

3. Герцберг Г. Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул.— М.: ИЛ, 1949.
4. Waldmann L. von, Trübenbacher E. Formale kinetische Theorie von Gasgemischen aus anregbaren Molekülen // Zeitschrift für Naturforschung.— 1962.— Bd 17a, N 5.
5. Сухинин Г. И. Релаксационное представление уравнений кинетики.— Новосибирск, 1986.— (Препринт/ИТФ СО АН СССР; № 144).
6. Montroll E. W., Shuler K. E. Studies in nonequilibrium rate processes. 1. The relaxation of a system of harmonic oscillators // J. Chem. Phys.— 1957.— V. 26, N 3.
7. Brunner T. A., Pritchard D. Fitting laws for rotationally inelastic collisions // Dynamics of the Excited State/Ed. K. P. Lawley.— N. Y.: John Wiley, 1982.
8. Осипов А. И. Вращательная релаксация в газах // ИФЖ.— 1985.— Т. 49, № 1.
9. Дубровский Г. В. Упрощенные кинетические подходы к динамике структурного релаксирующего газа // ЖТФ.— 1982.— Т. 52, вып. 10.

Поступила 31/X 1986 г.

УДК 533.9.082.76

### АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ИМПЕДАНСА ПРИКАТОДНОГО СЛОЯ В ПЛАЗМЕ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ГАЗОВ

М. С. Бенилов, Э. Г. Камалов

(Москва)

Континуальный расчет вольт-амперной характеристики пограничного слоя слабоионизованной плазмы молекулярных газов на неэмитирующем катоде с учетом зависимости переносных и кинетических коэффициентов плазмы от напряженности электрического поля выполнен в [1]. Данная работа посвящена расчету импеданса такого пограничного слоя.

Ранее задача расчета импеданса столкновительной приэлектродной области с учетом нестационарных эффектов в дебаевском слое рассматривалась в [2—5] для химически замороженного дебаевского слоя и в [6] для дебаевского слоя с ионизацией внешним источником. Для получения приближенного аналитического решения использовалось априорное разделение области возмущения на дебаевский слой и квазинейтральную область с некоторыми также априорными условиями сшивки на (нестационарной) внешней границе дебаевского слоя. В данной работе для решения как нелинейной стационарной задачи, так и линейной задачи для возмущений используется метод сращиваемых асимптотических разложений.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим газодинамический пограничный слой слабоионизованной плазмы на плоской электропроводящей поверхности. Плазма содержит нейтральные частицы, однозарядные положительные ионы и электроны. Для распределений мольных долей  $x_i$ ,  $x_e$  и плотностей диффузионных потоков  $J_i$ ,  $J_e$  ионов и электронов, напряженности электрического поля будем использовать гидродинамическую систему уравнений, которую по аналогии с [7] запишем в виде

$$\begin{aligned}
 J_i &= -nD_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial y} - x_i \frac{eE^0}{kT} \right), \quad J_e = -nD_e \frac{\partial x_e}{\partial y} - nx_e \mu_e^0 E^0, \\
 n \frac{\partial x_i}{\partial t^0} + \frac{\partial J_i}{\partial y} &= f_{i1} - k_{r1} n_i n_e + k_{i2} n_e, \\
 j^0 &= c(J_i - J_e) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E^0}{\partial t^0}, \quad \frac{\partial j^0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E^0}{\partial y} = 4\pi c n(x_i - x_e).
 \end{aligned}$$

Здесь  $t_0$  — время; ось  $y$  направлена по нормали от стенки;  $n$  — полная концентрация частиц плазмы;  $n_i = nx_i$ ,  $n_e = nx_e$  — концентрации ионов и электронов ( $n_i \ll n$ ,  $n_e \ll n$ );  $D_i$ ,  $D_e$  — коэффициенты диффузии ионов и электронов;  $\mu_e^0$  — подвижность электронов;  $j^0$  — плотность полного электрического тока (включающего токи проводимости и смещения);  $T$  — температура тяжелых частиц;  $e$  — заряд электрона;  $k$  — постоянная Больцмана; члены в правой части третьего уравнения учитывают согласно [1] ступенчатую ионизацию с участием тяжелых частиц, соответствующий обратный процесс (рекомбинацию) и прямую ионизацию электронным ударом (этот процесс существен при достаточно больших

$E^0$ );  $f_{i1}$  — скорость ступенчатой ионизации;  $k_{r1}$  — коэффициент ступенчатой рекомбинации;  $k_{i2}n_e$  — скорость прямой ионизации. Предполагается, что подвижность и коэффициент диффузии ионов связаны соотношением Эйнштейна, конвективный перенос заряженных частиц считается пренебрежимо малым по сравнению с объемной ионизацией.

Для простоты пренебрежем зависимостью коэффициентов диффузии ионов и электронов от  $E^0$ . Зависимость коэффициента ступенчатой рекомбинации от  $E^0$  также будем пренебрегать, тогда справедливо представление  $f_{i1} = k_{r1}n_{er}^2$ , где  $n_{er}$  — химически равновесная квазинейтральная концентрация заряженных частиц в пределе слабого поля. Таким образом,  $D_i, D_e, k_{r1}, n_{er}$  предполагаются заданными функциями локальных  $T, n$  и парциального состава нейтральных компонентов, а  $\mu_e^0, k_{i2}$  — заданными функциями тех же аргументов и  $E^0$ . При проведении конкретных расчетов ниже для этих функций использованы зависимости из [1].

