УДК 532.529

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

С. И. Плаксин

(Новосибирск)

Обзор работ, посвященных изучению распространения малых возмущений в жидкости с пузырьками газа, дан в [1]. В этих работах получены, в частности, дисперсионные соотношения, выяснено влияние на вид дисперсионных кривых диссипативных механизмов, а также различных факторов, таких как полидисперсность смеси, добавки полимеров в жидкость и т. п. Указанные исследования проводились на основе линеаризованных уравнений движения. Между тем известно, что жидкость с пузырьками газа — нелинейная диспергирующая среда. Поэтому в данной работе при отсутствии диссипации получено дисперсионное соотношение для нелинейных волн и в качестве примера рассчитаны частотная и амплитудная зависимости фазовой скорости для волн, проходящих через заданное равновесное состояние среды.

Согласно [2, 3], стационарные нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа с учетом гидродинамической нелинейности, нелинейности радиального движения жидкости вокруг пузырьков и нелинейности уравнения состояния жидкости описываются решениями уравнения

$$\left(\frac{dp}{d\eta}\right)^2 = -\frac{2\rho^2 (V(p))^{1/3} (V_p)^{-2} (H(p) + H_0)}{(1 + m\rho V(p))^2\, mC_1^2 \gamma p_0} \equiv F(p;\, D,\, H_0),$$

где $mV = C_2/C_1^2 - p/C_1^2 - (1 + n(p - p_0))^{-1/n}$; $H = -\dfrac{mp_0}{\gamma - 1} V^{1-\gamma} + \dfrac{p^2}{2C_1^2} - \dfrac{1 - np_0 + p}{\rho(n-1)}$; $H_0 = \dfrac{C_3}{C_1} - \dfrac{C_2^2}{2C_1^2}$;
H_0 — амплитудный параметр; C_1, C_2, C_3 — безразмерные потоки массы, импульса и энергии совместного деформирования фаз; p_0', ρ_0', c_0 — равновесные значения давления, плотности и скорости звука в жидкости; R_0, K_0 — равновесные значения радиуса пузырьков и объемной концентрации газа; γ, n — показатели адиабат для газа и жидкости. При этом введены безразмерные переменные: $\eta = x - Dt$, $D' = Dc_0$, $x = x'\omega_0/c_0$, $t = t'\omega_0$, $V = (R/R_0)^3$, $p' = p\rho_0' c_0^2$, $p_0' = p_0\rho_0' c_0^2$, $m = K_0/(1 - K_0)$, $\rho^n = 1 + n(p - p_0)$, $\omega_0^2 = 3\gamma p_0'/\rho_0' R_0^2$, $C_1^2 = D^2(1 - K_0)^2$, $C_2 = p_0 + (1 - K_0)D^2$.

Следуя [4, 5], по аналогии с линейной теорией найдем длину нелинейной периодической волны

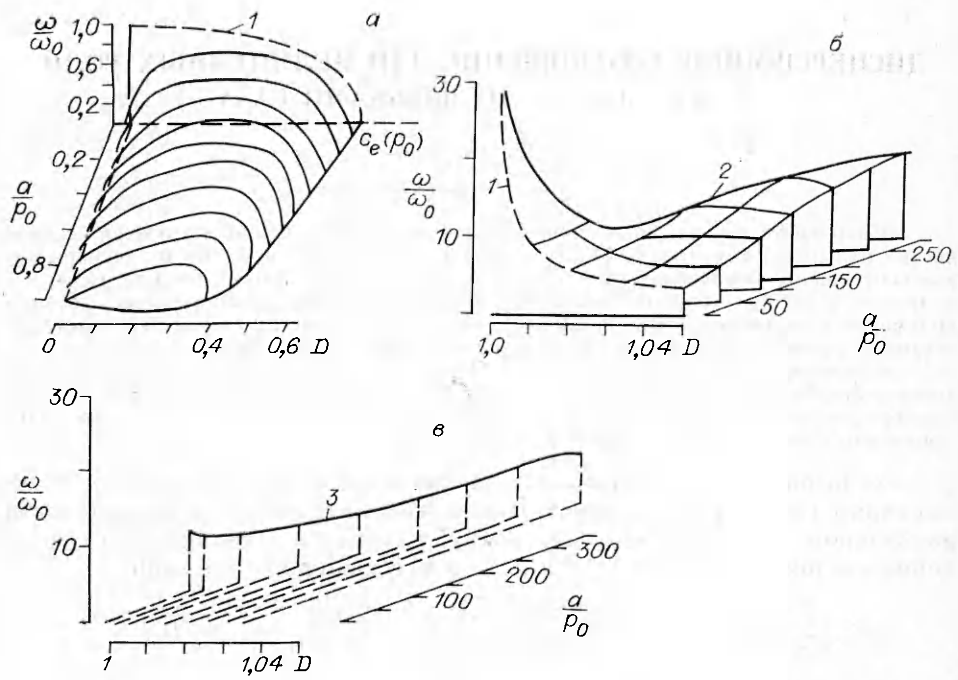
$$\lambda = \lambda(D, H_0) = 2\int_{p_1}^{p_2} dp\Big/\sqrt{F(p;\, D,\, H_0)}$$

