УДК 532.5:532.517.4

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА С ИСТОЧНИКОМ

Ю. Н. Григорьев[*,**], С. В. Мелешко[***], А. Суриявичитсерании[***]

[*] Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
[**] Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
[***] Математический колледж Института науки Технологического университета Суранарии, 30000 Накхон Ратчасима, Таиланд
E-mails: grigor@ict.nsc.ru, sergey@math.sut.ac.th, amornratjulie@gmail.com

Построены точные решения нелинейного кинетического уравнения Больцмана с источником в случае изотропной функции распределения и максвелловской модели изотропного рассеяния. Для построения решений используется группа эквивалентности, одно из преобразований которой единственным образом выделяет класс функций источника, линейных по функции распределения, причем преобразованное уравнение имеет нулевую правую часть. Это позволяет в явном виде найти инвариантные решения типа решения Бобылева — Крука — Ву, в частности, допускающие физическую интерпретацию.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, изотропная функция распределения, функция источника, инвариантные решения.

DOI: 10.15372/PMTF20180201

Введение. Классическое уравнение Больцмана является основой математического аппарата кинетической теории газов [1]. Вместе с тем имеется ряд кинетических задач, в которых уравнение Больцмана необходимо дополнить функцией источника (стока), зависящей в общем случае от его решения (функции распределения). К числу этих задач относятся задачи об инициации высокопороговых процессов путем введения “горячих” частиц, потерях частиц при неупругом столкновительном взаимодействии с некоторыми фоновыми частицами или “убегании” высокоэнергетических молекул из удерживающего силового поля и др. В [2] этот класс задач рассматривался в рамках “расширенной” кинетической теории газов.

Впервые попытка построения инвариантных решений [3] уравнения Больцмана с источником методами группового анализа была предпринята в работе [4]. При этом аналогично [5] уравнение Больцмана для изотропной функции распределения (ФР) максвелловских молекул по скоростям сводилось к нелинейному дифференциальному уравнению для производящей функции степенных моментов ФР. Полная групповая классификация этого уравнения относительно функции источника выполнена в [6]. Однако преобразование полученных инвариантных решений в решения уравнения Больцмана является сложной задачей. Поэтому более перспективным представлялось использование фурье-представления уравнения Больцмана для изотропной ФР, на основе которого было получено известное инвариантное решение Бобылева — Крука — Ву [7]. С этой целью в работе [8] разработан

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00209a).

вариант метода предварительной групповой классификации относительно функции источника. Идея предварительной классификации дифференциальных уравнений относительно произвольного элемента предложена в [9] и получила развитие в [10, 11]. В этом случае для частичной классификации используются группа Ли эквивалентных преобразований и ее непересекающиеся подгруппы, в частности принадлежащие оптимальной системе подгрупп. Очевидно, что для классификации уравнения относительно функции источника в качестве группы эквивалентности можно использовать группу Ли, допускаемую однородным уравнением, и ее оптимальную систему подгрупп.

В [8] проводилась групповая классификация относительно функции источника, не зависящей от решения кинетического уравнения. Путем прямого решения определяющего уравнения показано, что допускаемый неоднородным уравнением инфинитезимальный оператор выражается в виде линейной комбинации базисных операторов наиболее полной группы, допускаемой однородным уравнением. Эта группа была получена ранее в работе [12]. Для такой функции источника полученный результат был прогнозируемым, но получение его путем решения определяющего уравнения позволило утверждать, что выполненная классификация является полной.

В работе [13] исследовался более общий, интересный с физической точки зрения случай кинетического уравнения, когда источник зависит не только от независимых переменных, но и от решения уравнения. Для проведения классификации использовались допускаемая однородным уравнением группа Ли и ее оптимальная система подгрупп. При этом общее решение определяющего уравнения не находилось, поэтому вопрос о полноте полученной классификации остается открытым.

В данной работе показано, что для классификации кинетического уравнения с функцией источника, зависящей от его решения, недостаточно операторов, использованных в [13]. Построено расширение группы эквивалентности, которое позволило найти в явном виде инвариантные решения уравнения Больцмана для изотропной ФР с функцией источника, включающей такую зависимость.