Будем считать, что джоулево тепловыделение в пограничном слое существенно меньше конвективного теплового потока, и пренебрежем влиянием наличия ионизации на поле течения нейтральной составляющей. Тогда функции  $T, n$  и парциальный состав нейтральных компонентов могут быть найдены из решения соответствующей газодинамической задачи без учета наличия ионизации и в данной постановке предполагаются заданными функциями координаты  $y$ .

На поверхности электрода, которую полагаем идеально поглощающей, каталитической и неэмитирующей, концентрации заряженных частиц могут быть приняты равными нулю; на расстояниях, существенно превышающих масштаб толщины пограничного слоя  $\delta$ , концентрации стремятся к заданному значению  $n_{er\infty}$  (индекс  $\infty$  приписан значениям соответствующих функций на внешней границе пограничного слоя):  $y = 0$ :  $x_i = x_e = 0, y/\delta \rightarrow \infty, x_i \rightarrow n_{er\infty}/n_\infty, z_e \rightarrow n_{er\infty}/n_\infty$ .

В качестве недостающего граничного условия зададим значение плотности электрического тока  $j^0$ . Преобразуем сформулированную задачу к безразмерным переменным:

$$(1.1) \quad I_i = -a(z_i' - \Theta^{-1}z_i E), \quad I_e = -az_e' - \mu z_e E;$$

$$(1.2) \quad \frac{\alpha}{\Theta} \frac{\partial z_i}{\partial t} + I_i' = 2b\chi^{-1}(r^2 - z_i z_e + cz_e);$$

$$(1.3) \quad I_e = \beta \left( I_i - \frac{j}{\chi} + \varepsilon \alpha \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (j = j(t) \text{ задано});$$

$$(1.4) \quad \varepsilon \Theta E' = z_i - z_e;$$

$$(1.5) \quad \eta = 0: z_i = z_e = 0, \eta \rightarrow \infty: z_i \rightarrow 1, z_e \rightarrow 1,$$

$$\bar{\eta}_i = \frac{y}{\delta}, \quad t = \lambda t^0, \quad E = \frac{e\delta E^0}{kT_\infty}, \quad \bar{z}_m = \frac{x_m n_\infty}{n_{er\infty}}, \quad I_m = \frac{\delta J_m}{D_{m\infty} n_{er\infty}}$$

$$(m = i, e), \quad a = \frac{nD_i}{n_\infty D_{i\infty}} = \frac{nD_e}{n_\infty D_{e\infty}}, \quad \Theta = \frac{T}{T_\infty}, \quad \mu = \frac{kT_\infty n \mu_e^0}{eD_{e\infty} n_\infty},$$

$$b = \frac{k_{r1} n^2}{k_{r1\infty} n_\infty^2}, \quad r = \frac{n_{er} n_\infty}{n_{er\infty} n}, \quad c = \frac{k_{i2} n_\infty}{k_{r1} n_{er\infty} n}, \quad \alpha = \delta^2 \lambda / D_{i\infty},$$

$$\chi = \frac{2D_{i\infty}}{k_{r1\infty} n_{er\infty} \delta^2}, \quad \beta = \frac{D_i}{D_e}, \quad \varepsilon = \frac{kT_\infty}{4\pi n_{er\infty} e^2 \delta^3}, \quad j = \frac{\chi \delta j^0}{eD_{i\infty} n_{er\infty}}.$$

Здесь для простоты принято, что отношение коэффициентов диффузии ионов и электронов постоянно в объеме пограничного слоя; функция  $n/n_\infty$  при записи левых частей (1.2) и (1.4) в соответствии с условием постоянства давления поперек пограничного слоя принята равной  $\Theta^{-1}$ ;  $\lambda$  — величина, обратная характерному времени рассматриваемых возмущений; штрих означает дифференцирование по  $\eta$ . Согласно сказанному,

$\Theta, a, b, r, c, \mu$  предполагаются заданными функциями:

$$(1.6) \quad \Theta = \Theta(\eta), \quad a = a(\eta), \quad b = b(\eta), \quad r = r(\eta), \quad c = c(\eta, E), \\ \mu = \mu(\eta, E).$$

Будем полагать, что (заданная) функция  $j(t)$  содержит стационарную и малую составляющие с экспоненциальной зависимостью от времени (возмущение)  $j(t) = j^s + \nu j^p \exp(-\lambda t^0) = j^s + \nu j^p \exp(-t)$ , где  $j^s, j^p, \nu$  — заданные параметры;  $j^p = O(j^s)$ ;  $\nu = o(1)$ . Показатель экспоненты в общем случае комплексный ( $\lambda$  — величина комплексная, причем наряду с чисто мнимыми значениями ее в связи с анализом вопросов устойчивости рассмотрим также значения с ненулевой реальной частью).