(p_1 и p_2 — минимальное и максимальное давления в волне), затем волновое число и частота определяются обычным образом: $k = 2\pi/\lambda$, $\omega/\omega_0 = Dk(D, H_0)$. Это и есть дисперсионное соотношение для нелинейных волн, которое представим как

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \pi D\left(\sqrt{\frac{C_1^2 m\gamma p_0}{2}} \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\frac{V^{-1/3} V_p^2}{H(p) + H_0}}\, \frac{1 + m\rho V}{\rho}\, dp\right)^{-1}. \tag{1}$$

В линейном случае периодическое решение есть $p - p_0 = a\cos\theta$, а (1) переходит в известное дисперсионное соотношение для линейных волн

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{c_f^2(p_0)\left(D^2 - c_e^2(p_0)\right)}{c_e^2(p_0)\left(D^2 - c_f^2(p_0)\right)}, \tag{2}$$



где c_e и c_f — равновесная и замороженная скорости звука. Дисперсионное соотношение (1) имеет неявный вид и представляет собой сугубо нелинейную зависимость частоты от фазовой скорости и амплитуды. Для проведения количественного анализа ограничимся построением нелинейной зависимости (1) для волн, проходящих через заданное равновесное состояние $p_0' = 10^5$ Па, $K_0 = 10^{-4}$, $c_0 = 1{,}5 \cdot 10^3$ м/с ($\gamma = 1{,}4$, $n = 7{,}15$).

Предварительно заметим, что при фиксированной удвоенной амплитуде волны $p_2 - p_1 = a$ удельный объем смеси $\bar{v} = \bar{v}_0^2 (p_0 - p)/D^2 + \bar{v}_0$ для $p \simeq p_1$ неограниченно возрастает при $D^2 \to 0$ ($p_2 \to p_0$, $p_1 \to p_0 - a$). Поэтому хотя для любой фиксированной амплитуды при $D \to 0$ $\omega/\omega_0 \to 0$, фактически решение, начиная с некоторого критического значения $D_*(a)$, выходит за рамки ограничений рассматриваемой модели.

Результаты расчета (1) приведены на рисунке, где *а* — частотная и амплитудная зависимости фазовой скорости волн, скорости которых меньше $c_e(p_0)$. Согласно расчету, в рассматриваемом диапазоне скоростей волн, для которых относительное течение среды дозвуковое $((u - D)^2 < < c_f^2(p))$, при фиксированной скорости с увеличением амплитуды уменьшается частота волны; *б* — зависимость фазовой скорости от частоты и амплитуды для волн, скорость которых больше $c_f(p_0)$. Дальняя граница дисперсионной поверхности (кривая *2*) соответствует волнам, амплитуда которых максимальна, но не превосходит предельную величину из [2, 3]. Согласно расчету, для рассматриваемых волн, для которых относительное течение среды сверхзвуковое, при фиксированной скорости распространения с увеличением амплитуды возрастает частота волны. В [2] показано существование периодических волн, в которых относительное течение среды непрерывным образом переходит из сверхзвукового режима в дозвуковой и обратно. При этом оказывается, что эти волны, проходящие через заданное равновесное состояние, распространяются со скоростями, превышающими $c_f(p_0)$. Для удобства на рисунке кривой *3* показана зависимость между частотой, амплитудой и скоростью таких существенно нелинейных волн. В отличие от волн, в которых относительное течение среды сверхзвуковое, в рассматриваемом случае имеет место предельный переход при $D \to c_f(p_0)$, т. е. с уменьшением D точка (D, ω/ω_0, a/p_0) кривой *3* стремится к точке ($c_f(p_0)$, $\tilde{\omega}/\omega_0$, $\tilde{a}/p_0$), которая отвечает волне, распространяющейся с замороженной скоростью звука. В последней относительное течение среды дозвуковое, а $\tilde{\omega}/\omega_0 \approx 8$, $\tilde{a} = 113p_0$.