Уравнение Больцмана в изотропном случае. В качестве исходного уравнения рассматривается пространственно однородное уравнение Больцмана с источником для изотропной в пространстве скоростей ФР $f(v,t)$ и изотропной максвелловской модели рассеяния. Фурье-преобразование этого уравнения по пространству скоростей $R_s(\boldsymbol{v})$ имеет вид [7]

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + \varphi(x,t)\varphi(0,t) = \int\limits_0^1 \varphi(xs,t)\varphi(x(1-s),t)\,ds + G(\varphi(x,t),t,x). \qquad (1)$$

Здесь изотропная ФР и ее фурье-образ определяются преобразованиями

$$f(v,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}\,\varphi(k,t)\,d\boldsymbol{k}, \quad \varphi(x,t) \equiv \varphi(k^2/2,t) \equiv \varphi(k,t) = \int \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}\,f(v,t)\,d\boldsymbol{v}.$$

Соответственно функция

$$G(\varphi(x,t),t,x) = \int \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}\,\tilde{G}(f(v,t),t,v)\,d\boldsymbol{v}$$

есть фурье-образ функции источника в пространстве скоростей. При этом

$$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3, \qquad v=|\boldsymbol{v}|, \qquad k=|\boldsymbol{k}|.$$

Для уравнения (1) ставится задача Коши (релаксации)

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x). \qquad (2)$$

Задача Коши (1), (2) определяет законы эволюции числовой плотности частиц

$$n(t) \equiv \varphi(0,t) = \int f(v,t)\, d\boldsymbol{v}$$

и энергии

$$n(t)e(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,t),$$

которые записываются в виде уравнений

$$\frac{\partial \varphi(0,t)}{\partial t} = G(\varphi(0,t),t,0); \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,t)e(t) + \frac{\partial e(t)}{\partial t}\varphi(0,t) = \frac{\partial G}{\partial x}(\varphi(0,t),t,0) + \frac{\partial G}{\partial \varphi}(\varphi(0,t),t,0)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,t).$$

В случае однородного уравнения при $G \equiv 0$ для задачи (1), (2) выполняются законы сохранения плотностей частиц и энергии [7]

$$\varphi(0,t) = 1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,t) = -1. \tag{4}$$

В работе [12] показано, что полная группа Ли L_4, допускаемая однородным уравнением (1), определяется базисными операторами

$$X_0 = x\,\partial_x, \qquad X_1 = x\varphi\,\partial_\varphi, \qquad X_2 = \varphi\,\partial_\varphi - t\,\partial_t, \qquad X_3 = \partial_t. \tag{5}$$

Инвариантное решение Бобылева — Крука — Ву [7] имеет вид

$$\varphi_B(x,t) = (1-y)\,\mathrm{e}^{y-x}, \qquad y = x\theta\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad \lambda = -1/6, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2/5. \tag{6}$$

Этому решению соответствует оператор $X_0 + \lambda^{-1}X_3$.

Инвариантные решения типа решений Бобылева — Крука — Ву. Для проведения предварительной классификации решений уравнения (1) в работе [13] допустимые операторы задавались в виде

$$X = c_0X_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3.$$

Вычисления проводились по следующей схеме. Группа Ли L_4 отображает фурье-образ $\varphi(x,t)$ в функцию преобразованных переменных

$$\bar\varphi(\bar x,\bar t) = \mathrm{e}^{\bar x\,\mathrm{e}^{-a_0}\,a_1 + a_2}\,\varphi(\bar x\,\mathrm{e}^{-a_0}, (\bar t - a_3)\,\mathrm{e}^{a_2}), \tag{7}$$

где $a_i = c_i a$ $(i = 0,1,2,3)$; a — групповой параметр.