Решение задачи ищем в аналогичном виде. Для функций с индексом  $s$ , описывающих стационарное основное состояние, имеем задачу, аналогичную (1.1)—(1.6) (без нестационарных членов; вместо  $z_m, I_m, E, j, \mu, c$  будут  $z_m^s, I_m^s, E^s, j^s, \mu^s, c^s$ ). Для функций с индексом  $p$ , описывающих возмущения, вызванные возмущением плотности тока, получим линейризованную задачу.

**2. Асимптотическая постановка.** Стационарная задача и задача для возмущений содержат безразмерные определяющие параметры  $\epsilon, \chi, \beta, j^s, j^p, \alpha$ . В типичных условиях [1] первые три из них порядка  $10^{-8}, 10^{-4}, 10^{-2}$  соответственно и в асимптотическом анализе считаются малыми. Заметим, что малость  $\epsilon, \chi$  означает квазинейтральность и ионизационное равновесие во внешней части пограничного слоя, малость  $\beta$  учитывает отличие в дрейфовых скоростях ионов и электронов. Установим между  $\epsilon, \chi, \beta$  следующие соотношения порядка:  $\epsilon/\chi \rightarrow 0, \beta = k_1 \chi^{1/2}$ , где  $k_1$  фиксировано. Параметр  $j^s$  считаем отрицательным и фиксированным, что отвечает случаю толстого прикатодного дебаевского слоя с интенсивной генерацией заряженных частиц [7]. Параметр  $j^p$  в соответствии со сказанным предполагается сравнимым с  $j^s$  и, следовательно, также фиксированным. Параметр  $\alpha$  может меняться в широких пределах: в данной работе рассмотрены случаи  $\alpha = O[(\epsilon\chi)^{-1/2}]$ ,  $\alpha = O(\epsilon^{-1/2}\chi^{-1})$ , отвечающие возмущениям с характерными временами порядка времен дрейфа через дебаевский слой ионов или электронов.

Согласно результатам [1], прямая ионизация и зависимость  $\mu_e^0$  от  $E^0$  становятся существенными только в дебаевском слое, вне этого слоя скорость прямой ионизации экспоненциально мала,  $\mu_e^0 = eD_e(kT)^{-1}$ . Поэтому примем, что функции  $c, \mu$  имеют вид  $c = \epsilon^{-1/2}w_1(\epsilon\chi E^2)$ ,  $\mu = a\Theta^{-1}w_2(\epsilon\chi E^2)$ , где  $w_1 = w_1(x), w_2 = w_2(x)$  — заданные функции, первая из которых в нуле экспоненциально затухает, а вторая стремится к единице (они зависят также от  $\eta$ ).

**3. Асимптотическое решение.** Рассмотрим возмущения с характерным временем порядка времени дрейфа ионов через дебаевский слой:  $\alpha = (\epsilon\chi)^{-1/2}\alpha_1, \alpha_1 = O(1)$ . Асимптотические разложения решений стационарной задачи и задачи о возмущениях, справедливые во внешней (равновесной) части пограничного слоя, запишем как

$$z_i^s = r + \dots, \quad z_e^s = r + \dots, \quad I_i^s = \chi^{-1/2}k_1 j^s + \dots, \\ I_e^s = -\chi^{-1/2}k_1 j^s + \dots, \quad E^s = \chi^{-1/2}k_1 \Theta j^s / (ar) + \dots, \\ z_i^p = (-\epsilon^{3/2}\chi^{-1/2}br\Theta/\alpha_1 + \epsilon k_1) k_1 \Theta j^p (\Theta a^{-1}r^{-1})' + \dots, \\ z_e^p = -\epsilon\chi^{-1/2}k_1 \Theta j^p (\Theta a^{-1}r^{-1})' + \dots, \quad I_i^p = \chi^{-1/2}k_1 j^p + \dots, \\ I_e^p = -\chi^{-1/2}k_1 j^p + \dots, \quad E^p = \frac{\chi^{-1/2}\Theta k_1 j^p}{ar} + \dots, \quad \eta_D < \eta < \infty.$$

Введенная здесь толщина слоя объемного заряда  $\eta_D$  является функцией плотности тока и должна быть найдена в процессе решения стационарной задачи.

Разложения, справедливые в первом переходном слое:

$$\begin{aligned}
 z_i^s &= g_2(\eta_2) + \dots, & z_e^s &= g_2(\eta_2) + \dots, \\
 I_i^s &= \chi^{-1/2}(k_1 j^s - 2a_D dg_2/d\eta_2) + \dots, & I_e^s &= -\chi^{-1/2}k_1 j^s + \dots, \\
 E^s &= \chi^{-1/2}\Theta_D(k_1 j^s - a_D dg_2/d\eta_2)/(a_D g_2) + \dots, \\
 z_i^p &= \left(\frac{\varepsilon}{\chi}\right)^{3/2} \frac{k_1 \Theta_D^3 j^p}{\alpha_1} \left[ \frac{d^2}{d\eta_2^2} \left( \frac{k_1 j^s}{a_D g_2^2} - \frac{2}{g_2^2} \frac{dg_2}{d\eta_2} \right) + \frac{2b_D}{a_D g_2} \frac{dg_2}{d\eta_2} \right] - \\
 &\quad - \frac{\varepsilon}{\chi^{1/2}} \frac{k_1^2 \Theta_D^2 j^p}{a_D g_2^2} \frac{dg_2}{d\eta_2} + \dots, \\
 z_e^p &= \varepsilon \chi^{-1} k_1 \Theta_D^2 j^p (dg_2/d\eta_2)/(a_D g_2^2) + \dots, \\
 I_i^p &= \chi^{-1/2} k_1 j^p + \dots, & I_e^p &= -\chi^{-1/2} k_1 j^p + \dots, & E^p &= \frac{\chi^{-1/2} k_1 \Theta_D j^p}{a_D g_2} + \dots, \\
 &0 < \eta_2 = \chi^{-1/2}(\eta - \eta_D) < \infty, \\
 g_2 &= r_D \frac{(v^2 - 10v + 1)}{(v^2 + 2v + 1)}, & v &= (5 + 2\sqrt{6}) \exp[(2b_D r_D/a_D)^{1/2} \eta_2].
 \end{aligned}$$

