

ЛИТЕРАТУРА

1. Наместников В. С. О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. ОТН.— 1957.— № 4.
2. Никитенко А. Ф., Соснин О. В. О соотношениях между приращениями деформаций ползучести и напряжениями при нестационарных режимах нагружения // ПМТФ.— 1978.— № 5.
3. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Пробл. прочности.— 1979.— № 7.
4. Соснин О. В. К вопросу о существовании потенциала ползучести // Инж. журнал. МТТ.— 1971.— № 5.
5. Никитенко А. Ф. Экспериментальное обоснование гипотезы существования поверхности ползучести в условиях сложного нагружения // Пробл. прочности.— 1984.— № 8.
6. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С., Антипов Е. А. Пластичность и прочность материалов при нестационарных нагружениях.— Киев: Наук. думка, 1984.
7. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии.— Киев: Наук. думка, 1976.
8. Кадашевич Ю. И., Луценко А. М., Помыткин С. П. Статистическая теория пластичности, учитывающая вид напряженного состояния // Исследования по механике строительных конструкций и материалов.— Л.: Изд-во Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1989.
9. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде // ПММ.— 1951.— Т. 15, вып. 2.
10. Черных К. Ф. О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга // Проблемы механики твердого деформированного тела: к 60-летию В. В. Новожилова/Отв. ред. Л. И. Седов.— Л.: Судостроение, 1970.
11. Цвелодуб И. Ю. О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1976.— Вып. 25.
12. Никитенко А. Ф. Об одной гипотезе в теории ползучести металлических материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1986.— Вып. 75.
13. Панов А. Д., Стасенко И. В. К построению теории пластичности материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию // Расчеты на прочность.— М.: Машиностроение, 1985.— Вып. 26.
14. Никитенко А. Ф. Экспериментальная проверка гипотезы существования термомеханической поверхности процесса ползучести // Пробл. прочности.— 1978.— № 9.

г. Санкт-Петербург

Поступила 5/XII 1990 г.

УДК 539.3

В. П. Ольшанский

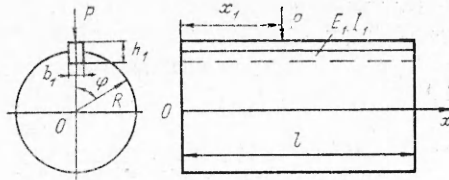
ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ, ПОДКРЕПЛЕННУЮ ПРОДОЛЬНЫМ РЕБРОМ

Вопросы передачи локальных нагрузок оболочкам через ребра жесткости решались в работах, представленных в обзоре [1]. В большинстве из них из-за сложности решений численные результаты получены на ЭВМ и оформлены в виде графиков и таблиц. Поэтому с позиций построения простых аналитических решений проблема требует дальнейшего изучения.

Ниже за счет применения полубезмоментной теории оболочек удалось построить компактные формулы для вычисления контактных реакций, прогибов и изгибающих моментов в ребре. При этом существенно использовалось быстрое затухание локальных возмущений по направляющей окружности [2], т. е. оболочка считалась бесконечной в окружном направлении, а условие периодичности решений по угловой координате не выполнялось. Применение непериодических решений в задачах локальной прочности оболочек берет начало из работ У. Финстервальдера, Ф. Одквиста и других зарубежных авторов, а анализ их погрешностей позволил Г. Н. Чернышеву [3] сделать выбор в пользу тех упрощений, которые они приносят.

1. Разложение компонент напряженно-деформированного состояния в одинарные тригонометрические ряды. Пусть оболочка радиуса R , тол-

плиты h свободно опирается по торцам $x = 0$, $x = l$ (см. рисунок). Через ребро изгибной жесткости $E_1 I_1$ в сечении $x = x_1$ она нагружена нормальной силой P . Требуется определить влияние оболочки на деформированное и напряженное состояние ребра, которое воспринимает внешнюю нагрузку.



При решении этой задачи кроме отмеченных выше упрощений дополнительно будем считать, что тонкостенный цилиндр имеет небольшое относительное удлинение ($R \leq l \leq 5R$) и взаимодействует с ребром только с помощью нормальных контактных реакций $q(x)$, распределенных по нулевой образующей $\varphi = 0$. Касательными составляющими взаимодействия и эксцентричностью подкрепления пренебрегаем. Не учитываем также взаимного влияния ребер, если их несколько на цилиндрической поверхности.