В предположении, что преобразование (7) переводит уравнение (1) в уравнение в новых переменных $(\bar\varphi,\bar x,\bar t)$ без изменения формы, после подстановки в уравнение (1) функции (7) оно дифференцируется по параметру a. При $a = 0$ из полученного выражения следует определяющее уравнение

$$c_0xG_x + (c_3 - c_2t)G_t + (c_1x + c_2)\varphi G_\varphi = (c_1x + 2c_2)G,$$

которое включает производные функции источника и неизвестные коэффициенты c_i $(i = 0,1,2,3)$. Коэффициенты определяются путем выбора очередной подалгебры из оптимальной системы подалгебр группы L_4. В результате получается переопределенная система дифференциальных уравнений для функции источника, решение которой (если оно существует) задает допустимую функцию источника, соответствующую инвариантному решению, определяемому данной подалгеброй. В таблице приведены найденные в [13] допустимые правые части уравнения (1) и соответствующие подалгебры, которые могли бы

Предварительная групповая классификация уравнения (1)

Номер решения	$G(t,x,\varphi)$	Операторы	Номер решения	$G(t,x,\varphi)$	Операторы
1	$\beta x^\alpha \varphi$	$\alpha X_2 + X_0,\ X_1,\ X_3$	3	$\varphi\Phi(x\,\mathrm{e}^{-\lambda t})$	$X_0 + \lambda^{-1}X_3,\ X_1$
2	$\beta\varphi^2$	$X_0,\ X_2,\ X_3$	4	$\Phi(x\,\mathrm{e}^{-\lambda t},\varphi)$	$X_0 + \lambda^{-1}X_3$

определять обобщенные решения Бобылева — Крука — Ву (Φ — произвольная функция; α, β, λ — произвольные константы).

Во всех указанных случаях инвариантное решение зависит от автомодельной переменной $y = x\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, определяемой оператором $X_0 + \lambda^{-1}X_3$:

$$\varphi(x,t) = \Psi(y).$$

Однако такая зависимость противоречит отличной от нуля функции источника в уравнении (1). Действительно, из этой функции следует, что числовая плотность частиц не меняется во времени:

$$n(t) = \varphi(0,t) = \Psi(0) = \mathrm{const}\,.$$

Это возможно только в тривиальном случае

$$\varphi(x,t) = \Psi(y) = \mathrm{const}, \qquad G \equiv 0.$$

Вместе с тем в работе [14] аналогично тому, как это сделано в [15], в явном виде построено обобщенное решение Бобылева — Крука — Ву. При этом функция источника в фурье-представлении выражалась в виде

$$G = -C_R\varphi(0,t)\varphi(t,x).$$

Принципиальное отличие этого источника от использованной в расчетах функции $G(\varphi(x,t),t,x)$ заключается в его зависимости от функционала

$$\varphi(0,t) = \int f(v,t)\,d\boldsymbol{v}.$$

Это отличие вносит дополнительную нелокальность в классифицируемое уравнение, которая не могла быть учтена операторами группы L_4.

В работе [16] предложено преобразование переменной времени и ФР, позволившее привести неоднородное уравнение Больцмана (1) к однородному, для которого можно записать решение Бобылева — Крука — Ву в новых переменных и, таким образом, избежать громоздких преобразований [14]. В используемых переменных это преобразование имеет вид

$$\tilde t = \tau(t), \qquad \tilde x = x, \qquad \tilde\varphi = p(t)\varphi. \tag{8}$$

Для уравнения (1) рассмотрим источник более общего вида

$$G = G(\varphi(0,t), \varphi(x,t), t, x)$$

и покажем, при каких условиях преобразование (8) является для него преобразованием эквивалентности. Выразим производную по времени фурье-образа $\varphi(x,t)$ ФР:

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\tilde\varphi(x,\tau(t))}{p(t)}\Big) = \frac{\tilde\varphi_\tau\tau'(t)p(t) - \tilde\varphi p'(t)}{p^2(t)}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), в котором фурье-образы ФР также выражаются через $\tilde\varphi(x,\tau(t))/p(t)$, и перенося в полученном таким образом уравнении все члены, кроме первого, в правую часть, имеем

$$\tau'(t)\tilde{\varphi}_\tau(x,\tau(t)) = \frac{p'(t)}{p(t)}\,\tilde{\varphi}(x,\tau(t)) - \frac{1}{p(t)}\,\tilde{\varphi}(0,\tau(t))\tilde{\varphi}(x,\tau(t)) +$$

$$+\frac{1}{p(t)}\int\limits_0^1 \tilde{\varphi}(xs,\tau(t))\tilde{\varphi}(x(1-s),\tau(t))\,ds + p(t)G\Big(\frac{1}{p(t)}\,\tilde{\varphi}(0,\tau(t)),\ \frac{1}{p(t)}\,\tilde{\varphi}(x,\tau(t)),\ t,\ x\Big).$$

Добавляя в левую и правую части этого равенства операторную часть уравнения (1), записанную в преобразованных переменных, после перегруппировки слагаемых получаем

$$\tilde{\varphi}_\tau(x,\tau(t)) + \tilde{\varphi}(0,\tau(t))\tilde{\varphi}(x,\tau(t)) - \int\limits_0^1 \tilde{\varphi}(xs,\tau(t))\tilde{\varphi}(x(1-s),\tau(t))\,ds =$$

$$= \frac{p'(t)}{p(t)\tau'(t)}\,\tilde{\varphi}(x,\tau(t)) + \Big(1 - \frac{1}{p(t)\tau'(t)}\Big)\tilde{\varphi}(0,\tau(t))\tilde{\varphi}(x,\tau(t)) +$$

$$+\Big(\frac{1}{p(t)\tau'(t)} - 1\Big)\int\limits_0^1 \tilde{\varphi}(xs,\tau(t))\tilde{\varphi}(x(1-s),\tau(t))\,ds +$$

$$+\frac{p(t)}{\tau'(t)}\,G\Big(\frac{1}{p(t)}\,\tilde{\varphi}(0,\tau(t)),\ \frac{1}{p(t)}\,\tilde{\varphi}(x,\tau(t)),\ t,\ x\Big).$$

Для того чтобы преобразование (8) являлось преобразованием эквивалентности уравнения (1), необходимо исключить из правой части последнего уравнения интегральное слагаемое. Для этого достаточно положить

$$p(t)\tau'(t) = 1.$$

С учетом этого предположения источник принимает вид

$$\tilde{G}(\tilde{\varphi}(0,\tau(t)),\tilde{\varphi},\tau(t),x) = p'(t)\tilde{\varphi} + p^2(t)G\Big(\frac{1}{p(t)}\,\tilde{\varphi}(0,\tau(t)),\ \frac{1}{p(t)}\,\tilde{\varphi}(x,\tau(t)),t,x\Big).$$

Определим структуру функций источника $G(\varphi(0,t),\varphi(x,t),t,x)$, которые становятся равными нулю при использовании преобразования (8). При этом должно выполняться равенство

$$\tilde{G}(\tilde{\varphi}(0,\tau(t)),y,\tau(t),x) = p'(t)y + p^2(t)G\Big(\frac{1}{p(t)}\,\tilde{\varphi}(0,\tau(t)),\ \frac{1}{p(t)}\,y,t,x\Big) = 0, \qquad y \equiv \varphi(x,t).$$

Поскольку

$$\frac{\partial\tilde{G}}{\partial y} = 0,$$

функция источника является линейной по переменной y:

$$G(\varphi(0,t),\varphi(x,t),t,x) = \alpha(\varphi(0,t),t)\varphi(x,t), \tag{9}$$

в противном случае $p(t) = 0$.

Запишем полученные условия эквивалентности преобразования (8) с использованием числовой плотности частиц $n(t) = \varphi(0,t)$, добавив к ним закон эволюции (3)

$$p'(t) + p(t)\alpha(t,n(t)) = 0, \qquad \tau' = p^{-1}(t), \qquad n'(t) = \alpha(t,n(t))n(t).$$

Из закона эволюции (3) следует $\alpha(t, n(t)) = n'(t)/n(t)$. С учетом этого окончательно получаем

$$p = \frac{n_0}{n}, \qquad \tau' = \frac{n}{n_0}, \qquad \tau(t) = \int\limits_0^t \frac{n(s)}{n_0}\, ds, \tag{10}$$

где n_0 — произвольная постоянная.