Здесь и ниже индекс  $D$  приписан значениям функций при  $\eta = \eta_D$ .

Разложение решения задачи для возмущений в дополнительном переходном слое для возмущений имеет вид

$$\begin{aligned}
 z_i^p &= \varepsilon^{1/4} \chi^{-3/4} C_1 \exp(-Q\eta_3) + \dots, & z_e^p &= \varepsilon^{1/4} \chi^{-3/4} C_1 \exp(-Q\eta_3) + \dots, \\
 I_i^p &= \chi^{-1/2} a_D Q C_1 \exp(-Q\eta_3) + \dots, & I_e^p &= \chi^{-1/2} k_1 [2a_D Q C_1 \exp(-Q\eta_3) - \\
 &\quad - j^p] + \dots, & E^p &= \frac{\Theta_D C_1 \exp(-Q\eta_3)}{\varepsilon^{1/4} \chi^{3/4} \gamma} \left( \frac{4q+1}{\eta_3^2} + \frac{Q}{\eta_3} \right) + \dots, \\
 &0 < \eta_3 = \frac{\eta - \eta_D}{(\varepsilon \chi)^{1/4}} < \infty, \\
 Q &= \left( -\frac{\alpha_1}{2a_D \Theta_D} \right)^{1/2}, & \gamma &= \left( \frac{4b_D r_D^3}{3a_D} \right)^{1/2}, & q &= -\frac{k_1 j^s}{4a_D \gamma},
 \end{aligned}$$

где  $C_1$  — неизвестная постоянная, значение которой определено ниже;  $\text{Re } Q > 0$ . При выводе этого разложения из рассмотрения исключены действительные положительные значения  $\alpha$ .

Разложения, справедливые во втором переходном слое, ищем в виде

$$\begin{aligned}
 z_i^s &= (\varepsilon/\chi)^{1/5} g_4(\eta_4) + \dots, & z_e^s &= (\varepsilon/\chi)^{1/3} f_4(\eta_4) + \dots, \\
 I_i^s &= \frac{k_1 j^s - 2a_D \gamma}{\chi^{1/2}} + \dots, & I_e^s &= -\frac{k_1 j^s}{\chi^{1/2}} + \dots, & E^s &= \frac{E_4(\eta_4)}{\varepsilon^{1/3} \chi^{1/6}} + \dots, \\
 z_i^p &= \varepsilon^{1/4} \chi^{-3/4} g_4^p(\eta_4) + \dots, & z_e^p &= \varepsilon^{1/4} \chi^{-3/4} f_4^p(\eta_4) + \dots, \\
 I_i^p &= \chi^{-1/2} a_D Q C_1 + \dots, & I_e^p &= \chi^{-1/2} k_1 (2a_D Q C_1 - j^p) + \dots, \\
 E^p &= \frac{E_4^p(\eta_4)}{\varepsilon^{5/12} \chi^{7/12}} + \dots, & -\infty &< \eta_4 = \frac{\eta - \eta_D}{\varepsilon^{1/3} \chi^{1/6}} < \infty.
 \end{aligned}$$

Граничными условиями при  $\eta_4 \rightarrow -\infty$  являются условия затухания функций  $g_4$ ,  $f_4$  и условие отсутствия экспоненциального роста решения задачи для возмущений. Анализ показывает, что асимптотики решений задач при  $\eta_4 \rightarrow -\infty$  следующие:

$$\begin{aligned}
 g_4 &= (2q+1)\gamma^{1/2}\Theta_D(-\eta_4)^{-1/2} + \dots, & f_4 &= 2q\gamma^{1/2}\Theta_D(-\eta_4)^{-1/2} + \dots, \\
 E_4 &= -2(-\gamma\eta_4)^{1/2} + \dots, & g_4^p &= \gamma^{-1/2}(-\eta_4)^{-3/2}\Theta_D C_1 (2q+1)/2 + \dots, \\
 f_4^p &= \gamma^{-1/2}(-\eta_4)^{-3/2}q\Theta_D C_1 + \dots, & E_4^p &= C_1(-\gamma\eta_4)^{-1/2} + \dots
 \end{aligned}$$

