

УДК 532.529.6

## ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХ УДАРОВ ВЯЗКОУПРУГИХ КАПЕЛЬ О ЖЕСТКУЮ ПЛАСТИНУ МЕТОДОМ СГЛАЖЕННЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

С. Я. Сюй

Школа математических и компьютерных наук Шеньсинского технологического университета, 723000 Ханьчжун, Китай  
E-mail: xiaoyang.xu@snut.edu.cn

С использованием Б-модели Олдройда вязкоупругой жидкости и метода сглаженных гидродинамических частиц решается задача о двух ударах вязкоупругих капель о жесткую пластину. Для устранения неустойчивости при “растяжении” в уравнения движения вводятся искусственные напряжения. Показано, что результаты решения задачи о двух последовательных ударах капель хорошо согласуются с известными решениями. Решена задача о двух одновременных ударах капель о жесткую пластину.

**Ключевые слова:** сглаженные гидродинамические частицы, трехмерная задача, капли, вязкоупругость, численное моделирование.

DOI: 10.15372/PMTF20170216

**Введение.** Соударение вязкоупругих капель с жесткой пластиной имеет место во многих инженерных и технологических процессах, например при печати на струйных принтерах, быстром охлаждении поверхностей распыляемой струей, пульверизации топлива в камерах сгорания и т. п. [1]. При этом поверхности должны быть покрыты равномерно. Однако при растекании вязкоупругих капель и их соударении с жесткой преградой возникают явления, отсутствующие при соударении капель ньютоновской жидкости, например их сжатие или отскок. Модель удара одной капли о пластину является идеализированной. Существует небольшое количество работ, посвященных исследованию двух ударов вязкоупругих капель о жесткую пластину и их растекания [2].

Как правило, при моделировании течения жидкости применяются сеточные методы, такие как конечно-разностный метод [3] и метод конечных элементов [4]. Однако при решении задач о движении жидкости при больших деформациях в случае наличия свободных границ необходимо использовать методы, позволяющие определять границы свободных поверхностей, например метод жидких объемов, метод функции уровня, метод ячеек. В методе жидких объемов для определения границы свободной поверхности необходимо

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 11502132), Фонда Ассоциации молодых ученых в области науки и технологий Шеньсинского технологического университета (грант № 20160127), Исследовательского фонда для поддержки докторантов Шеньсинского технологического университета (грант № SLGKYQD2-15) и в рамках научно-исследовательской программы Министерства образования провинции Шеньси (грант № 15JK1152).

© Сюй С. Я., 2017

дополнительно решать дифференциальное уравнение в частных производных для каждой заполненной жидкостью части контрольного объема. В методе функции уровня используется дополнительная функция уровня для описания движения поверхности. Уравнение для функции уровня обычно решается методом Эйлера с использованием конечно-разностных методов высокого порядка. Для решения задач о течении жидкости со свободной поверхностью применяется метод ячеек, в котором для определения положения движущейся поверхности используются маркеры. Несмотря на надежность этого метода, он достаточно сложен для программирования и для его реализации требуются большие вычислительные затраты, особенно при решении трехмерных задач.

В последнее время наряду с сеточными методами, используемыми при решении задач механики сплошной среды, развиваются бессеточные методы (методы частиц), в частности метод сглаженных гидродинамических частиц (МСГЧ), предложенный в 1977 г. для решения трехмерных задач астрофизики [5–7]. Поскольку МСГЧ формулируется в лагранжевых переменных, он применим при решении задач о конвекционном движении жидкости с учетом больших деформаций. Этот метод позволяет решать задачи о течении жидкости со свободными границами, имеющими сложную геометрию, при этом не требуется использовать дополнительные процедуры при определении положения свободных границ. Также с помощью МСГЧ можно решать задачи о движении многофазных сред с использованием уравнений состояния, адекватно описывающих поведение сред, с учетом сжимаемости, излучения и отвердевания, а также решать двумерные и трехмерные задачи со сложной геометрией области. Этот метод достаточно прост для программирования. МСГЧ широко используется для решения различных задач механики сплошных сред, в том числе задач о течении жидкости со свободными границами [8], задач о движении неньютоновской жидкости [9] и т. п. Этот метод детально изложен и в работе [10], там же приведен обзор работ, в которых он применяется при решении различных задач.

В последние годы МСГЧ используется при решении задач о движении вязкоупругих сред, в том числе задач об ударе вязкоупругих капель о жесткую пластину. В работе [9] МСГЧ применяется для моделирования начальной стадии течения вязкоупругой жидкости (на основе Б-модели Олдройда и модели Максвелла с верхней конвективной производной) между параллельными пластинами при малых числах Рейнольдса. В [1] при решении задачи об ударе вязкоупругой капли о жесткую пластину МСГЧ был модифицирован путем добавления в уравнения движения искусственных напряжений для устранения неустойчивости при “растяжении”, которая проявляется в образовании скопления частиц и разрушении жидкости. В [11] решена двумерная задача об ударе вязкоупругой несжимаемой капли о жесткую пластину, при этом для преодоления трудностей, возникающих при решении задач о движении несжимаемой жидкости, для давления использовалось уравнение Пуассона. В [9] МСГЧ применен для изучения течения вязкоупругой жидкости на основе модели броуновского движения.