В этих предположениях в качестве функции Грина для оболочки целесообразно принять известное решение [4], построенное на базе уравнений полубезмоментной теории [5]:

$$(1.1) \quad w(x, x_1) = A \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2} \sin(kX_1) \sin(kX),$$

$$A = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} [12(1 - \nu^2)]^{5/8} R^{3/4} l^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} E h^{9/4}}, \quad X_1 = \frac{\pi x_1}{l}, \quad X = \frac{\pi x}{l}.$$

Здесь $w(x, x_1)$ — прогиб нулевой образующей в точке $(x, 0)$ от действия единичной нормальной силы в точке $(x_1, 0)$; E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Контактная нагрузка

$$(1.2) \quad q(x) = 2l^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kX)$$

вызовет перемещения

$$(1.3) \quad w(x) = A \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-3/2} \sin(kX).$$

В качестве функции Грина для ребра примем

$$(1.4) \quad w_1(x, x_1) = \frac{2l^3}{\pi^4 E_1 I_1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \sin(kX_1) \sin(kX), \quad I_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12},$$

где $w_1(x, x_1)$ — прогиб ребра в сечении x , вызванный единичной силой в сечении x_1 ; b_1 , h_1 — его ширина и высота, отмеренная по нормали к оболочке; E_1 — модуль упругости подкрепления.

От действия контактной нагрузки $q(x)$ и внешней силы P прогибы ребра, согласно (1.4), составят

$$(1.5) \quad w_1(x) = \frac{2l^3}{\pi^4 E_1 I_1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} (P \sin(kX_1) - a_k) \sin(kX).$$

На линии контакта ($\varphi = 0$) выполняется условие совместности деформаций $w(x) = w_1(x)$, откуда с учетом выражений (1.3), (1.5) получаем

$$(1.6) \quad A a_k k^{-3/2} = \frac{2l^3 k^{-4}}{\pi^4 E_1 I_1} (P \sin(kX_1) - a_k).$$

Решением уравнения (1.6) является

$$(1.7) \quad a_k = P c (k^{5/2} + c)^{-1} \sin(kX_1), \quad c = 2l^3 (\pi^4 E_1 I_1 A)^{-1}.$$

Подставляя эти значения a_k в выражение (1.5) для прогибов ребра (и оболочки вдоль ее образующей), находим

$$(1.8) \quad w(x, x_1) = 2Pl^3 (\pi^4 E_1 I_1)^{-1} S_1 \left(\frac{x}{l}, \frac{x_1}{l} \right),$$

$$S_1 \left(\frac{x}{l}, \frac{x_1}{l} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (k^4 + ck^{3/2})^{-1} \sin(kX_1) \sin(kX).$$

Изгибающий момент в ребре пропорционален второй производной прогиба:

$$(1.9) \quad M(x, x_1) = 2Pl\pi^{-2} S_2 \left(\frac{x}{l}, \frac{x_1}{l} \right),$$

$$S_2 \left(\frac{x}{l}, \frac{x_1}{l} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2} (k^{5/2} + c)^{-1} \sin(kX_1) \sin(kX).$$

Далее из выражений (1.2), (1.7) имеем ряд и для вычисления контактных реакций:

$$(1.10) \quad q(x, x_1) = 2Pcl^{-1} S_3 \left(\frac{x}{l}, \frac{x_1}{l} \right),$$

$$S_3 \left(\frac{x}{l}, \frac{x_1}{l} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (k^{5/2} + c)^{-1} \sin(kX_1) \sin(kX).$$

Параметр c определяет влияние оболочки на изгиб ребра. В пределе при $c \rightarrow 0$ контактные усилия $q(x, x_1) = 0$, а формулы (1.8), (1.9) описывают изгиб опертой балки. Другой предельный случай ($c \rightarrow \infty$) соответствует нагружению неподкрепленной оболочки. Выражение (1.8) переходит в решение (1.1), а из (1.9), (1.10) следует

$$M(x, x_1) = 0, \quad q(x, x_1) = P\delta(x - x_1)$$

($\delta(z)$ — функция Дирака). Поэтому при больших c контактные реакции будут сильно локализоваться в окрестности точки приложения внешней силы.