Разложения, справедливые в третьем переходном слое:

$$\begin{aligned} z_i^s &= \varepsilon^{1/2} \chi^{-1/2} \frac{\Theta_D C_5^s}{a_D E_5} + \dots, \quad z_e^s = \varepsilon^{1/2} \chi^{-1/2} \frac{k_1 j^s \Theta_D}{a_D E_5} + \dots, \\ I_i^s &= \chi^{-1/2} G_5(\eta_2) + \dots, \quad I_e^s = -\chi^{-1/2} k_1 j^s + \dots, \quad E^s = \varepsilon^{-1/2} E_5(\eta_2) + \dots, \\ z_i^p &= \varepsilon^{1/2} \chi^{-1} g_5^p(\eta_2) + \dots, \quad z_e^p = \varepsilon^{1/2} \chi^{-1} f_5^p(\eta_2) + \dots, \\ I_i^p &= \chi^{-1} G_5^p(\eta_2) + \dots, \quad I_e^p = \chi^{-1/2} F_5^p(\eta_2) + \dots, \quad E^p = (\varepsilon \chi)^{-1/2} E_5^p(\eta_2) + \dots, \\ &-\infty < \eta_2 < 0, \quad G_5 = 2b_D r_D^2 \eta_2 + k_1 j^s - 2a_D \gamma, \\ &E_5 = -(2b_D r_D^2 \eta_2^2 / a_D - 4\gamma \eta_2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Асимптотика решения для возмущений при  $\eta_2 \rightarrow -\infty$  определяется знаком величины  $\operatorname{Re} \alpha_1/p - 1$ . Поскольку для целей настоящей работы основной интерес представляют гармонические ( $\operatorname{Re} \alpha = 0$ ) и нарастающие ( $\operatorname{Re} \alpha < 0$ ) возмущения, то будем далее считать указанную величину отрицательной. Тогда асимптотиками для возмущений при  $\eta_2 \rightarrow -\infty$  будут

$$\begin{aligned} g_5^p &= O(\eta_2^{-2}), \quad f_5^p = -k_1 j^s a_D^2 \Theta_D C_1 C_2 / (p^3 \eta_2^2) + \dots, \\ G_5^p &\rightarrow a_D C_1 C_2, \quad F_5^p \rightarrow k_1 (1 - \alpha_1/p) a_D C_1 C_2 - k_1 j^p, \\ E_5^p &\rightarrow a_D p^{-1} C_1 C_2, \quad p = (2a_D b_D)^{1/2} r_D, \end{aligned}$$

где  $C_2$  — известная величина (способ ее определения для краткости не приводится).

Разложения, справедливые в дебаевском слое ( $0 < \eta < \eta_D$ ), ищем в виде

$$\begin{aligned} z_i^s &= \varepsilon^{1/2} \chi^{-1/2} g_6(\eta) + \dots, \quad z_e^s = \varepsilon^{1/2} f_6(\eta) + \dots, \\ I_i^s &= \chi^{-1} G_6(\eta) + \dots, \quad I_e^s = \chi^{-1/2} F_6(\eta) + \dots, \quad E^s = (\varepsilon \chi)^{-1/2} E_6(\eta) + \dots, \\ z_i^p &= \varepsilon^{1/2} \chi^{-1/2} g_6^p(\eta) + \dots, \quad z_e^p = \varepsilon^{1/2} f_6^p(\eta) + \dots, \\ I_i^p &= \chi^{-1} G_6^p(\eta) + \dots, \quad I_e^p = \chi^{-1/2} F_6^p(\eta) + \dots, \quad E^p = (\varepsilon \chi)^{-1/2} E_6^p(\eta) + \dots \end{aligned}$$

Стационарная задача в дебаевском слое:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} G_6 &= a g_6 E_6 / \Theta, \quad F_6 = -\mu_6 f_6 E_6, \\ G_6' &= 2b(r^2 + c_6 f_6), \quad F_6 = k_1 (G_6 - j^s), \quad \Theta E_6' = g_6; \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \eta \rightarrow \eta_D: \quad g_6 \rightarrow \frac{p \Theta r}{a_D}, \quad f_6 = \frac{k_1 j^s \Theta_D}{p(\eta - \eta_D)} + \dots,$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} G_6 &= 2b_D r_D^2 (\eta - \eta_D) + \dots, \quad F_6 \rightarrow -k_1 j^s, \quad E_6 = \frac{\bar{r}}{a_D} (\eta - \eta_D) + \dots; \\ \eta = 0: \quad &f_6 = 0, \quad c_6 = w_1(E_6^2), \quad \mu_6 = (a/\Theta) w_2(E_6^2). \end{aligned}$$

Можно показать, что граничные условия (3.2) с учетом уравнений (3.1) эквивалентны следующим двум соотношениям:

$$(3.4) \quad G_6(\eta_D) = E_6(\eta_D) = 0.$$

Таким образом, стационарная задача для дебаевского слоя (3.1), (3.3), (3.4) замкнута: для определения двух постоянных интегрирования и постоянной  $\eta_D$  имеем три граничных условия. Аналитического решения эта задача в общем случае не имеет и должна решаться численно; в данной работе используется итерационный алгоритм [1].

