1; \lambda_{1,0} = v_1\}$ $\{\lambda_{2,\pm} = v_2 \pm a_2; \lambda_{2,0} = v_2\}$ $\{\lambda_s = v_2\}$	$p_2 = (\gamma_2 - 1)\rho_2 u_2$ $\gamma_2 = 5/3$ $a_2 = \sqrt{\gamma_2(\gamma_2 - 1)}u_2$ $e_s = c_s T_s$
3	Плотная гетерогенная среда [8]	Полностью связанная 7-волновая система	$p_2 = p_f(\alpha_1) = P_s^0(1/\alpha_1 + \alpha_1 - 2)$ $a_2 = f(\alpha_1) = \sqrt{(\alpha_1^{-2} - 1)}P_s^0/\rho_2^0$ $e_s = c_s T_s$

давление частиц стремится к нулю по мере расширения фазы частиц (например, $p_2 < 0.1$ атм при $t > 33$ мкс), следовательно, на поздних стадиях модель 2 сводится к модели 1*. Модель 3 суть модель плотной гетерогенной среды [5, 8]. В нее введены давление и скорость звука для описания волн компактирования в порошковой среде. Система является гиперболической, но полностью связанной благодаря силам Архимеда (см. уравнения (1) и (2)). Система имеет семиволновую структуру, которая определяется из численного решения алгебраического уравнения четвертой степени (аналитическое решение не представляется возможным). На рис. 12 представлены распределения сил сопротивления D и сил Архимеда A в процессе формирования ударной волны**.

Из сравнения распределений при одних и тех же моментах времени видно, что силы Архимеда на единицу объема составляют $\approx 1\%$ от сил сопротивления. Таким образом, на основе рис. 11 и 12 можно заключить, что модели 2 и 3 быстро сводятся к модели 1 для рассматриваемой задачи взрыва УДГ. Тем не менее в период прохождения начальной волны уплотнения/разрежения в моделях 2 и 3 учитываются дополнительные силы, меняющие динамику процесса дисперсии. Это, как видно, влияет на форму горения облака.

* При этом численный алгоритм решения модели 2 не сводится к численному алгоритму для модели 1 при $\alpha_2 \rightarrow 0$, так как она сохраняет остаточное (базовое) значение скорости звука 10 м/с.

** Хотя они были оценены в настоящем численном моделировании, проведенном по модели 2.

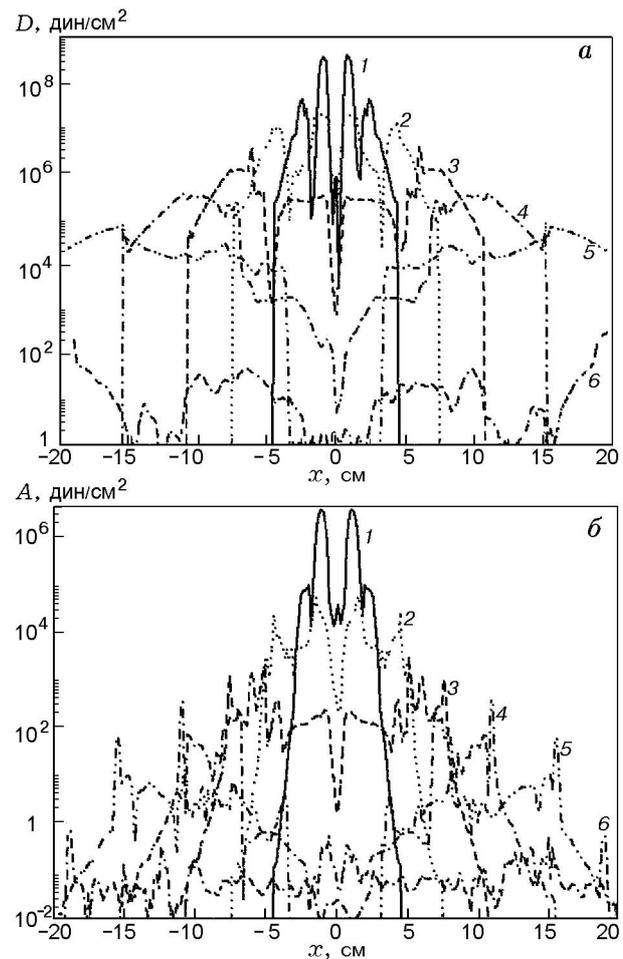


Рис. 12. Распределения силы сопротивления (а) и силы Архимеда (б) в процессе формирования взрывной волны:

