

13. Orszad S. A., Patera A. T. Secondary instability of wallboundary shear flows // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 128.— P. 347.
14. Ларченко В. В., Мельник В. В. Расчет непологих сферических оболочек при термосиловом нагружении // Изв. АН СССР. МТТ.— 1975.— № 4.
15. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1980.
16. Ляпидевская З. А. Комплекс процедур по линейной алгебре.— Новосибирск, 1980.— (Препринт/ВЦ СО АН СССР; № 259).
17. Муштари Х. Н., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек.— Казань: Таткнигоиздат, 1957.
18. Ларченко В. В. Нелинейная устойчивость и оценка эффективности асимптотического метода в упругих сферических оболочках при различных граничных условиях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Ростов н/Д: Рост. ун-т, 1977.

Поступила 26/V 1986 г.

УДК 532

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ОБТЕКАЮЩЕЙ УПРУГОЕ ТЕЛО

А. П. Михайлов, С. О. Савченко  
(Новосибирск)

При обтекании вязким несжимаемым потоком неподвижной стенки, как известно, существует традиционная кривая нейтральной устойчивости. Она ограничивает зону неустойчивости для волны Толлмина — Шлихтинга в плоскости значений числа Рейнольдса и волнового числа. Имеется ряд работ (см., например, [1—3]), где изучалось влияние податливости обтекаемой стенки на положение этой кривой нейтральной устойчивости, а также (см. [4, 5]) устойчивость упругого тела (полупространства) в потоке идеальной жидкости (сжимаемой и несжимаемой). В частности, отмечается повышение устойчивости ламинарного потока (затягивание перехода в турбулентный режим) и появление новых видов неустойчивости типа Кельвина — Гельмгольца или гидрорупругого флаттера.

В данной работе исследуются совместные колебания упругого слоя (полупространства) и обтекающего вязкого несжимаемого потока жидкости. Оказывается, что при этом возможна неустойчивость нового вида, предельным состоянием которой при уменьшении относительной плотности потока является рэлеевская волна в упругом теле.

В области  $G_2$  (верхнее полупространство) рассматривается плоское (в плоскости  $xOz$ ) течение несжимаемой вязкой жидкости, обтекающей упругое нижнее полупространство (область  $G_1$ ), в котором под действием переменного давления возникают поверхностные волны. Течение жидкости описывается линеаризованными уравнениями Навье — Стокса с компонентами скорости  $v_x$ ,  $v_z$  и давлением  $p$ , представляющими малые отклонения от основного невозмущенного течения с параметрами  $U = U(z)$ ,  $V = 0$ ,  $P = P(x)$ .

Пусть  $U_0$  — скорость невозмущенного потока вдоль оси  $x$  на бесконечности,  $\rho_2$  — плотность жидкости. Компоненты скорости связаны с функцией тока соотношениями  $v_x = \partial\psi/\partial z$ ,  $v_z = -\partial\psi/\partial x$ .

В предположении только периодических по оси  $x$  возмущений течения функцию тока представим в форме бегущей волны

$$\psi(x, z, t) = \varphi(z)e^{i\alpha x - i\omega t},$$

где  $\alpha$  — безразмерное волновое число;  $\omega$  — частота колебаний. Все остальные переменные параметры потока и обтекаемого упругого тела будем считать пропорциональными гармонике того же вида

$$(1) \quad \theta(x, z, t) = \vartheta(z)e^{i\alpha x - i\omega t}.$$

В области  $G_2$  рассматривается также пограничный слой толщины  $\delta_0$ , так что  $U(\delta_0) = U_0$ . Задача для возмущения скоростей сводится к известному уравнению Орра — Зоммерфельда

$$(2) \quad (U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha \text{Re}} (\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi).$$

Здесь  $c = \omega/\alpha$  — фазовая скорость;  $Re = U_0\delta/\nu$  — число Рейнольдса;  $\delta = \delta_0/q$  ( $q = 6,2$  согласно [6]);  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $U_0$  и  $\delta$  взяты за характерные величины (скорости, длины).

Условия затухания возмущений на бесконечности

$$(3) \quad \varphi \rightarrow 0, \quad \varphi' \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty)$$

удобнее (по техническим причинам) заменить на эквивалентные на конечной границе  $z = \delta_0$ , что сделано, как и в [7], исходя из следующих рассуждений. При  $z \geq \delta_0$  у основного потока постоянная скорость ( $U_0 = 1$ ), тогда  $U'' = 0$ . При этом (2) имеет решение, удовлетворяющее (3):

$$\varphi = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{-\alpha z} \quad (\gamma = \sqrt{\alpha(i Re (1 - c) + \alpha)}).$$

Воссозданное по этому решению уравнение

$$(4) \quad \varphi'' + (\alpha + \gamma)\varphi' + \alpha\gamma\varphi = 0$$

и его дифференциальное следствие

$$(5) \quad \varphi''' + (\alpha + \gamma)\varphi'' + \alpha\gamma\varphi' = 0$$

и будут искомыми «мягкими» граничными условиями, означающими гладкий переход при  $z = \delta_0$  решения уравнения (2) в погранслое в решение вне погранслоя, удовлетворяющее (3) на бесконечности.