Задача для возмущений в дебаевском слое:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} G_6^p &= (a/\Theta) (g_6^p E_6 + g_6 E_6^p), \\ F_6^p &= -\mu_6 (f_6^p E_6 + f_6 E_6^p) - 2a \Theta^{-1} w_4 E_6^2 f_6 E_6^p, \end{aligned}$$

$$-(\alpha_1/\Theta)g_6^p + (G_6^p)' = 2b(c_6f_6^p + 2w_3E_6f_6E_6^p),$$

$$F_6^p = k_1(G_6^p - j^p - \alpha_1E_6^p), \quad \Theta(E_6^p)' = g_6^p;$$

$$(3.6) \quad \eta \rightarrow \eta_D: \quad g_6^p = o[(\eta - \eta_D)^{-1}], \quad f_6^p = -\frac{k_1j^s a_D^2 \Theta_D C_1 C_2}{p^3 (\eta - \eta_D)^2} + \dots,$$

$$G_6^p \rightarrow a_D C_1 C_2, \quad F_6^p \rightarrow k_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{p}\right) a_D C_1 C_2 - k_1 j^p, \quad E_6^p \rightarrow a_D C_1 C_2 / p;$$

$$(3.7) \quad \eta = 0: \quad f_6^p = 0$$

( $w_3, w_4$  — производные функций  $w_1(x), w_2(x)$ ).

Условия сращивания (3.6) эквивалентны условию

$$(3.8) \quad \eta \rightarrow \eta_D: \quad E_6^p = O(1).$$

Задача (3.5), (3.7), (3.8) замкнута; ее можно решить (в общем случае численно) и затем найти бывшую до сих пор не определенной постоянную  $C_1$ . Разложения, справедливые в диффузионном слое (при  $\eta = O[(\epsilon\chi)^{1/2}]$ ), для краткости не выписываются.

Рассмотрим некоторые особенности построенных решений стационарной задачи. Оценивая падения напряжения в каждой из асимптотических областей, получаем, что определяющий вклад в полное падение в пограничном слое вносит дебаевский слой. Поэтому для расчета вольт-амперной характеристики пограничного слоя в первом приближении достаточно решить задачу (3.1), (3.3), (3.4).

Интересно сравнить наши результаты с результатами [1, 7], полученными в пределе  $\epsilon \rightarrow 0, \chi \rightarrow 0, \beta$  фиксировано. Можно показать, что задача (3.1), (3.3), (3.4) может быть получена предельным переходом  $\beta \rightarrow 0$  из соответствующей задачи [7] (если последнюю дополнить, как это сделано в [1], членами, учитывающими прямую ионизацию и зависимость подвижности электронов от напряженности электрического поля), поэтому вольт-амперные характеристики с точностью до  $\beta$  совпадают. С другой стороны, асимптотическая структура переходной зоны между равновесной областью и дебаевским слоем оказывается, вообще говоря, существенно различной.

Если исключить из рассмотрения прямую ионизацию, то распределения концентрации и диффузионного потока ионов и напряженности электрического поля в дебаевском слое могут быть найдены без учета присутствия электронов, после чего находятся распределения концентрации и диффузионного потока электронов. Этот вывод согласуется с предположением работы [8], в которой при формулировке системы уравнений, описывающей дебаевский слой с ионизацией внешним источником, присутствием электронов пренебрегалось. Задача (3.1), (3.3), (3.4) при этом разрешима в квадратурах.

Интересные особенности построенных решений для возмущений — это немонотонный характер изменения порядков величин искоемых функций, а также неквазинейтральность решения во всех областях, кроме дополнительного переходного слоя (в частности, возмущения неквазинейтральны даже в равновесной области).

Определяющий вклад в возмущения полного падения напряжения вносит дебаевский слой. Система (3.5), описывающая распределение возмущений в дебаевском слое, аналогична системе уравнений для стационарного решения (3.1) (в том смысле, что ее можно получить, вводя в (3.1) нестационарные члены и производя линеаризацию). Граничные условия на стенке также аналогичны. Отличие вида граничных условий при  $\eta \rightarrow \eta_D$  связано с тем обстоятельством, что толщина дебаевского слоя есть функция плотности тока.

Определяя импеданс пограничного слоя  $R^0$  как отношение возмущения падения напряжения к возмущению плотности тока, в первом при-

ближении находим

$$(3.9) \quad R^0 = [\delta k T_\infty / (e^2 D_{i\infty} n_{eT\infty})] R;$$

$$(3.10) \quad R = \left(\frac{\chi}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{1}{j^p} \int_0^{\eta_D} E_0^p d\eta,$$

где  $E_0^p$  — решение задачи (3.5), (3.7), (3.8), которое, вообще говоря, должно быть найдено численно.

Если исключить из рассмотрения прямую ионизацию, то уравнения для возмущений в дебаевском слое, как и стационарные, разделяются, и их решение может быть найдено в квадратурах. Если сделать дальнейшие упрощения, а именно предположить, что при  $\eta \leq \eta_D$   $br^2 \equiv \text{const}$ ,  $a \equiv \text{const}$ , то эти интегралы берутся аналитически. В результате  $R = (\chi/\varepsilon)^{1/2} \eta_D / (p - \alpha_1)$ .