Исследование, проводимое в данной работе, обусловлено необходимостью изучения процесса атомизации топлива, поскольку вещества, участвующие в этом процессе, имеют вязкоупругие свойства. С использованием Б-модели Олдройда вязкоупругой жидкости решается задача о двух ударах вязкоупругих капель о жесткую пластину.

**1. Уравнения задачи.** В лагранжевой системе координат решение задачи о движении изотермической слабосжимаемой вязкоупругой жидкости сводится к решению системы уравнений, включающей законы сохранения массы и количества движения

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta}; \quad (1)$$

$$\frac{dv^\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + g^\alpha, \quad (2)$$

а также нелинейное определяющее соотношение. В (1), (2)  $\rho$  — плотность жидкости;  $t$  — время;  $v^\beta$  — компоненты вектора скорости жидкости;  $x^\beta$  — пространственные координаты;  $\sigma^{\alpha\beta}$  — компоненты тензора напряжений Коши;  $g^\alpha$  — компоненты вектора ускорения свободного падения;  $d/dt = \partial/\partial t + v^\beta \partial/\partial x^\beta$  — материальная производная.

Тензор напряжений Коши, как правило, представляется в виде суммы давления  $p$ , напряжений  $\tau_s^{\alpha\beta}$ , обусловленных наличием сольвента, и напряжений  $\tau_p^{\alpha\beta}$ , обусловленных наличием полимера:

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \tau_s^{\alpha\beta} + \tau_p^{\alpha\beta}$$

( $\delta^{\alpha\beta} = 1$  при  $\alpha = \beta$ ,  $\delta^{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ). Для составляющей  $\tau_s^{\alpha\beta}$  принимается определяющее соотношение для ньютоновской жидкости

$$\tau_s^{\alpha\beta} = 2\eta_s d^{\alpha\beta},$$

где  $\eta_s$  — вязкость сольвента;  $d^{\alpha\beta}$  — тензор скоростей деформаций:

$$d^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right).$$

В данной работе используется реологическая Б-модель Олдройда и в соответствии с [1] для составляющей  $\tau_p^{\alpha\beta}$  принимается соотношение

$$\tau_p^{\alpha\beta} + \lambda_1 (\tau_p^{\alpha\beta})^\nabla = 2\eta_p d^{\alpha\beta}, \quad (3)$$

где  $\lambda_1$  — время релаксации вязкоупругой жидкости;  $\eta_p$  — вязкость полимера;  $(\tau_p^{\alpha\beta})^\nabla$  — верхняя контравариантная конвективная производная  $\tau_p^{\alpha\beta}$ :

$$(\tau_p^{\alpha\beta})^\nabla = \frac{d\tau_p^{\alpha\beta}}{dt} - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\gamma} \tau_p^{\gamma\beta} - \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\gamma} \tau_p^{\alpha\gamma}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\frac{d\tau_p^{\alpha\beta}}{dt} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\gamma} \tau_p^{\gamma\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\gamma} \tau_p^{\alpha\gamma} - \frac{1}{\lambda_1} \tau_p^{\alpha\beta} + \frac{2\eta_p}{\lambda_1} d^{\alpha\beta}. \quad (5)$$

Для вязкоупругой жидкости полагается, что полная вязкость представляет собой сумму вязкостей, обусловленных наличием сольвента и полимера:  $\eta = \eta_s + \eta_p$ . Для описания вязкоупругих свойств жидкости введем безразмерное число Рейнольдса  $Re = \rho VL/\eta$ , число Вайсенберга  $Wi = \lambda_1 V/L$  и параметр вязкости  $\beta = \eta_s/\eta$  ( $V, L$  — характерные скорость и длина соответственно).

**2. Метод сглаженных гидродинамических частиц.** Ниже приводится описание МСГЧ.

2.1. *Дискретизация в методе сглаженных частиц.* В МСГЧ взаимодействие частиц моделируется с помощью kern-функции  $W$  [6]. Kern-функция должна быть дельтообразной функцией, иметь компактный носитель, удовлетворять условию нормировки и ряду других условий. Поскольку kern-функция имеет компактный носитель, каждая частица взаимодействует только с ближайшими соседями, находящимися в локализованной области  $\varkappa h$  ( $\varkappa$  — константа, зависящая от вида конкретной kern-функции;  $h$  — параметр сглаживания). В данной работе в качестве kern-функции используется сплайн пятого порядка с носителем размером  $3h$ , т. е.  $\varkappa = 3$  [12].

При заданной kern-функции  $W$  произвольная функция  $f(\mathbf{r})$  аппроксимируется следующим образом [7]:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}'. \quad (6)$$

Здесь  $\langle \cdot \rangle$  — kern-аппроксимация;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки. Дискретная аппроксимация выражения (6) представляется в виде суммы по соседним частицам

$$f(\mathbf{r}_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{r}_j) W_{ij},$$

где  $W_{ij} = W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$ ;  $m_j$ ,  $\rho_j$  — масса и плотность  $j$ -й частицы соответственно. Градиент функции  $f(\mathbf{r}_i)$  аппроксимируется следующим образом [7]:

$$\left( \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x^\beta} \right)_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{r}_j) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (7)$$