$t = 8$ мкс (1), 18 мкс (2), 33 мкс (3), 59 мкс (4), 0.1 мс (5), 0.4 мс (6)

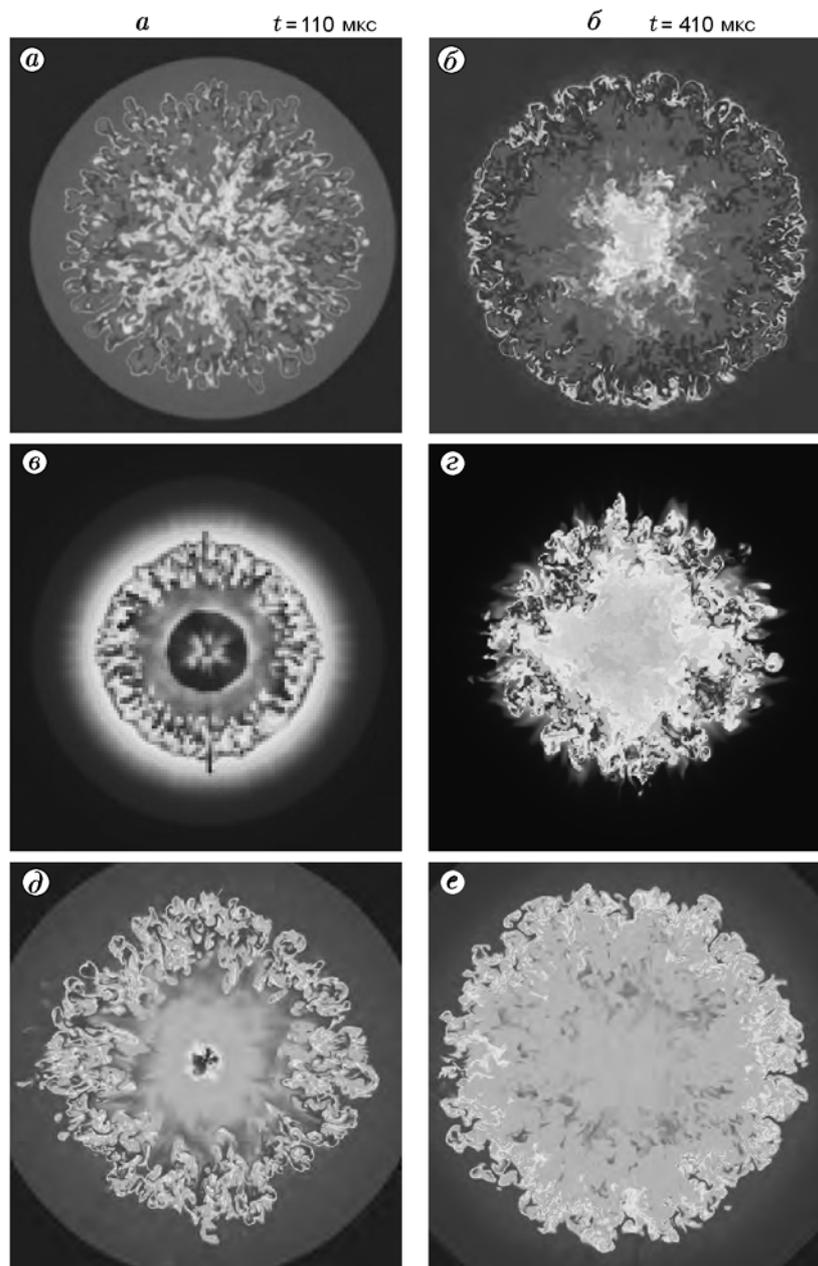


Рис. 13. Поля температур в сечении горящего облака, вычисленные по модели 1 (*a*, *б*), модели 2 (*в*, *г*) и газодинамической модели горения смеси ТНТ — воздух [4] (*д*, *е*)

На рис. 13 приведены поля температур горящего облака, определенные по моделям 1, 2 и газодинамической модели [4] для горения облака ТНТ — воздух. Модель 1 дает поле температур при распределенном сгорании облака (рис. 13,*a*,*б*), заполненное радиальными выступами. Модель 2 воспроизводит сферические кольца горения (рис. 13,*в*,*г*), заполненные вращательными структурами, напоминающи-

ми результаты газодинамического моделирования горения ТНТ — воздух (рис. 13,*д*,*е*). Модель 1 была тщательно верифицирована на основе сравнения с экспериментальными данными [3]. Мы пришли к заключению, что для модели 2 необходим гибридный решатель, который сохранял бы эффекты давления и скорость звука в фазе частиц для «дискретного газа» и переходил в решатель [38] при $a_2 \rightarrow 0$.