Кроме того, для линейного источника (9) из закона эволюции энергии находим

$$\frac{\partial\varphi(0,t)}{\partial t}\, e(t) + \frac{\partial e(t)}{\partial t}\, \varphi(0,t) = \alpha(\varphi(0,t), t) e(t) \varphi(0,t).$$

Отсюда с учетом закона эволюции плотности частиц (3) следует, что в данном случае сохраняется средняя энергия (температура) частиц:

$$e(t) = e_0 = \mathrm{const}\,.$$

Таким образом, преобразование (8) при условиях (10) является преобразованием эквивалентности для уравнения (1) с источником вида (9), которое переводит его в уравнение того же вида с нулевой правой частью:

$$\tilde\varphi_\tau(x, \tau(t)) + n_0\tilde\varphi(x, \tau(t)) - \int\limits_0^1 \tilde\varphi(xs, \tau(t))\tilde\varphi(x(1-s), \tau(t))\, ds = 0. \tag{11}$$

Выбрав в соответствии с законами сохранения (4) определенные выше постоянные

$$n_0 = 1, \qquad e_0 = -1,$$

для уравнения (11) можно записать решение Бобылева — Крука — Ву (6) в преобразованных переменных, а затем перейти в нем к исходным переменным. Таким образом можно построить обобщенные решения Бобылева — Крука — Ву для выделенного класса источников (9).

Другим способом нахождения решений Бобылева — Крука — Ву для того же класса источников является нахождение соответствующего оператора в исходных переменных. Для этого базисные операторы (5) группы L_4, допускаемой уравнением (11), в преобразованных переменных (8)

$$\tilde x\, \partial_{\tilde x}, \quad \tilde x \tilde\varphi\, \partial_{\tilde\varphi}, \quad \tilde\varphi\, \partial\tilde\varphi - \tilde t\, \partial\tilde t, \quad \partial\tilde t \tag{12}$$

нужно выразить в исходных переменных. Эти операторы будем искать в форме

$$X = \xi\, \partial_t + \eta\, \partial_x + \zeta\, \partial_\varphi.$$

В соответствии с правилом преобразования операторов [3] имеем

$$\tilde X = X\tau(t)\, \partial_{\tilde t} + \eta\, \partial_{\tilde x} + X(p(t)\varphi)\, \partial_{\tilde\varphi} = \xi\, \frac{n}{n_0}\, \partial_{\tilde t} + \eta\, \partial_{\tilde x} + \Big(\xi\Big(\frac{n_0}{n}\Big)'\varphi + \frac{n_0}{n}\,\zeta\Big)\, \partial_{\tilde\varphi},$$

откуда для каждого базисного оператора (12) последовательно получаем коэффициенты ξ, η, ζ. Например, для оператора $\tilde\varphi\, \partial_{\tilde\varphi} - \tilde t\, \partial_{\tilde t}$ имеем

$$\xi\, \frac{n}{n_0} = -\tilde t, \qquad \eta = 0, \qquad \xi\Big(\frac{n_0}{n}\Big)'\varphi + \frac{n_0}{n}\,\zeta = \tilde\varphi,$$

откуда следует

$$\xi = -p\tau, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = (\tau p' + p)\varphi.$$

Аналогично находим коэффициенты ξ, η, ζ для следующих случаев:

— в случае $\tilde x\, \partial_{\tilde x}$

$$\xi = 0, \qquad \eta = x, \qquad \zeta = 0;$$

— в случае $\tilde{x}\tilde{\varphi}\,\partial_{\tilde{\varphi}}$

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = x\varphi;$$

— в случае $\partial_{\tilde{t}}$

$$\xi = p, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = -p'\varphi.$$

В результате базис операторов в преобразованных переменных имеет вид

$$x\,\partial_x, \quad x\varphi\,\partial_\varphi, \quad (\tau p' + p)\varphi\partial_\varphi - p\tau\,\partial_t, \quad p\,\partial_t - p'\varphi\,\partial_\varphi.$$