При расчете подкрепленных оболочек значения параметра c могут меняться в широком интервале ($0 < c < 300$). С ростом c замедляется сходимость рядов (1.8)–(1.10). Поэтому целесообразно ускорить их сходимость.

2. Убыстрение сходимости решений. Воспользуемся методом А. Н. Крылова, согласно которому перед вычислением надо выделить и аналитически просуммировать медленно сходящуюся часть ряда. Такими в решениях (1.8)–(1.10) являются ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \sin(kX_1) \sin(kX) \quad \left(\alpha = 2, \frac{5}{2}, 4 \right).$$

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos \frac{k\pi t}{l} \quad (0 \leq t \leq l).$$

Применим к нему интегральное преобразование Меллипа. С помощью таблиц интегральных преобразований [6, с. 279] находим

$$(2.1) \quad \int_0^{\infty} t^{s-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos \frac{k\pi t}{l} dt = \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \left(\frac{l}{2\pi} \right)^s \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha-s} \quad (0 < \operatorname{Re} s < 1)$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция).

Ряд в правой части выражения (2.1) сводится к дзета-функции Римана [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-z} = \zeta(z) \quad (\operatorname{Re} z > 1).$$

Поэтому, применив обратное преобразование Меллина, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos(k\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \beta^{-s} \zeta(\alpha+s) ds,$$

$$\beta = \pi t l^{-1}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Этот интеграл можно вычислить по теории вычетов. Ограничимся случаем $\alpha \neq 2m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), когда подынтегральная функция имеет только простые полюсы. Для гамма-функции они расположены в точках $s = -m$, причем $\operatorname{res}_{s=-m} \Gamma(s) = (-1)^m / m!$ [8]. Дзета-функция Римана имеет простой полюс при $\alpha + s = 1$, и ее вычет равен единице [8]. Интегрирование вдоль прямой, параллельной мнимой оси, сводим к интегрированию по замкнутому контуру, образованному дугой окружности радиуса r и прямой $\operatorname{Re} s = \sigma$. Учитывая, что при $r \rightarrow \infty$ интеграл по дуге окружности равен нулю, имеем

$$(2.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos(k\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cos \frac{m\pi}{2} \zeta(\alpha-m) \beta^m + \\ + \Gamma(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) \beta^{\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \zeta(\alpha-2n) \beta^{2n} + \\ + \pi \beta^{\alpha-1} \left(2\Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}\right)^{-1}.$$

Дзета-функция Римана протабулирована в [7], причем для натуральных m $\zeta(-2m) = 0$. Поэтому в случае четных α ряд в правой части выражения (2.2) обрывается и сводится к конечной сумме. Так, полагая $\alpha = 2$ и $\alpha = 4$, по формуле (2.2) находим

$$(2.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cos(k\beta) = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \gamma + \frac{1}{2} \gamma^2\right), \quad \gamma = \frac{\beta}{\pi}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \cos(k\beta) = \pi^4 \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{12} \gamma^2 + \frac{1}{12} \gamma^3 - \frac{1}{48} \gamma^4\right),$$

что согласуется с известными результатами [9]. При $\alpha = 5/2$ ряд (2.2) не обрывается, но сходится достаточно быстро, поскольку $0 \leq \gamma \leq 1$. Сохраняя члены разложения порядка γ^6 , получим

$$(2.4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/2} \cos(k\beta) = 1,3414 - 9,3052\gamma^{3/2} + 7,2047\gamma^2 - 0,1021\gamma^4 - \\ - 0,0059\gamma^6 + O(\gamma^8).$$