( $\partial W_{ij} / \partial x_j^\beta = \partial W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) / \partial x_j^\beta$  — градиент ядра). Для градиента ядра существуют различные аппроксимации, например:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho f(\mathbf{r}))}{\partial x^\beta} - f(\mathbf{r}) \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} \right), \quad \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x^\beta} = \rho \left( \frac{\partial(f(\mathbf{r})/\rho)}{\partial x^\beta} + \frac{f(\mathbf{r})}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} \right). \quad (8)$$

Подставляя (7) в правые части соотношений (8), получаем

$$\left( \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x^\beta} \right)_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j (f(\mathbf{r}_j) - f(\mathbf{r}_i)) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}; \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x^\beta} \right)_i = \rho_i \left( \sum_j m_j \left( \frac{f(\mathbf{r}_j)}{\rho_j^2} + \frac{f(\mathbf{r}_i)}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \right). \quad (10)$$

В данной работе используется аппроксимация (9), поэтому дискретная форма уравнения неразрывности (1) имеет следующий вид:

$$\left( \frac{d\rho}{dt} \right)_i = \sum_j m_j (v_i^\beta - v_j^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}. \quad (11)$$

Поскольку аппроксимация (10) обеспечивает сохранение количества движения [7], она используется при аппроксимации градиента тензора напряжений Коши. При этом дискретные уравнения движения (2) имеют следующий вид:

$$\left( \frac{dv^\alpha}{dt} \right)_i = \sum_j m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + g_i^\alpha.$$

При аппроксимации определяющего соотношения (5) вводится градиент скорости

$$k_i^{\alpha\beta} = \left( \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right)_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (v_j^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}. \quad (12)$$

При выводе (12) используются аппроксимация (7) и тождество

$$\left( \frac{\partial 1}{\partial x^\beta} \right)_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} = 0.$$

С учетом сказанного выше дискретные уравнения состояния в Б-модели Олдройда принимают вид

$$\sigma_i^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \eta_s (k_i^{\alpha\beta} + k_i^{\beta\alpha}) + \tau_{p,i}^{\alpha\beta};$$

$$\left(\frac{d\tau_p^{\alpha\beta}}{dt}\right)_i = k_i^{\alpha\gamma}\tau_{p,i}^{\gamma\beta} + k_i^{\beta\gamma}\tau_{p,i}^{\gamma\alpha} - \frac{1}{\lambda_1}\tau_{p,i}^{\alpha\beta} + \frac{\eta_p}{\lambda_1}(k_i^{\alpha\beta} + k_i^{\beta\alpha}). \quad (13)$$

Закон движения частицы записывается следующим образом:

$$\frac{dx_i^\alpha}{dt} = v_i^\alpha. \quad (14)$$

**2.2. Неустойчивость при растяжении и искусственные напряжения.** Как известно, при использовании МСГЧ для моделирования поведения упругих или хрупких тел возникает так называемая неустойчивость при “растяжении” [13], которая проявляется в том, что при действии растягивающих напряжений движение частиц становится неустойчивым, образуются скопления частиц и процесс вычислений заканчивается аварийным остановом. В данной работе обнаружено, что неустойчивость при “растяжении” возникает также при решении задачи об ударе вязкоупругой капли о жесткую пластину. Существуют различные приемы, позволяющие устранить неустойчивость при “растяжении”, например введение искусственных сжимающих напряжений [14], обеспечивающих однородное распределение частиц при действии растягивающих напряжений. В результате дискретная форма уравнений движения (2) модифицируется [14]:

$$S_{ij} = f_{ij}^n(R_i^{\alpha\beta} + R_j^{\alpha\beta}).$$

Здесь  $n = W(0, h)/W(\delta_0, h)$ ;  $R^{\alpha\beta}$  — тензор искусственных напряжений;  $f_{ij} = W_{ij}/W(\delta_0, h)$ ;  $\delta_0$  — начальное расстояние между частицами.

В двумерных задачах компоненты тензора искусственных напряжений  $R^{\alpha\beta}$ , как правило, получаются путем вращения двумерной декартовой системы координат [14]. Однако в трехмерном случае вращение трехмерной декартовой системы координат является весьма трудоемкой процедурой. Из результатов проведенных в данной работе численных экспериментов следует, что неустойчивость при “растяжении” можно устранить, используя упрощенное выражение для  $R^{\alpha\beta}$ :

$$R^{\alpha\beta} = \begin{cases} -b\sigma^{\alpha\beta}/\rho^2, & \sigma^{\alpha\beta} > 0, \\ 0, & \sigma^{\alpha\beta} \leq 0 \end{cases}$$

( $b \in [0, 1]$  — малый параметр). Следует отметить, что в данной модели не учитывается поверхностное напряжение, поскольку в исследуемой задаче пространственный масштаб является достаточно большим. В этом случае учет поверхностного напряжения практически не влияет на результаты численного моделирования [1, 3, 11].

После добавления искусственных напряжений дискретные уравнения движения (2) принимают следующий вид:

$$\left(\frac{dv^\alpha}{dt}\right)_i = \sum_j m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + S_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + g^\alpha. \quad (15)$$

**2.3. Искусственная сжимаемость.** При моделировании движения жидкости с помощью МСГЧ обычно предполагается, что жидкость является слабосжимаемой [7]. В данной работе принимается уравнение состояния [1]

$$p(\rho) = c^2(\rho - \rho_0).$$

Здесь  $\rho_0$  — отсчетная плотность (как правило, начальная плотность жидкости). Следовательно, давление на свободной поверхности практически равно нулю. Для адекватного моделирования движения несжимаемой жидкости скорость звука  $c$  должна быть приблизительно в 10 раз больше максимальной скорости жидкости в исследуемой физической задаче [7].