В размерных переменных эту формулу запишем в виде

$$(3.11) \quad R^0 = \frac{R_d^0 R_C^0}{R_d^0 + R_C^0}, \quad R_d^0 = \frac{dU^s}{dj^{s0}}, \quad R_C^0 = -\frac{4\pi y_D}{\lambda}$$

( $U^s$ ,  $j^{s0}$ ,  $y_D$  — размерные значения соответственно стационарных падения напряжения в дебаевском слое, плотности тока, толщины слоя). Отсюда следует, что в данном частном случае импеданс слоя в первом приближении совпадает с комплексным сопротивлением контура, состоящего из параллельно соединенных сопротивлений, которое равно дифференциальному сопротивлению слоя  $R_d^0$  и конденсатора с расстоянием  $y_D$  между обкладками.

Приведем еще асимптотический вид формул (3.9), (3.10) при больших  $\alpha_1$ , который можно получить из асимптотического решения задачи (3.5), (3.7), (3.8) (при этом функция  $\bar{E}_0^p$  оказывается в первом приближении постоянной и равной  $-j^p/\alpha_1$ ):

$$(3.12) \quad R = -(\chi/\varepsilon)^{1/2} \eta_D / \alpha_1, \quad R^0 = R_C^0.$$

Случай возмущений с характерным временем порядка времени дрейфа электронов  $\alpha = O(\varepsilon^{-1/2} \chi^{-1})$  может быть исследован аналогично рассмотренному выше. Не указывая подробных результатов, заметим, что для импеданса получается формула, совпадающая с (3.12).

Сделаем одно замечание методического характера. В ряде случаев первые члены смежных асимптотических разложений некоторых функций не сращиваются между собой. Важно, однако, что каждый из указанных первых членов, будучи преобразован к смежной переменной, имеет порядок, меньший порядка первого члена смежного разложения. Это обстоятельство позволяет предположить, что первые члены указанных разложений сращиваются с членами смежных разложений, имеющими порядок выше первого. С учетом такого предположения можно ожидать, что данные результаты достаточны для практического использования; в частности, асимптотические представления функций в промежуточных областях находятся сложением асимптотик первых членов смежных разложений. С точки зрения методической, чтобы получить сращивание и проверить данное предположение, надо использовать или высшие приближения, или промежуточный предельный переход.

**4. Результаты для импеданса.** Формула (3.10) может рассматриваться как равномерно пригодная при всех указанных значениях  $\alpha$ . В [2—6] в рамках модели, учитывающей присутствие в дебаевском слое только ионов, сделан вывод о том, что в области частот, существенно превышающих обратное время дрейфа ионов через дебаевский слой, импеданс приэлектродного слоя становится равным  $R_C^0$ . Соотношения (3.12) показывают, что этот вывод остается справедливым и в рамках настоящей моде-



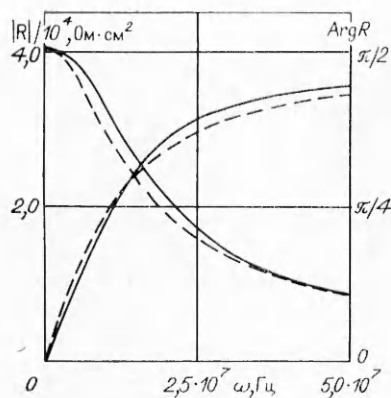


Рис. 1

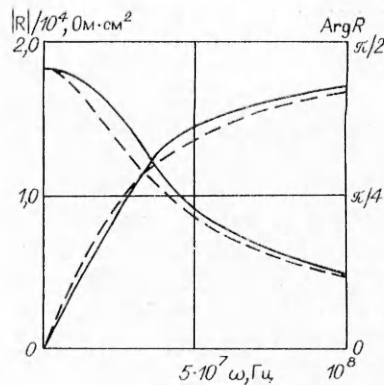


Рис. 2

ли, в которой существенным является наличие в дебаевском слое также электронов.

На рис. 1, 2 сплошными линиями представлен импеданс, рассчитанный по формулам (3.9), (3.10) для следующих условий [1]: плазма продуктов сгорания с присадкой калия, давление атмосферное, мольная доля атомов калия поперек дебаевского слоя постоянна и равна 1%, для распределения температуры плазмы взят профиль, показанный на рис. 2 работы [1];  $\omega = i\lambda$ ; расчеты проводились при  $j^{s0} = 5,3; 16,6$  mA/cm<sup>2</sup>,  $U^s = 311; 606$  В (соответственно рис. 1, 2).

Интересно отметить, что результаты численного расчета можно с удовлетворительной точностью аппроксимировать формулами (3.11) (штриховые линии).