Учитывая формулы (2.3), (2.4), убыстряем сходимость рядов (1.8)–(1.10) и записываем их в виде

$$(2.5) \quad S_1\left(\frac{x}{l}, \frac{x_1}{l}\right) = \frac{\pi^4}{24} \left[X_+^2 - X_-^2 + \frac{1}{4}(X_+^4 - X_-^4) + X_-^3 - X_+^3\right] - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} (1 + k^{5/2} c^{-1})^{-1} \sin(kX_1) \sin(kX), \\ S_2\left(\frac{x}{l}, \frac{x_1}{l}\right) = \frac{\pi^2}{4} \left[X_+ - X_- + \frac{1}{2}(X_-^2 - X_+^2)\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} (1 + k^{5/2} c^{-1})^{-1} \sin(kX_1) \sin(kX),$$

$$S_3 \left(\frac{x}{l}, \frac{x_1}{l} \right) = 4,6526 (X_+^{3/2} - X_-^{3/2}) - 3,6024 (X_+^2 - X_-^2) + 0,0511 (X_+^4 - X_-^4) +$$

$$+ 0,0030 (X_+^6 - X_-^6) - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/2} (1 + k^{5/2} c^{-1})^{-1} \sin(kX_1) \sin(kX), \quad X_{\pm} = \frac{|x_1 \pm x|}{l}.$$

Значения функций $S_j(x/l, 1/2)$, $j = 1, 3$, вычисленные для различных x/l и c , указаны в табл. 1. Они характеризуют распределение прогибов, моментов и контактных усилий по длине ребра при действии внешней силы в среднем сечении. Анализ показывает, что затухание названных величин усиливается с увеличением параметра c . Наиболее медленно затухают прогибы. Что касается изгибающих моментов и контактных усилий, то они не только убывают по мере удаления от внешней сосредоточенной силы, но и могут менять знак на противоположный у края ребра.

Искомые величины достигают максимальных значений под сосредоточенной силой, приложенной посередине оболочки. Представляет интерес получить замкнутые формулы для вычисления этих значений.

3. Замкнутые формулы решений. Будем различать два случая: малых и больших c . При малых c ряды (2.5) сходятся достаточно быстро и удержание нескольких начальных членов дает хорошую точность. При этом

$$(3.1) \quad S_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{1+d} - \frac{1}{81(1+9\sqrt{3}d)} - \frac{1}{625(1+25\sqrt{5}d)},$$

$$S_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{1+d} - \frac{1}{9(1+9\sqrt{3}d)} - \frac{1}{25(1+25\sqrt{5}d)} -$$

$$- \frac{1}{49(1+49\sqrt{7}d)}, \quad d = c^{-1},$$

$$S_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = 1,1040 - \frac{1}{1+d} - \frac{1}{9\sqrt{3} + 243d} - \frac{1}{25\sqrt{5} + 3125d}.$$

О точности формул (3.1) позволяют судить результаты вычислений в табл. 2. Там наряду с точными значениями $S_j(1/2, 1/2)$ в скобках указаны и приближенные, полученные с помощью замкнутых решений (3.1). В промежутке $c \in [0; 10]$ погрешность формул (3.1) меньше 1 %, причем они дают завышенные значения прогибов, моментов и контактных усилий.

Т а б л и ц а 1

c	$10xl^{-1}$	$10^4 S_1 \left(\frac{x}{l}, \frac{1}{2} \right)$	$10^4 S_2 \left(\frac{x}{l}, \frac{1}{2} \right)$	$10^4 S_3 \left(\frac{x}{l}, \frac{1}{2} \right)$
10	5	1005	2727	1666
	4	905	984	997
	3	698	242	482
	2	465	-6	207
	1	231	-4	73
30	5	382	1724	859
	4	328	277	348
	3	238	-63	96
	2	152	-85	19
	1	74	-45	2
50	5	240	1399	632
	4	201	110	196
	3	141	-82	36
	2	89	-62	3
	1	43	-27	-1

Т а б л и ц а 2

c	$10^4 S_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$10^4 S_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$10^4 S_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
1	5139 (5139)	7260 (7261)	5997 (5998)
5	1782 (1782)	3688 (3693)	2536 (2536)
10	1005 (1005)	2727 (2737)	1666 (1671)
30	382 (383)	1724 (1750)	859 (878)
50	240 (241)	1399 (1440)	632 (663)

При больших c ряды (1.8)–(1.10) в точке $x = x_1 = l/2$ просуммируем приближенно по формуле Эйлера — Маклорена [10]:

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} f(k) \cong \frac{1}{2} \int_1^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{2} [f(\infty) - f(1)] + \frac{1}{6} [f'(\infty) - f'(1)] - \frac{1}{90} [f'''(\infty) - f'''(1)].$$

Представим в ней несобственный интеграл в виде

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx,$$

где уменьшаемое является табличным интегралом [9]

$$(3.2) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{p + qx^{\nu}} = \frac{1}{\nu p} \left(\frac{p}{q}\right)^{\mu/\nu} \frac{\pi}{\sin(\pi\mu/\nu)},$$

а вычитаемое находится с любой заданной точностью путем разложения подынтегральной функции в ряд по степеням (c^{-1}).