2.4. *Интегрирование по времени.* В данной работе для интегрирования по времени вдоль траектории частицы системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (13)–(15) используется схема предиктор-корректор [9]. Обозначим через  $\mathbf{X}_i$  вектор неизвестных  $x_i, \rho_i, v_i^\alpha, \tau_{p,i}^{\alpha\beta}$ , через  $\mathbf{F}_i$  — вектор правых частей уравнений (11), (13)–(15). В этих обозначениях шаг предиктор заключается в определении по схеме Эйлера вектора неизвестных  $\mathbf{X}_i^{n+1/2}$  на  $(n + 1/2)$ -м шаге по времени:  $\mathbf{X}_i^{n+1/2} = \mathbf{X}_i^n + \mathbf{F}_i^n \Delta t/2$ . На шаге корректор определяется вектор неизвестных на  $(n + 1)$ -м шаге по времени:  $\mathbf{X}_i^{n+1} = \mathbf{X}_i^n + \mathbf{F}_i^{n+1/2} \Delta t$ . При выборе шага интегрирования по времени используются следующие критерии устойчивости [7]:

— условие Куранта — Фридрихса — Леви

$$\Delta t \leq 0,25h/c;$$

— условие, зависящее от вязкости жидкости:

$$\Delta t \leq 0,125h^2/\nu$$

( $\nu = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость);

— условие, зависящее от величины массовых сил:

$$\Delta t \leq \min_a \sqrt{h/F_a}$$

( $F_a$  — величина сил инерции частицы).

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** Ниже представлены результаты тестовых расчетов и численного решения двух задач о двух последовательных и двух одновременных ударах вязкопластических капель о жесткую пластину.

3.1. *Тестовые расчеты.* Проведено сравнение результатов, полученных методом сглаженных гидродинамических частиц с использованием Б-модели Олдройда при численном решении задачи о растекании капли после ее удара о жесткую пластину, с результатами, полученными при решении этой задачи конечно-разностным методом [3]. Параметры задачи были такие же, как в работе [3]: начальная скорость капли  $V = -1$  м/с, ее диаметр  $D = 0,02$  м, расстояние от центра капли до центра жесткой пластины (высота падения)  $H = 0,04$  м, размеры жесткой пластины:  $-0,03 \text{ м} \leq x \leq 0,03 \text{ м}$ ,  $-0,03 \text{ м} \leq y \leq 0,03 \text{ м}$ ,  $z = 0$ , полная вязкость жидкости  $\eta = 4$  Па·с, отсчетная плотность  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = -9,81$  м·с<sup>-2</sup>. Параметры Б-модели Олдройда имели следующие значения: вязкость, обусловленная наличием сольвента,  $\eta_s = 0,4$  Па·с, вязкость, обусловленная наличием полимера,  $\eta_p = 3,6$  Па·с, время релаксации  $\lambda_1 = 0,02$  с. В соответствии с этими данными  $Re = 5,0$ ,  $Wi = 1,0$ ,  $\beta = 0,1$ . При решении задачи с использованием МСГЧ расстояние между частицами, находящимися как внутри объема, так и на границе, выбрано равным  $\delta_0 = 0,00025$  м, что соответствует общему числу частиц, равному 500 085. Параметр сглаживания  $h = 1,5\delta_0$ , параметр искусственных напряжений  $b = 0,8$ , что обеспечивает отсутствие неустойчивости при “растяжении”. Шаг по времени  $\Delta t = 10^{-5}$  выбран в соответствии с условием устойчивости численного алгоритма. Было выполнено 10 000 шагов по времени. Для проведения вычислений на компьютере HP RX2600 с 16 процессорами потребовалось 16 ч.

На рис. 1 представлена зависимость безразмерной ширины капли  $W_L = w_l/D$  ( $w_l$  — расстояние по горизонтали между левой и правой границами капли) от безразмерного времени  $T = tV/D$ , полученная с использованием МСГЧ и конечно-разностного метода [3]. Видно, что результаты, полученные с помощью этих двух методов, хорошо согласуются. Это свидетельствует об эффективности использования МСГЧ при решении трехмерных задач о течении вязкоупругой жидкости при наличии свободной поверхности. С помощью

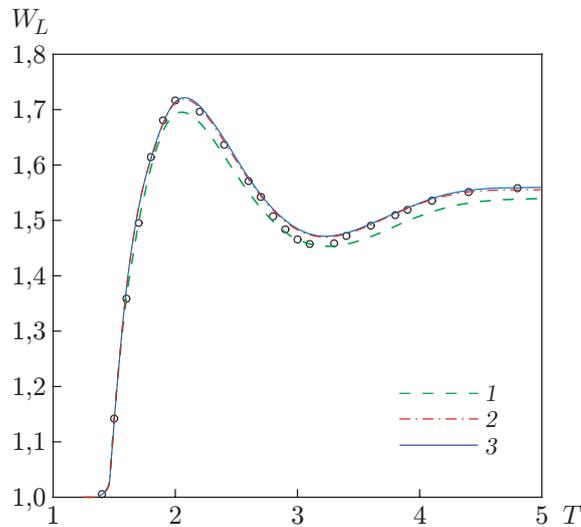


Рис. 1. Зависимость ширины капли от времени при ее растекании после удара о жесткую пластину:

линии — данные настоящей работы, полученные с использованием МСГЧ (1 — 156 459 частиц, 2 — 500 085 частиц, 3 — 885 697 частиц), точки — данные работы [15], полученные с использованием конечно-разностного метода

МСГЧ были выполнены также вычисления для расстояний между частицами, равных  $4 \cdot 10^{-4}$  и  $2 \cdot 10^{-4}$  м, что соответствует числу частиц 156 459 и 885 697. При увеличении числа частиц МСГЧ сходится быстрее.

3.2. *Моделирование двух последовательных ударов капель о жесткую пластину.* Ниже приводятся результаты численного решения методом сглаженных гидродинамических частиц с использованием Б-модели Олдройда и модели ньютоновской жидкости следующей задачи: при  $T = 0$  первая капля ударяется о жесткую пластину и начинает по ней растекаться, через некоторое время вторая капля ударяется о первую и постепенно погружается в вязкую среду. Начальные диаметры и скорости обеих капель одинаковы:  $D = 0,02$  м,  $V = -1$  м/с, координаты центра первой капли  $(0, 0, 0,01)$  м, размеры жесткой пластины:  $-0,04 \text{ м} \leq x \leq 0,04 \text{ м}$ ,  $-0,04 \text{ м} \leq y \leq 0,04 \text{ м}$ ,  $z = 0$ , расстояние между каплями по вертикали  $\Delta h = 1,1D$ , полная вязкость жидкости  $\eta = 4$  Па·с, отсчетная плотность  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = -9,81$  м·с<sup>-2</sup>. Параметры Б-модели Олдройда:  $\eta_s = 0,4$  Па·с,  $\eta_p = 3,6$  Па·с,  $\lambda_1 = 0,02$  с. В соответствии с этими параметрами  $Re = 5,0$ ,  $Wi = 1,0$ ,  $\beta = 0,1$ . Начальное расстояние между частицами равно  $\delta_0 = 0,000 25$  м, что соответствует общему числу частиц (внутри объема и на границе), равному 947 686. Параметр сглаживания равен  $h = 1,5\delta_0$ . Для устранения неустойчивости при “растяжении” параметр искусственных напряжений  $b$  выбран равным 0,3 в случае ньютоновской жидкости и 0,8 в случае жидкости Олдройда. Шаг по времени  $\Delta t = 10^{-5}$  выбран в соответствии с условием устойчивости численного алгоритма. Было выполнено 10 000 шагов по времени. Для проведения вычислений на компьютере HP RX2600 с 16 процессорами потребовалось 18 ч в случае ньютоновской жидкости и 23 ч в случае жидкости Олдройда.

На рис. 2, а, з, ж представлены результаты численного моделирования двух последовательных ударов капель ньютоновской жидкости о жесткую пластину. После удара первой капли о пластину она начинает терять выпуклую форму. Ширина капли увеличивается, ее высота уменьшается. В момент времени  $T \approx 0,4$  вторая капля касается поверхности первой и начинает погружаться в нее.

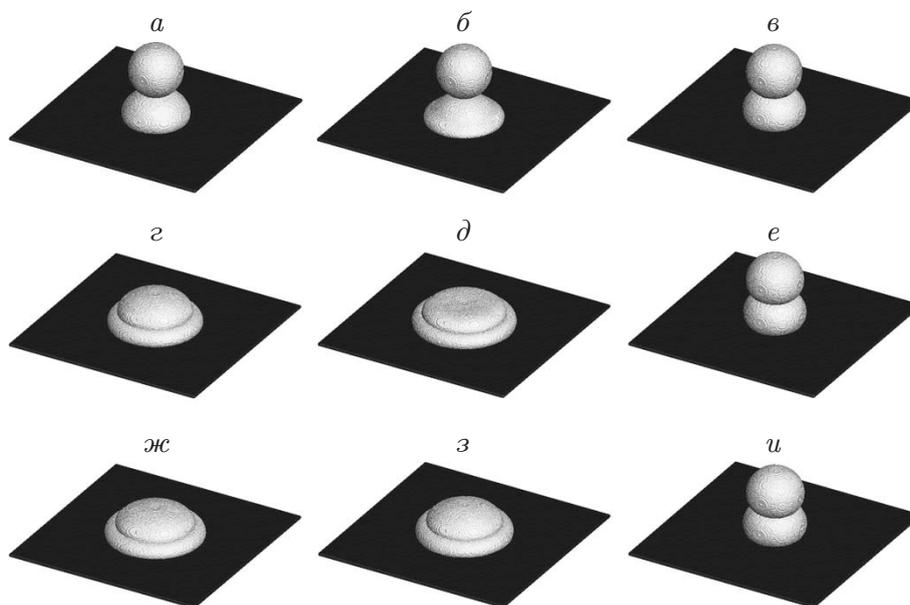


Рис. 2. Растекание каплей при двух последовательных ударах о жесткую пластину:  $a$ – $в$  —  $T = 0,5$ ,  $г$ – $е$  —  $T = 2,0$ ,  $ж$ – $и$  —  $T = 4,0$ ;  $a$ ,  $г$ ,  $ж$  — ньютоновская жидкость,  $б$ ,  $д$ ,  $з$  — Б-жидкость Олдройда,  $в$ ,  $е$ ,  $и$  — высоковязкая Б-жидкость Олдройда