Из вышеизложенного следует, что измерение импеданса на частотах порядка обратного времени дрейфа ионов через дебаевский слой позволяет определить отвечающее данной плотности тока значение толщины дебаевского слоя. Таким образом, сопоставление теории протекания тока через прикатодный пограничный слой с экспериментом могло бы проводиться не только по обычно измеряемой вольт-амперной характеристике  $U^s(j^{s0})$ , но и по зависимости  $y_D(j^{s0})$ , что, несомненно, было бы весьма полезно. Например, даже в простейшем случае, когда влияние прямой ионизации несущественно, непосредственное сопоставление теоретической зависимости  $U^s(j^{s0})$  с экспериментом часто затруднительно из-за неопределенности в распределении в прикатодной области скорости ступенчатой ионизации. Возможность одновременного сопоставления зависимости  $y_D(j^{s0})$  существенно упрощает эту ситуацию. Например, из анализа этой зависимости, полученной в эксперименте, можно найти распределение скорости ступенчатой ионизации:  $f_{i1} = -[e(dy_D/dj^{s0})]^{-1}$ , а затем с его использованием провести сопоставление зависимости  $U^s(j^{s0})$ .

Из экспериментов с холодными катодами известно, что при достижении некоторого значения плотности тока диффузная форма разряда переходит в дуговую; вероятно, этот переход — результат развития некоторой неустойчивости. С учетом результатов выполненной в [9] обработки экспериментальных данных естественно в качестве первого шага в развитии соответствующей теории рассмотреть возможность существования этой неустойчивости в рамках настоящей модели, т. е. без учета эмиссии с поверхности и влияния джоулева тепловыделения на температуру плазмы. Поскольку одномерные возмущения не меняют падения напряжения в пограничном слое, собственные частоты (точнее, собственные декременты) для таких возмущений отвечают нулям импеданса, т. е. являются корнями уравнения  $R(\alpha) = 0$ . Если предположить, что наиболее опасны (развиваются при наименьших значениях плотности тока) одномерные возмущения, то возникновению неустойчивости соответствует появление



корня этого уравнения в левой полуплоскости. Однако расчет функции  $R(\alpha)$  для условий, указанных выше, показал отсутствие нулей в этой полуплоскости, т. е. в рамках исследуемой модели неустойчивость, по-видимому, отсутствует.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бенилов М. С., Любимов Г. А. и др. О влиянии эффектов сильного поля на характеристики прикатодного слоя в плазме молекулярных газов // ПМТФ.— 1984.— № 1.
2. Oliver B. M., Smy P. R., Clements R. M. Small-signal transit time analysis of a planar mobility-dominated ion sheath // J. Appl. Phys.— 1974.— V. 45, N 12.
3. Oliver B. M., Clements R. M., Smy P. R. The effect of relaxation of the quasi-neutral region on the impedance of a planar probe in a static collisional plasma // J. Phys. D: Appl. Phys.— 1976.— V. 9, N 12.
4. Прозоров Е. Ф., Ульянов К. Н. Импеданс плоского зонда в неизотермической локально-столкновительной плазме // ТВТ.— 1983.— Т. 21, № 3.
5. Прозоров Е. Ф., Ульянов К. Н. Импеданс цилиндрического зонда в неизотермической локально-столкновительной плазме // ТВТ.— 1983.— Т. 21, № 6.
6. Прозоров Е. Ф. Зондовая диагностика плотной плазмы самостоятельного и несамостоятельного разрядов с применением модуляции потенциала зонда: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М.: ВЭИ, 1984.
7. Бенилов М. С. Приэлектродная зона в химически равновесной слабоионизованной плазме // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 1.
8. Прозоров Е. Ф., Лондер Я. И. и др. Зондовый метод диагностики плазмы самостоятельного разряда // ТВТ.— 1980.— Т. 18, № 1.
9. Любимов Г. А. Об условии пробоя приэлектродного слоя в потоке ионизованного газа // ПМТФ.— 1973.— № 3.

Поступила 8/X 1986 г.

УДК 537.2 : 621.319.7

### О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФОРМЫ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ

С. М. Лебедев, О. С. Гефле

(Томск)

В последние годы для измерения распределения внутренних электрических полей в твердых диэлектриках широкое применение нашел метод акустического зондирования [1—4]. Метод позволяет по измеряемой на внешних электродах разности потенциалов восстановить одномерную картину распределения электрического поля (потенциала или заряда) для плоскопараллельного образца из твердого диэлектрика из выражения [1]

$$(1) \quad U(t) = (2 - 1/\epsilon) \chi \int_0^{z=ct} p(t - z'/c) E(z') dz',$$

где  $U(t)$  — разность потенциалов на электродах диэлектрика при зондировании;  $\epsilon$ ,  $\chi$  — диэлектрическая проницаемость и сжимаемость материала образца;  $c$  — скорость звука в материале;  $t$  — время;  $z$  — текущая координата;  $E(z')$  — распределение электрического поля в диэлектрике;  $p(t - z'/c)$  — форма воздействующего импульса давления.

Когда длительность зондирующего импульса давления значительно меньше времени прохождения его по диэлектрику (т. е. импульс давления можно представить в виде дельта-функции [2]), необходимо знать только амплитуду давления, которую можно измерить традиционными способами.

При зондировании импульсами давления произвольной формы решение уравнения (1) относительно  $E(z)$  осложняется тем, что необходимо знать не только амплитуду, но и форму импульса давления.

В ряде работ [3, 4] для измерения формы импульса давления использовались пьезоэлектрические датчики. Однако известно, что для восстановления формы импульса давления по сигналу, генерируемому пьезоэлектрическим датчиком, необходимо также решать обратную задачу [5].