На границе потока с упругим телом выполняются условия прилипания к подвижной границе  $w$

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_x^0, \quad -i\alpha\varphi = v_z^0 \quad (z = w)$$

( $v_x^0 = \dot{u}_x$ ,  $v_z^0 = \dot{u}_z$  — скорости смещений на границе упругого тела). Скорости на неподвижной границе можно представить в виде разложений

$$(v_z)_{z=0} = v_z^0 - w \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\}_{z=w} + O(w^2),$$

$$(v_x)_{z=0} = v_x^0 - w \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial z} \right\}_{z=w} + O(w^2).$$

С учетом принятого в (1) типа решения следует  $w \sim v_z^0/\omega$ . Полагая частоту  $\omega$  ограниченной по модулю (сверху и снизу) и  $v_z, v_x \ll 1$ , можно пренебречь произведениями  $w(\partial v_z/\partial z)_w$  и  $w(\partial v_x/\partial z)_w$  в этих разложениях, так как  $v_z, \partial v_z/\partial z, \partial v_x/\partial z$  в принятой здесь линейной постановке задачи считаются малыми. Условия (6), значит, можно снести на невозмущенную границу  $z = 0$ .

Для определения  $v_x^0, v_z^0$  необходимо рассмотреть задачу о распространении волны в упругом полупространстве  $G_1$  под действием волны давления, порожденной в области  $G_2$ .

Согласно [8], для области  $G_2$  запишем уравнения движения

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_i^2 \Delta u_i = \hat{\sigma}, \quad \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta u_t = 0;$$

$$(8) \quad \text{div } u_t = 0, \quad \text{rot } u_t = 0,$$

где  $u_l$  и  $u_t$  — безразмерные векторы смещений;  $c_l$  и  $c_t$  — скорости волн для деформаций сжатия и сдвига. Физические же смещения в направлении осей  $x$  и  $z$

$$(9) \quad u_x = u_{lx} + u_{tx}, \quad u_z = u_{lz} + u_{tz}$$

возникают в области  $G_1$  вследствие действия возмущений в потоке. Фоновое невозмущенное течение в области  $G_2$  вызывает в области  $G_1$  фоновые постоянные деформации, которые здесь не рассматриваются.

В предположении  $1/\sqrt{Re} \ll 1$ ,  $\alpha < 1$  либо  $\alpha \sim 1$  на границе  $z = 0$  касательные напряжения в вязкой жидкости считаются пренебрежимо

малыми, т. е.

$$(10) \quad \sigma_{xz} = 0.$$

Аналогично опускается вязкий член в нормальном напряжении

$$(11) \quad \sigma_{zz} = -p(x, 0, t)/\rho$$

( $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{zz}$  — напряжения в упругом теле). На бесконечном удалении от обтекаемой границы (при  $z = -\infty$ ) взяты условия затухания

$$(12) \quad u_x = 0, u_z = 0.$$

Решения  $u_{lx}$ ,  $u_{lz}$ ,  $u_{tx}$ ,  $u_{tz}$  (в виде волны (1)) системы (7), (8) с граничными условиями (10)–(12) позволяют найти  $u_x$ ,  $u_z$  из (9), а значит,  $v_x^0$  и  $v_z^0$  из (6) в форме

$$(13) \quad v_z^0 = -i\omega a p, \quad v_x^0 = -i\omega b p \quad \text{при } z = 0$$

( $p(x, 0, t)$  — давление возмущенного потока на границе);

$$(14) \quad a = \frac{c^2 \rho}{c_i^4 \alpha \Delta}, \quad b = -\frac{i\rho(1 - \kappa_i^2)}{c_i^2 \Delta}, \quad \kappa_i = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_i}\right)^2};$$

$$(15) \quad \Delta = (1 + \kappa_i^2)^2 - 4\kappa_i^2, \quad \rho = \rho_2/\rho_1.$$