На рис. 2,  $б$ ,  $д$ ,  $з$  представлены результаты численного моделирования двух последовательных ударов о жесткую пластину каплей жидкости Олдройда (Б-модель Олдройда). Первая капля жидкости Олдройда после удара о пластину растекается по ней быстрее, чем первая капля ньютоновской жидкости. Поэтому вторая капля ударяется о первую при  $T \approx 0,5$ , т. е. позднее момента соударения каплей ньютоновской жидкости. После соударения различие характера течения каплей ньютоновской жидкости и жидкости Олдройда становится более существенным. С момента времени  $T \approx 1,8$  капля жидкости Олдройда начинает сжиматься, что обусловлено ее упругими свойствами [1, 3, 11]. По мере того как капля теряет упругость, она вновь (с момента времени  $T \approx 3,2$ ) начинает растекаться, так же как и капля ньютоновской жидкости. При  $T \approx 5,0$  размеры погружающихся каплей ньютоновской жидкости и жидкости Олдройда становятся приблизительно одинаковыми. Следует ожидать, что с увеличением вязкости капли на стадии ее сжатия может произойти отскок.

На рис. 2,  $в$ ,  $е$ ,  $и$  показан процесс соударения каплей жидкости с вязкостью  $\eta = 40$  Па·с. Задача о растекании высоковязкой жидкости Олдройда (Б-модель) решалась на компьютере HP RX2600 с 16 процессорами в течение 24 ч.

На рис. 3 представлена зависимость безразмерной ширины каплей от безразмерного времени.

В случае каплей жидкости с большей вязкостью первая капля после удара о пластину растекается медленнее, чем в случае каплей жидкости с меньшей вязкостью, поэтому в данном случае вторая капля касается первой раньше ( $T \approx 0,3$ ). Капля жидкости с большей вязкостью начинает сжиматься раньше ( $T \approx 1,1$ ), чем капля жидкости с меньшей вязкостью. По мере увеличения упругой составляющей при  $T > 2,4$  происходит отскок, при этом вторая капля отделяется от растекшейся первой. При  $T \approx 3,0$  вторая капля поднимается на максимальную высоту, а затем падает под действием силы тяжести. При  $T \approx 3,6$  вторая капля вновь падает на первую и погружается в нее.

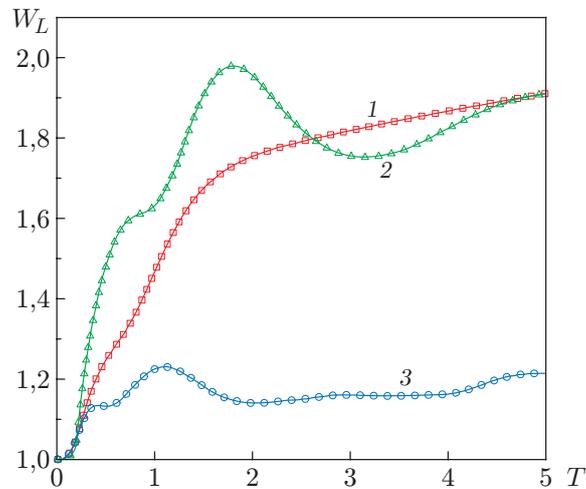


Рис. 3. Зависимость ширины каплей  $W_L$  от безразмерного времени  $T$ :  
 1 — ньютоновская жидкость, 2 — Б-жидкость Олдройда, 3 — высоковязкая Б-жидкость Олдройда

3.3. *Моделирование двух одновременных ударов каплей о жесткую пластину.* Ниже приводятся результаты численного решения методом сглаженных гидродинамических частиц задачи о взаимодействии двух каплей жидкости Олдройда при их одновременных ударах о жесткую пластину. Приняты следующие параметры задачи: начальный диаметр каплей  $D = 0,02$  м, начальное расстояние от центра капли до центра пластины  $H = 0,01$  м, размеры пластины:  $-0,04 \text{ м} \leq x \leq 0,04 \text{ м}$ ,  $-0,04 \text{ м} \leq y \leq 0,04 \text{ м}$ ,  $z = 0$ , вязкость, обусловленная наличием сольвента,  $\eta_s = 0,4 \text{ Па} \cdot \text{с}$ , полная вязкость жидкости  $\eta = 4 \text{ Па} \cdot \text{с}$ , отсчетная плотность  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , время релаксации жидкости  $\lambda_1 = 0,02 \text{ с}$ , ускорение свободного падения  $g = -9,81 \text{ м/с}^2$ . Вычисления выполнены при различных значениях скорости соударения  $V$  и расстояниях между каплями  $\Delta x$ . Рассмотрены три случая: 1)  $\Delta x = 1,1D$ ,  $V = 1,0 \text{ м/с}$ ,  $\text{Re} = 5,0$ ,  $\text{Wi} = 1,0$ ,  $\beta = 0,1$ ; 2)  $\Delta x = 1,1D$ ,  $V = 2,0 \text{ м/с}$ ,  $\text{Re} = 10,0$ ,  $\text{Wi} = 2,0$ ,  $\beta = 0,1$ ; 3)  $\Delta x = 1,5D$ ,  $V = 2,0 \text{ м/с}$ . Во всех случаях начальное расстояние между частицами  $\delta_0 = 0,00025 \text{ м}$ , общее число частиц равно 947686. Параметр сглаживания  $h = 1,5\delta_0$ , параметр искусственных напряжений  $b$  принят равным 0,8. Шаг по времени равен  $\Delta t = 10^{-5}$ . Было выполнено 10000 шагов по времени. Для проведения вычислений на компьютере HP RX2600 с 16 процессорами в случаях 1–3 потребовалось 25, 26, 25 ч соответственно.