Это позволит исключить искусственный нижний предел для скорости звука (10 м/с) и тем самым сохранить характеристики слоя смешения модели 1.

ВЫВОДЫ

В работе предложена модель «дискретного газа», в которой дискретная фаза рассматривается как сплошной одноатомный газ с $\gamma_2 = 5/3$. Для этой фазы вводятся давление $p_2 = (\gamma_2 - 1)\rho_2 u_2$ и скорость звука $a_2 = \sqrt{\gamma_2(\gamma_2 - 1)}u_2$. Внутренняя энергия фазы частиц определяется работой $du_2 = -p_2 dv_2$. Сжатие ограничено величиной $(\gamma_2 + 1)/(\gamma_2 - 1) = 4$ в соответствии с теорией сильных ударных волн. Из этой формулировки следует, что уравнения для обеих фаз являются гиперболическими, но разделенными, так что для каждой фазы имеется свой полный набор собственных значений и собственных векторов. Они могут быть использованы для построения схемы Годунова высокого порядка для интегрирования законов сохранения для каждой фазы. Фазы связаны между собой лишь законами сопротивления, теплообмена и массообмена.

Основной вывод настоящей работы заключается в том, что давление газа частиц влияет на поток только на этапе начального ускорения частиц, когда волна уплотнения проходит через порошок и сменяется волной разрежения от свободной поверхности. После этого давление в фазе частиц быстро убывает, и ускорение частиц определяется сопротивлением. Это указывает на то, что необходим гибридный алгоритм, который решает уравнения модели 2 с нашим газодинамическим решателем на ранних стадиях и выходит асимптотически на решатель [38] уравнений модели 1. Мы надеемся разработать такой гибридный алгоритм в будущем.

Работа выполнена при поддержке Отделения энергетики Ливерморской национальной лаборатории им. Лоуренса (грант DE-AC52-07NA27344.LLNL-JRNL-507371). Авторы выражают признательность коллегам из Центра вычислительной науки и техники в Национальной лаборатории им. Лоуренса в Беркли, особенно д-ру Джону Б. Беллу за его пронизательные критические замечания по постановке задачи, а также Винсенту Э. Бекнеру, разработавшему пакет для азимутального осреднения, высоко оценивая их вклад.

ПРИЛОЖЕНИЕ

АЗИМУТАЛЬНОЕ ОСРЕДНЕНИЕ

Решение вычисляется на эйлеровой сетке. Координаты ячейки преобразуются в сферические $P(x, y, z) \rightarrow P(r, \theta, \varphi)$ по формулам $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$, $\theta = \cos^{-1}(z/r)$, с тем чтобы определить решение в сферической оболочке объемом

$$\delta V = \iint [(r d\theta)(r \sin \theta d\varphi)] \delta r = 4\pi R_n^2 \delta r. \quad (A1)$$

Толщина оболочки предполагается равной размеру ячейки ($\delta r = \Delta$).

Мы разработали алгоритм поиска ячеек $P_n(R_n, \theta, \varphi)$ в объеме оболочки δV радиуса R_n и определения соответствующих полей течения $\Phi_n(R_n, \theta, \varphi)$. Назовем набор для каждого момента времени ансамблем R_n . В каждом ансамбле задается число точек $N = 4\pi(R_n/\Delta)^2$:

N	2 000	$0.5 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$4.6 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$
R_n , см	1	5	10	15	20

(при $\Delta = 8$ мм). Видно, что в каждом ансамбле $N \approx 10^5$ (за исключением области вблизи начала координат), так что можно ожидать, что профили средних величин будут очень гладкими. Средние значения вычисляем из формулы