Выражая  $p$  на границе из линеаризованного уравнения Навье — Стокса, можно получить из (13)

$$(16) \quad ac \left[ \frac{\varphi'''(0)}{i\alpha \operatorname{Re}} + \left( c + \frac{i\alpha}{\operatorname{Re}} \right) \varphi'(0) + U'(0) \varphi(0) \right] - \varphi(0) = 0;$$

$$(17) \quad \varphi'(0) + i\alpha \frac{h}{x} \varphi(0) = 0.$$

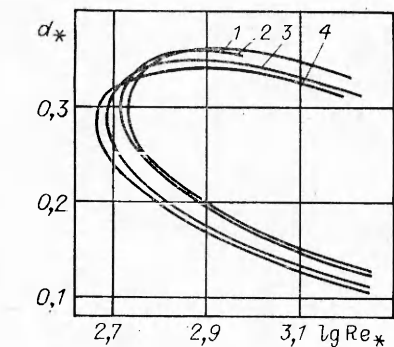
Таким образом, поставлена однородная краевая задача: уравнение Орра — Зоммерфельда (2) с граничными условиями (4), (5) при  $z = \delta_0$  и (16), (17) при  $z = 0$ . Здесь  $c = \omega/\alpha$  — собственное значение, причем его мнимая часть  $c_i$  определяет декремент (инкремент при  $c_i < 0$ ) убывания (нарастания) амплитуды волны, а вещественная  $c_r$  — фазовую скорость этой волны.

Если выражение  $\Delta = 0$ , где  $\Delta$  взято из (15), рассматривать как уравнение относительно  $\xi = c/c_i$ , то его решение  $\xi = \xi_0 = 0,955$  дает фазовую скорость поверхностной рэлеевской волны в упругом теле со свободной границей [8].

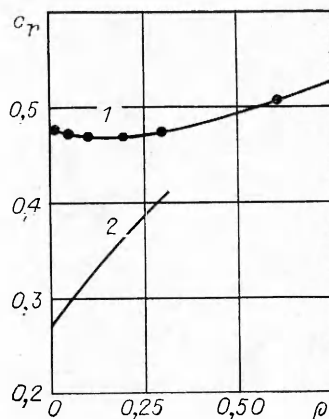
Таким образом, как видно из (14), (15), если при  $\rho \rightarrow 0$  одновременно  $\xi \rightarrow \xi_0$ , пульсации скорости на границе  $w$  могут оставаться конечными и ненулевыми. Это соответствует волне Рэлея как в упругом теле, так и в «вырожденном» потоке ( $\rho \rightarrow 0$ ). Если  $\xi$  при  $\rho \rightarrow 0$  имеет своим пределом другую величину, отличную от  $\xi_0$ , так что  $\Delta \neq 0$ , то пульсация скорости на границе  $w$  обращается в нуль. Такое решение в пределе эквивалентно волне Толлмина — Шлихтинга в потоке над неподвижной границей.

Для численного исследования спектра однородной краевой задачи (2), (4), (5), (16), (17) здесь использован метод, основанный на сплайн-коллокации, разработанный для подобных целей в [9], откуда (с любезного согласия ее автора) взята программа, модификация которой использована при получении численных результатов, представленных в данной работе.

Приведенные ниже расчеты носят чисто методический характер и предназначены для иллюстрации взаимодействия потока с поверхностными волнами твердого тела. Они примерно соответствуют обтеканию тела, покрытого достаточно толстым слоем резиноподобного материала (для каучука, например, скорость волн сдвига  $\sim 20$  м/с, плотность  $\sim 1000$  кг/м<sup>3</sup>). Тогда взятые в расчетах параметры  $c_i = 0,5$  ( $c_i$  отнесено к  $U_0$ ) и  $\rho = 1$  обеспечиваются потоком воды со скоростью  $\sim 40$  м/с.



Р и с. 1



Р и с. 2

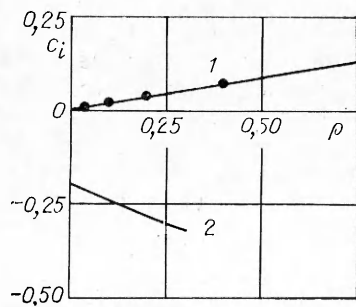
Предполагалось, что  $c_t \ll c_l$ , так что отношением  $c_t/c_l$  можно пренебречь. Введены величины  $\alpha_* = 1,72\alpha$ ,  $Re_* = 1,72Re$  — волновое число и число Рейнольдса, отнесенные к толщине вытеснения.

Численно выделены и исследованы два типа решений: традиционное Толлмина — Шлихтинга и рэлеевское. Результаты первого решения представлены на рис. 1, где кривые нейтральной устойчивости 1—4 отвечают значениям  $\rho = 0; 0,01; 0,05; 0,07$ . Виден их непрерывный плавный переход при  $\rho \rightarrow 0$  к известной картине для случая неподвижной обтекаемой поверхности.