На рис. 4, *a, г* приведены результаты численного моделирования в случае 1. На рис. 5 представлена зависимость безразмерной ширины каплей от безразмерного времени (кривая 1). После удара каплей о пластину они начинают растекаться и в момент времени  $T \approx 0,3$  соприкасаются, между ними образуется перешеек, имеющий форму пластины. В момент времени  $T \approx 0,9$  капли начинают сжиматься, что обусловлено вязкостью жидкости. При этом их ширина уменьшается, а толщина увеличивается (см. рис. 5). В этот момент перешеек практически исчезает. По мере уменьшения сил вязкости начиная с момента времени  $T \approx 2,0$  капли вновь растекаются.

На рис. 4, *б, д* приведены результаты численного решения задачи в случае 2. В этом случае скорость соударения  $V = 2,0 \text{ м/с}$  больше скорости соударения в случае 1 ( $V = 1,0 \text{ м/с}$ ). Расстояние между каплями такое же, как и в случае 1. Поскольку в случае 2 скорость соударения больше, капли растекаются быстрее и соприкасаются раньше, чем в случае 1 (при  $T \approx 0,2$ ). При  $T \approx 0,5$  между каплями образуется перешеек в форме пла-

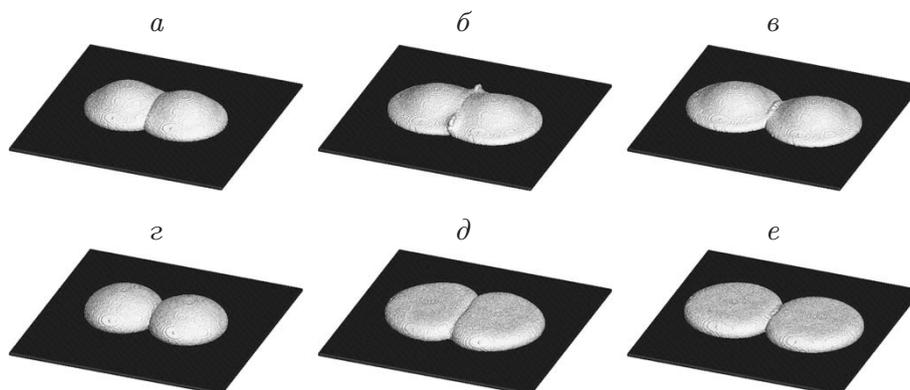


Рис. 4. Результаты численного моделирования двух одновременных ударов капель жидкости Олдройда о жесткую пластину:

$a-f$  —  $T = 0,5$ ,  $г-е$  —  $T = 2,0$ ;  $a, г$  —  $\Delta x = 1,1D$ ,  $V = 1,0$  м/с,  $б, д$  —  $\Delta x = 1,1D$ ,  $V = 2,0$  м/с,  $в, е$  —  $\Delta x = 1,5D$ ,  $V = 2,0$  м/с

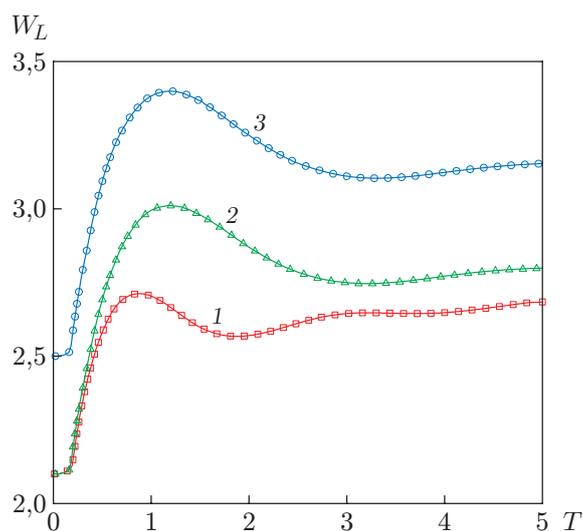


Рис. 5. Зависимость безразмерной ширины капель при двух одновременных ударах капель жидкости Олдройда о жесткую пластину:

1 —  $\Delta x = 1,1D$ ,  $V = 1,0$  м/с, 2 —  $\Delta x = 1,1D$ ,  $V = 2,0$  м/с, 3 —  $\Delta x = 1,5D$ ,  $V = 2,0$  м/с

стины, высота которого под действием сил инерции со временем увеличивается, достигая максимума при  $T \approx 0,6$ . В случае 2 скорость соударения больше, чем в случае 1, поэтому ширина капель больше, а их высота меньше. При  $T \approx 1,3$  обе капли под действием сил вязкости начинают сжиматься, их ширина уменьшается, а высота увеличивается. Фаза расширения продолжается с момента  $T \approx 1,3$  до момента  $T \approx 3,4$ . Длительность этой фазы больше, чем в случае 1. Начиная с момента  $T \approx 3,4$  силы вязкости уменьшаются и капли вновь начинают расширяться, так же как в случае 1. При этом ширина капель увеличивается, а высота уменьшается. При  $T \approx 5,0$  ширина капель больше, чем в случае 1.