В диапазоне скоростей $(c_e(p_0),\ c_f(p_0))$ стационарные возмущения являются солитонами, для которых дисперсионное соотношение вырождается в нелинейную зависимость между скоростью и амплитудой. Для сравнения линией *1* показана дисперсионная зависимость (2).

В заключение автор благодарит В. К. Кедринского за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.** Волны в жидкостях с пузырьками // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа.— М.: ВИНИТИ, 1982.— Т. 17.
2. **Плаксин С. И.** О стационарных решениях уравнений движения жидкости с пузырьками газа // ПМТФ.— 1983.— № 1.
3. **Ляпидевский В. Ю., Плаксин С. И.** Структура ударных волн в газожидкостной среде с нелинейным уравнением состояния // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1983.— Вып. 62.
4. **Бхатнагар П.** Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах.— М.: Мир, 1983.
5. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.

Поступила 18/V 1987 г.

УДК 532.517.6.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЗАПЫЛЕННОЙ ГАЗОВОЙ СТРУИ

Е. П. Курочкина, М. П. Стронгин

(Новосибирск)

Интерес к моделированию поведения газодисперсных потоков с сильными градиентами параметров существенно усилился в последние годы, с одной стороны, из-за все возрастающего числа практических приложений потоков, в частности, в химической технологии и в проблеме охраны окружающей среды (распространение аэрозолей), а с другой — из-за возрастающих возможностей расчета таких течений. Особое место занимает здесь проблема устойчивости подобных потоков, решение которой позволяет в ряде случаев получить оценки критических параметров перехода ламинарного течения в турбулентное. Расчеты устойчивости, проведенные для запыленных изотермических газовых потоков [1—3], показали возможности существенной стабилизации течения частицами (критические числа Рейнольдса могут возрасти при определенных условиях на несколько порядков величины). Однако расчеты устойчивости термически стратифицированных потоков с примесью дисперсной фазы в настоящее время отсутствуют, хотя имеют, пожалуй, большее практическое значение. В данной работе рассматривается устойчивость плоской газопылевой струи с температурой, существенно отличной от температуры среды, в которой течет эта струя.

Течение затопленной вязкой неизотермической газодисперсной струи описывается системой уравнений Навье — Стокса с учетом взаимодействия газ — частицы, моделируемого членом типа стоксовской силы. Как отмечалось в [1—3], важным параметром является $\beta = \tau/\tau_0$, где $\tau = L/(U_m \alpha C)$ (L и U_m — характерные масштабы длины и скорости струи, α и C — волновое число и фазовая скорость возмущений), а $\tau_0 = \rho_0 d^2/(18\mu_g)$— время стоксовской релаксации относительной скорости частиц (ρ_0 — плотность материала частиц, d — диаметр частицы, μ_g — вязкость газа). Обычно в реальных запыленных потоках реализуется случай $\beta \ll 1$. В качестве иллюстрации можно провести следующие оценки. Для частиц диаметром 10^{-4} м с плотностью $\rho_0 \approx 10^4$ кг/м^3 и при вязкости горячего воздуха $\mu_g \approx 2\cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) время релаксации составляет $\tau_0 \approx 5/18$ с. В то же время для типичных масштабов струй $L \approx 10^{-2}$ м, $U_m \approx 2\cdot 10^2$ м/с, $\alpha C \approx 10^{-2}$ (из результатов данной работы) $\tau \approx 5\cdot 10^{-3}$ с, а $\beta \approx 18\cdot 10^{-3}$. Таким образом, характерные пульсационные скорости частиц существенно меньше пульсационной скорости газа. Поэтому при проводимом здесь анализе устойчивости возмущением частиц можно пре-