Проиллюстрируем методику суммирования на примере:

$$\begin{aligned} S_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (k^4 + ck^{3/2})^{-1} = \frac{1}{c} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{3/2}} - \frac{k}{k^{5/2} + c}\right) = \\ &= \frac{1}{c} \left(1,689 - \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k}{k^{5/2} + c}\right). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^{5/2} + c)^{-1}, \quad f(1) = (1 + c)^{-1}, \quad f(\infty) = f'(\infty) = f'''(\infty) = 0, \\ f'(1) &= \frac{1}{2} \frac{2c - 3}{(c + 1)^2}, \quad f'''(1) = \frac{5}{8} \frac{108c - 21(c^2 + 1)}{(c + 1)^4}. \end{aligned}$$

Используя выражение (3.2), находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^{5/2} + c} &= \frac{2}{5} \frac{1}{c^{1/5}} \frac{\pi}{\sin(4\pi/5)} = \frac{2,1379}{c^{1/5}}, \\ \int_0^1 \frac{x dx}{x^{5/2} + c} &= \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9c} + \frac{1}{7c^2} - \frac{2}{19c^3}\right) + O(c^{-5}). \end{aligned}$$

Подставив эти результаты в формулу Эйлера — Маклорена, получаем сумму ряда

$$\begin{aligned} S_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{c} \left\{1,689 - \frac{1}{2} \left[\frac{2,1379}{c^{1/5}} - \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9c} + \frac{1}{7c^2} - 2 \frac{1}{19c^3}\right) + \frac{1}{1+c}\right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \frac{2c - 3}{(c + 1)^2} + \frac{1}{144} \frac{21(c^2 + 1) - 108c}{(c + 1)^4}\right\}. \end{aligned}$$

Т а б л и ц а 3

c	$10^4 S_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$10^4 S_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$10^4 S_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
5	1782 (1786)	3688 (3679)	2536 (2531)
10	1005 (1005)	2727 (2726)	1666 (1664)
30	382 (382)	1724 (1725)	859 (859)
50	240 (240)	1399 (1399)	632 (632)
100	126 (126)	1056 (1056)	417 (417)
200	66 (66)	798 (798)	275 (275)
300	45 (45)	678 (678)	216 (216)

Т а б л и ц а 4

c	$10^4 S_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$10^4 S_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$10^4 S_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
5	1828	3470	2515
10	1015	2630	1659
30	383	1695	858
50	240	1382	632
100	126	1047	417
200	66	794	275
300	45	675	216

Аналогично находим

$$(3.3) \quad S_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1,3213}{c^{2/5}} - \frac{1}{c} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4c} + \frac{2}{13c^2} - \frac{1}{9c^3} \right) + \frac{1}{1+c} \right] + \\ + \frac{1}{12} \frac{4-c}{(1+c)^2} + \frac{1}{720} \frac{3c^3 - 36c^2 + 519c - 192}{(c+1)^4}, \\ S_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1,3213}{c^{3/5}} - \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2}{7c} + \frac{1}{6c^2} - \frac{2}{17c^3} \right) + \frac{1}{1+c} \right] + \frac{5}{12} \frac{1}{(1+c)^2} + \\ + \frac{1}{144} \frac{84c - 3c^2 - 63}{(c+1)^4}.$$

В табл. 3 в скобках указаны результаты расчетов по формулам (3.3) и точные значения $S_j(1/2, 1/2)$. Из нее видно, что при $c > 5$ замкнутые решения (3.3) обеспечивают хорошую точность расчета (погрешности меньше 1 %). Замкнутые решения (3.1), (3.3) перекрывают весь диапазон возможных значений c и избавляют от необходимости численного суммирования рядов.