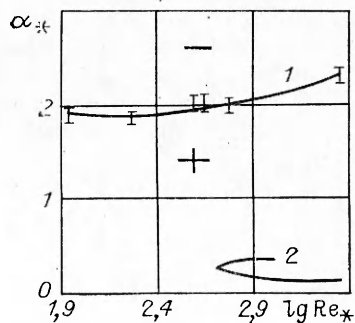
На рис. 2 приведена зависимость фазовой скорости  $c_r$  от отношения плотностей  $\rho$  при  $Re = 360$ ,  $\alpha = 0,013$  для рэлеевского и Толлмина — Шлихтинга решений (линии 1, 2 соответственно). Видно, что при  $\rho \rightarrow 0$  (это отмечено сгущением расчетных точек)  $c_r \rightarrow 0,477 = c_t \xi_0$ . Это точно равно фазовой скорости свободной (т. е. без давления) поверхностной волны Рэлея.

На рис. 3 показана зависимость от  $\rho$  инкремента нарастания волны Рэлея и декремента затухания волны Толлмина — Шлихтинга (линии 1, 2). Характерно (для линии 1), что при  $\rho \rightarrow 0$   $c_i \rightarrow 0$  (см. сгущение расчетных точек). Следовательно, для рэлеевского решения получается волна, фазовая скорость которой равна фазовой скорости свободных упругих колебаний, а инкремент нарастания нулевой. Значит, подтверждается, что первый тип решения представляет собой перестройку свободных колебаний поверхности упругого тела (рэлеевская волна) под действием вязкого потока.

На рис. 4 изображена картина устойчивости в плоскости параметров  $\alpha_*$ ,  $Re_*$  для рэлеевского решения (кривая 1). Вертикальные черточки обозначают пределы положения приближенно вычисленной кривой. Область устойчивости помечена знаком —, неустойчивости +. Для сравнения дана петля устойчивости Толлмина — Шлихтинга (кривая 2).



Р и с. 3



Р и с. 4

Особенность рэлеевского решения — область неустойчивости простирается для меньших  $Re_*$  по сравнению с областью, ограниченной этой петлей. Поведение кривой 1 для  $\lg Re_* < 19$  не исследовано из-за технических вычислительных трудностей, связанных с принятой в работе вычислительной методикой.

На рис. 5 представлена зависимость инкремента нарастания  $c_i$  от волнового числа  $\alpha$  при  $Re = 170; 660$  (линии 1, 2) для рэлеевского типа решения. Можно заметить, что наиболее неустойчивы длинноволновые возмущения (с длиной волны порядка трех — десяти толщин пограничного слоя).

Приведенные численные результаты и выводы могут оказаться полезными для постановки исследований (экспериментальных, аналитических или численных) с целью генерации заданных волн конечной амплитуды на поверхности упругих тел путем подбора параметров материала в соответствии с параметрами потока.

Авторы благодарят А. Г. Слепцова за предоставленные материалы и помощь в работе.

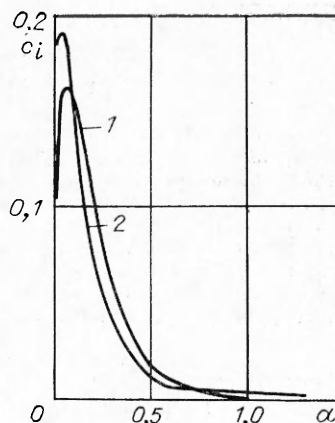


Рис. 5

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Басин А. М., Короткин А. И., Козлов А. Ф. Управление пограничным слоем судна. — Л.: Судостроение, 1968.
2. Landahl M. T. On the stability of laminar incompressible boundary over a flexible surface // J. Fluid Mech. — 1962. — V. 13, pt 4.
3. Меркулов В. И. Управление движением жидкости. — Новосибирск: Наука, 1981.
4. Лампер Р. Е. Устойчивость взаимного движения двух сред // Изв. вузов. Авиац. техника. — 1959. — № 4.
5. Симонов И. В. Поверхностные волны и устойчивость тангенциального разрыва скорости на границе тела и жидкости // ПМТФ. — 1981. — № 3.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Мир, 1968.
7. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Новосибирск: Наука, 1977.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1965.
9. Слепцов А. Г. Проекционно-сеточные методы решения задачи Орра — Зоммерфельда. — Новосибирск, 1982. — (Препринт/ИТПМ СО АН СССР; № 23).

Поступила 15/V 1986 г.