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(R_n, t)} &= \frac{1}{\delta V(R_n)} \iiint_{\delta V} \Phi(R_n, \theta, \varphi, t) dV \cong \\ &\cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_n. \end{aligned} \quad (A2)$$

Зная $\overline{\Phi(R_n, t)}$, можно определить квадратичные отклонения от средних:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi'(R_n, t)^2} &= \\ &= \frac{1}{\delta V(R_n)} \iiint_{\delta V} [\Phi(R_n, \theta, \varphi, t) - \overline{\Phi(R_n, t)}]^2 dV \cong \\ &\cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\Phi_n - \overline{\Phi(R_n, t)}]^2, \end{aligned} \quad (A3)$$

и корень квадратичных отклонений:

$$\Phi'(R_n, t)_{rms} = \sqrt{\overline{\Phi'(R_n, t)^2}}. \quad (A4)$$

По этим соотношениям определялись соответствующие профили в слое смешения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kuhl A. L., Reichenbach H.** Combustion effects in confined explosions // *Proc. Combust. Inst.* — 2009. — V. 32, N 2. — P. 2291–2298.
2. **Kuhl A. L., Reichenbach H.** Barometric calorimeters // *Хим. физика.* — 2010. — Т. 29, № 3. — С. 89–90.
3. **Кул А. Л., Белл Дж. Б., Бекнер В. Е.** Континуальная модель гетерогенной среды для описания горения частиц алюминия при взрывах // *Физика горения и взрыва.* — 2010. — Т. 46, № 4. — С. 72–89.
4. **Kuhl A. L., Bell J. B., Beckner V. E., Reichenbach H.** Gasdynamic model of turbulent combustion in TNT explosions // *Proc. Combust. Inst.* — 2010. — V. 33, N 2. — P. 2177–2185.
5. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Ч. I.
6. **Ахатов И. Ш., Вайнштейн П. Б.** Нестационарные режимы горения пористых порохов // *Физика горения и взрыва.* — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 53–61.
7. **Ахатов И. Ш., Вайнштейн П. Б.** Переход горения пористых ВВ в детонацию // *Физика горения и взрыва.* — 1984. — Т. 20, № 1. — С. 70–77.
8. **Balakrishnan K., Bell J. B., Kuhl A. L., Howard W. M.** Riemann solver for the Nigmatulin model of two-phase flow // 17th APS Shock Compression in Condensed Media Conference, Chicago, IL, June 26–July 1, 2011.
9. **Chapman S., Cowling T. G.** The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. — Cambridge Univ. Press, 1960.
10. **Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B.** Molecular Theory of Liquids & Gases. — New York: John Wiley, 1954.
11. **Fedorov A. V.** Structure of combined rupture in gas suspensions in the presence of chaotic particle pressure // *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.* — 1992. — V. 33, N 5. — P. 648–652.
12. **Veyssiere B., Khasainov B. A.** Model for steady, plane, double-front detonations (DFD) in gaseous explosive mixtures with aluminum particles in suspension // *Combust. Flame.* — 1991. — V. 85, N 1/2. — P. 241–253.
13. **Korobeinikov V. P., Levin V. A., Markov V. V., Chernyi G. G.** Propagation of blast waves in a combustible gas // *Astronautic. Acta.* — 1972. — V. 17. — P. 529–537.
14. **Oran E. S., Boris J. P., Young T. R., Flanagan M., Picone M.** Simulation of gas phase detonations: introduction of an induction parameter model // *NRL Memorandum Rep. 4255.* — 1980.
15. **Бойко В. М., Лотов В. В., Папырин А. Н.** Воспламенение газозвесей металлических порошков в отраженных УВ // *Физика горения и взрыва.* — 1989. — Т. 25, № 2. — С. 67–74.
16. **Boiko V. M., Poplavski S. V.** Self-ignition and ignition of Al powders in shock waves // *Shock Waves.* — 2002. — V. 11. — P. 289–295.
17. **Гуревич М. А., Степанов А. М.** Диффузионное горение капли жидкого горючего в смеси двух окислителей // *Физика горения и взрыва.* — 1970. — Т. 6, № 2. — P. 243–245.
18. **Kuhl A. L., Boiko V. M.** Ignition of aluminum particles and clouds // *Energetic Materials: High Performance, Insensitive Munitions and Zero Pollution: Proc. of the 41st Intern. Annu. Conf. of ICT.* — 2010. — P. 29.1–29.11.
19. **Kuhl A. L., Khasainov B.** Quadratic model of thermodynamic states in SDF explosions // *Energetic Materials: Characterization and Performance of Advanced Systems: Proc. of the 38st Intern. Annu. Conf. of ICT.* — 2007. — P. 143.1–143.11.
20. **Fried L. E.** CHEETAH 1.22 User's Manual // Report No. UCRL-MA-117541, LLNL. — 1995.
21. **Ree F. H., Pitz W. J., van Thiel M., Souers P. C.** Over-abundance of carbon monoxide in calorimeter tests // *J. Phys. Chem.* — 1996. — V. 100. — P. 5761–5765.
22. **Van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme V: a second-order sequel to Godunov's methods // *J. Comp. Phys.* — 1979. — V. 32. — P. 101–136.
23. **Colella P., Glaz H. M.** Efficient solution algorithms for the Riemann problem for real gases // *J. Comp. Phys.* — 1985. — V. 59. — P. 264–289.
24. **Colella P., Woodward P. R.** The piecewise parabolic method (PPM) for gasdynamical simulations // *J. Comp. Phys.* — 1984. — V. 54. — P. 174–201.
25. **Bell J. B., Colella P., Trangenstein J. A.** Higher order Godunov methods for general systems of hyperbolic conservation laws // *J. Comp. Phys.* — 1989. — V. 92, N 2. — P. 362–397.
26. **Colella P.** Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws // *J. Comp. Phys.* — 1990. — V. 87. — P. 171–200.
27. **Berger M. J., Colella P.** Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // *J. Comp. Phys.* — 1989. — V. 82, N 1. — P. 64–84.
28. **Bell J., Berger J. M., Saltzman J., Welcome M.** A three-dimensional adaptive mesh refinement for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* — 1994. — V. 15, N 1. — P. 127–138.
29. **Pember R. B., Bell J. B., Colella P., Crutchfield W. Y., Welcome M. L.** An adaptive cartesian grid method for unsteady compressible flow in complex geometries // *J. Comp. Phys.* — 1995. — V. 120, N 1. — P. 278–304.
30. **Crutchfield W. Y., Welcome M. L.** Object-oriented implementation of adaptive mesh refinement algorithms // *Scient. Programming.* — 1993. — N 2. — P. 145–156.