Следует отметить, что приведенные выше допустимые операторы можно получить также с использованием метода, предложенного в [13], путем расширения класса операторов. Например:

$$X = \xi(t)\partial_t + \eta(t)x\,\partial_x + (\zeta_2(t) + x\zeta_1(t) + \zeta_2(t)\varphi)\,\partial_\varphi.$$

В данном случае в соответствии с работой [12] решение Бобылева — Крука — Ву определяется оператором

$$x\,\partial_x + \frac{1}{\lambda}\,(p\,\partial_t - p'\varphi\,\partial_\varphi).$$

Инварианты этого оператора находятся из решения характеристической системы уравнений

$$\frac{dx}{x} = \lambda\,\frac{dt}{p(t)} = \lambda\,\frac{d\varphi}{-p'(t)\varphi}.$$

Из этого решения следует

$$I_1 = x\,\mathrm{e}^{\lambda\tau(t)}, \qquad I_2 = p(t)\varphi.$$

Соответствующее представление обобщенного инвариантного решения Бобылева — Крука — Ву имеет вид

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{p(t)}\,\tau'(t)F(x\,\mathrm{e}^{\lambda\tau(t)}).$$

Подставляя это выражение в уравнение (1) с функцией источника из выделенного класса (9), получаем фактор-уравнение для функции F с нулевой правой частью, из которого следует искомое решение.

Заметим, что, используя другие операторы из соответствующей (12) оптимальной системы подалгебр, можно получить другие фактор-уравнения, решения которых представимы в виде степенных рядов по автомодельным переменным (см. [17]).

Примеры решений типа решений Бобылева — Крука — Ву для линейных источников. Приведем примеры обобщенных решений Бобылева — Крука — Ву в явном виде для некоторых источников из класса (9), моделирующих определенную физическую ситуацию. В v-представлении решения записываются в виде [7]

$$f(v,t) = \frac{1}{p(t)}(2\pi\theta)^{-3/2}\Big[1 + \frac{1-\theta}{\theta}\Big(\frac{v^2}{2\theta} - \frac{3}{2}\Big)\Big]\exp\Big(-\frac{v^2}{2\theta}\Big). \tag{13}$$

Здесь $\theta = 1 - \theta_0\,\mathrm{e}^{-\tau(t)/6}$, $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2/5$. Подставляя в (13) $p(t)$ и $\tau(t)$, получаем искомое решение. Рассмотрим некоторые функции источников.

1. Согласно [14, 16] источник

$$G_1(v,t) = -C_R n(t) f(v,t)$$

описывает потери частиц, например при диссоциации или химической реакции с некоторыми фоновыми частицами.

Из закона эволюции числовой плотности (3) следует

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = -C_R n^2(t),$$

откуда получаем

$$n(t) = \frac{n_0}{1 + C_R n_0 t}.$$

Следовательно,

$$p(t) = \frac{n_0}{n(t)} = 1 + C_R n_0 t,$$

а выражение для $\tau(t)$ имеет вид

$$\tau(t) = \int\limits_0^t \frac{n(s)}{n_0}\, ds = \frac{1}{C_R n_0} \ln(1 + C_R n_0 t).$$

Для того чтобы записать решение Бобылева — Крука — Ву в виде (13), здесь и далее необходимо положить $n_0 = 1$.

2. Источник в форме

$$G_2(v,t) = -C_r n^2(t) f(v,t)$$

моделирует процесс рекомбинации с участием третьего тела или химическую реакцию третьего порядка с потерями частиц. В этом случае

$$n(t) = \frac{1}{(1 + C_r t)^{1/2}}, \quad p(t) = (1 + C_r t)^{1/2}, \quad \tau(t) = \frac{2}{C_r}\,((1 + C_r t)^{1/2} - 1).$$

3. Функция источника

$$G_3(v,t) = -C_e f(v,t)$$

может служить моделью процесса “убегания” частиц с высокой энергией из удерживающего силового поля, например из верхнего слоя атмосферы Земли. В этом случае

$$n(t) = \mathrm{e}^{-C_e t}, \quad p(t) = \mathrm{e}^{-C_e t}, \quad \tau(t) = \frac{1}{C_e}\,(1 - \mathrm{e}^{-C_e t}).$$

В приведенных примерах постоянные C_R, C_r, C_e являются константами скорости соответствующих процессов.