При больших c имеется возможность упрощения формул (3.3) за счет отбрасывания второстепенных членов. Такая операция дает

$$(3.4) \quad S_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = c^{-1} (1,689 - 1,069c^{-1/5}), \\ S_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0,6607c^{-2/5}, \quad S_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0,6607c^{-3/5}.$$

Расчет по формулам (3.4) показывает (табл. 4), что в промежутке $30 \leq c \leq 300$ погрешности их меньше 2 %. Поэтому для больших c вычисление максимальных прогибов, изгибающих моментов и контактных усилий сводится к элементарным формулам

$$w\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 E_1 I_1 c} (1,689 - 1,069c^{-1/5}), \\ M\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) = 1,3213 \frac{Pl}{\pi^2 c^{2/5}}, \quad q\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) = 1,3213 \frac{Pc^{2/5}}{l}.$$

В заключение подчеркнем, что полученные здесь аналитические результаты относятся к случаю нагружения подкрепленной оболочки одной радиальной силой. При действии на ребра циклически симметричной нагрузки из нескольких сосредоточенных сил предложенные упрощения теряют смысл и нужно строить периодические решения по угловой координате, как это сделано в [11, 12] и других работах по теории орребренных оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Образцов И. Ф., Нерубайко Б. В., Ольшанский В. П. Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований).— М., 1988.— Деп. ВИНТИ 12.02.88, № 1222.
2. Гольденвейзер А. Л. К вопросу о расчете оболочек на сосредоточенные силы // ПММ.— 1954.— Т. 18, вып. 2.
3. Чернышев Г. Н. О контактных задачах в теории оболочек // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек.— М.: Наука, 1970.
4. Odquist F. K. G. Action of forces and moments symmetrically distributed along a generatrix of thin cylindrical shells // J. Appl. Mech.— 1946.— V. 13, N 2.
5. Schores H. Line loads action on thin cylindrical shells // Proc. ASCE.— 1935.— V. 61, N 3.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина.— М.: Наука, 1969.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции.— М.: Наука, 1977.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1973.— Т. 1.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1962.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1969.— Т. 2.
11. Григлюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек.— М.: Машиностроение, 1980.
12. Максименко В. Н., Филытинский Л. А. Упругое равновесие анизотропных оболочек, подкреплённых ребрами жесткости // ПММ.— 1976.— Т. 39, вып. 5.

г. Харьков

Поступила 26/XII 1990 г.

УДК 534.222.2 + 624.131

Н. Н. Гердюков, А. Г. Иоилев, С. А. Новиков

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВЗРЫВНЫХ НАГРУЗОК НА МЯГКИЙ ГРУНТ

Мягкие грунты являются сложными многофазными средами, состоящими из твердых зерен, воды и воздуха, заключенных в межзеренном пространстве. Исследование поведения мягких грунтов при интенсивных ударных нагрузках имеет большой научный и практический интерес.

Систематическое экспериментальное изучение механических свойств мягких грунтов при взрывном нагружении было начато в конце 50-х годов (см., например, [1—6]). Однако почти во всех работах максимальное измерявшееся давление не превышало 75 МПа. Свойства песка при ударно-волновом нагружении в области больших давлений рассматривались в [2, 4]. В [2] получены ударная адиабата сухого песка плотностью $\rho_{00} = 1,66 \text{ г/см}^3$ в интервале напряжений от 100 МПа до 5 ГПа, а также зависимость массовой скорости частиц в волне разгрузки при выходе плоской ударной волны (УВ) на свободную поверхность u_1 от массовой скорости в падающей УВ u в интервале от 50 до 800 м/с. Оказалось, что во всем этом интервале $u_1/u = 1,36$. В [4] получены ударные адиабаты четырех фракций сухого песка в интервале напряжений от 1 до 6 ГПа и двух фракций водонасыщенного песка в интервале от 2 до 12 ГПа.

Ниже приводятся некоторые результаты измерений сжимаемости насыпного песка естественной влажности в проходящей и отраженной УВ, создаваемых детонацией плоского слоя взрывчатого вещества (ВВ),