31. **Rendleman C. A., Beckner V. E., Lijewski M., Crutchfield W. Y., Bell J. B.** Parallelization of structured, hierarchical adaptive mesh refinement algorithms // *Comput. and Visualization in Sci.* — 2000. — V. 3.
32. **Boris J. P.** On large eddy simulations using sub-grid turbulence models // *Wither Turbulence? Turbulence at the Crossroads* / J. L. Lumley (Ed.). — Springer-Verlag, Berlin, 1989. — P. 344–353. — (Lecture Notes in Phys.; V. 257).
33. **Implicit Large-Eddy Simulation: Computing Turbulent Fluid Dynamics** / F. F. Grinstein, L. G. Margolin, W. J. Rider (Eds.). — Cambridge Univ. Press, 2007.
34. **Aspden A. J., Nikiforakis N., Dalziel S. B., Bell J. B.** Analysis of implicit LES methods // *Comm. Appl. Math. and Comput. Sci.* — 2008. — V. 3. — P. 103–126.
35. **Brode H. L.** A calculation of the blast wave from a spherical charge of TNT /// *Rand Rep. RM-1965.* — Rand Corp., Santa Monica, 1957.
36. **Brode H. L.** Blast wave from a spherical charge // *Phys. Fluids.* — 1959. — V. 2, N 2. — P. 217–229.
37. **Kuhl A. L.** Spherical mixing layers in explosions // *Dynamics of Exothermicity* / J. R. Bowen (Ed.). — Longhorn; Pennsylvania: Gordon and Breach Publishers, 1996. — P. 290–320.
38. **Collins P., Ferguson R. E., Chien K.-Y., Kuhl A. L., Krispin J., Glaz H. M.** Simulation of shock-induced dusty gas flows using various models // *AIAA Paper 94-2309 (AIAA Fluid Dynamics Conference).* — 1994.

*Поступила в редакцию 18/XI 2011 г.,
в окончательном варианте — 3/II 2012 г.*