Можно рассмотреть случаи источников с более сложной структурой, например

$$G_k(v,t) = -(C_1 + C_2 n(t))^k f(v,t).$$

Такой вид функций, задающих источник, описывает комбинацию рассмотренных выше процессов потерь частиц. Так, случай $k = 1$ соответствует одновременно происходящим процессам диссоциации и “убегания” частиц, а при $k = 2$ объединяются все три процесса.

Заключение. На основе группы L_4, допускаемой уравнением Больцмана в случае изотропной ФР и максвелловского потенциала взаимодействия, построена группа эквивалентности для уравнения с источником. Однозначно выделен класс функций источника, линейных по ФР, которые становятся равными нулю под действием одного из преобразований эквивалентности. Это позволяет найти в явном виде обобщенные решения Бобылева — Крука — Ву, в частности решения, допускающие физическую интерпретацию.

Вместе с тем необходимо либо дальнейшее расширение группы эквивалентности другими преобразованиями, в частности такими, которые позволяют получать обобщенные решения Бобылева — Крука — Ву для других классов источников, либо доказательство отсутствия таких расширений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чепмен С.** Математическая теория неоднородных газов / С. Чепмен, Т. Каулинг. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
2. **Boffi V. C., Spiga G.** Nonlinear diffusion of test particles in the presence of an external conservative force // J. Phys. Fluids. 1982. V. 25. P. 1987–1992.
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. **Nonenmacher T. F.** Application of the similarity method to the nonlinear Boltzmann equation // Z. angev. Math. Phys. 1984. Bd 35, N 5. S. 680–691.
5. **Krook M., Wu T. T.** Formation of Maxwellian tails // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36, N 19. P. 1107–1109.
6. **Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V., Suriyawichitseranee A.** On group classification of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with sources II // Intern. Non-Linear Mech. 2014. V. 61. P. 15–18.
7. **Бобылев А. В.** Метод преобразования Фурье в теории уравнения Больцмана для максвелловских молекул // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 5. С. 1041–1044.
8. **Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V., Suriyawichitseranee A.** Group analysis of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with source term // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015. V. 20. P. 719–730.
9. **Ахатов И. С., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Нелокальные симметрии. Эвристический подход. М.: ВИНИТИ, 1989. (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новые достижения; Т. 34).
10. **Ibragimov N. H., Torrisi M., Valenti A.** Preliminary group classification of equation $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. 1991. V. 32, N 11. P. 2988–2995.
11. **Cardoso-Bihlo D. S., Bihlo A., Popovych R. O.** Enhanced preliminary group classification of a class of generalized diffusion equations // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 3622–3638.
12. **Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В.** Групповой анализ интегродифференциального уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 2. С. 323–327.
13. **Feng-Shan L., Karnbanjong A., Suriyawichitseranee A., et al.** Application of a Lie group admitted by a homogeneous equation for group classification of a corresponding inhomogeneous equation // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2017. V. 48. P. 350–360.
14. **Spiga G.** A generalized BKW solution of the nonlinear Boltzmann equation with removal // Phys. Fluids. 1984. V. 27, N 11. P. 2599–2600.
15. **Бобылев А. В.** О точных решениях уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 6. С. 1296–1299.
16. **Santos A., Brey J. J.** Comments on “A generalized BKW solution of the nonlinear Boltzmann equation with remobval” [Phys. Fluids 27, 2599 (1984)] // Phys. Fluids. 1986. V. 29, N 5. P. 1750.
17. **Grigoriev Yu. N.** Symmetries of integro-differential equation with applications in mechanics and plasma physics / Yu. N. Grigoriev, N. H. Ibragimov, V. F. Kovalev, S. V. Meleshko. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. (Lecture Notes in Physics; V. 806).

Поступила в редакцию 17/IV 2017 г.