На рис. 4, в, е приведены результаты численного решения задачи в случае 3. Зависимость ширины капель от времени приведена на рис. 5 (кривая 3). Поскольку в этом случае расстояние между каплями больше, чем в случае 2, ширина растекающихся капель больше. Капли соприкасаются в более поздний момент времени ( $T \approx 0,4$ ). В этот момент силы инерции слабее, чем в случае 2, и образующийся при соприкосновении капель перешеек

в форме пластины выражен слабее, чем в случае 2. При  $T \approx 1,3$  обе капли начинают сжиматься под действием сил вязкости, что приводит к уменьшению их ширины и увеличению высоты. Начиная с момента времени  $T \approx 3,4$  силы вязкости ослабевают и капли вновь начинают растекаться. В течение всего процесса соударения ширина каплей больше, чем в случае 2, но характер течения аналогичен характеру течения в этом случае.

Из приведенных результатов расчетов следует, что расстояние между каплями и скорость соударения оказывают существенное влияние на характер их взаимодействия. Чем больше скорость соударения, тем более четко выражен перешеек между каплями. Увеличение скорости соударения приводит к увеличению ширины капли и уменьшению ее толщины. При одной и той же скорости соударения характер взаимодействия каплей зависит от расстояния между ними. Чем больше расстояние между каплями, тем больше их ширина.

**Заключение.** В работе с использованием Б-модели Олдройда вязкой жидкости методом сглаженных гидродинамических частиц решена трехмерная задача о двух ударах вязкоупругих каплей о жесткую пластину. В уравнения движения добавлены искусственные напряжения, устраняющие неустойчивость при растяжении. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с известными данными. Решены задачи о последовательных и одновременных ударах о жесткую пластину каплей ньютоновской жидкости и вязких жидкостей с различными вязкостями. В случае вязких каплей обнаружены явления, отличающиеся от явлений, наблюдаемых для каплей ньютоновской жидкости. Например, в случае вязких каплей на некотором промежутке времени происходит их сжатие и может происходить отскок. При одновременных ударах каплей о пластину характер течения существенно зависит от расстояния между каплями. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности использования МСГЧ для решения задач о течении вязкой жидкости при наличии свободных поверхностей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Fang J. N., Owens R. G., Tacher L., Parriaux A.** A numerical study of the SPH method for simulating transient viscoelastic free surface flows // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2006. V. 139. P. 68–84.
2. **Tuan T., Hendrik J. J., Andrea P.** Drop impact on superheated surfaces // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. 036101.
3. **Figueiredo R. A., Cuminato J. A., Oishi C. M.** Estudo Numérico do Impacto da Gota 3D: Influência dos Parametros do Modelo Viscoelástico Giesekus // *Congresso de Mat. Apl. Comput.* 2013. V. 73. P. 73–76.
4. **Bonito A., Picasso M., Lasso M.** Numerical simulation of 3D viscoelastic flows with free surface // *J. Comput. Phys.* 2006. V. 215. P. 691–716.
5. **Lucy L. B.** A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // *Astronom. J.* 1977. V. 83. P. 1013–1024.
6. **Gingold R. A., Monaghan J. J.** Smoothed particle hydrodynamics theory and application to non-spherical stars // *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* 1977. V. 18. P. 1375–1389.
7. **Liu M. B., Liu G. R.** Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments // *Arch. Comput. Methods Engng.* 2010. V. 17. P. 25–76.
8. **Xu X., Ouyang J., Li Q.** Numerical analysis of the impact of two droplets with a liquid film using an incompressible SPH method // *J. Engng Math.* 2014. V. 85. P. 35–53.
9. **Xu X., Ouyang J., Liu Q. S., Li W. M.** SPH simulation of 2D transient viscoelastic flows using Brownian configuration fields // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2014. V. 208. P. 59–71.

10. **Monaghan J. J.** Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications // Annual Rev. Fluid Mech. 2012. V. 44. P. 323–346.
11. **Rafiee A., Manzari M. T., Hosseini M.** An incompressible SPH method for simulation of unsteady viscoelastic free-surface flows // Intern. J. Non-linear Mech. 2007. V. 42. P. 1210–1223.
12. **Morris J. P., Fox P. J., Zhu Y.** Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH // J. Comput. Phys. 1997. V. 136. P. 214–226.
13. **Swegle J. W., Hicks D. L., Attaway S. W.** Smoothed particle hydrodynamics stability analysis // J. Comput. Phys. 1995. V. 116. P. 123–134.
14. **Gray J. P., Monaghan J. J., Swift R. P.** SPH elastic dynamics // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2001. V. 190. P. 6641–6662.
15. **Oishi C. M., Martins F. P., Tomé M. F., Alves M. A.** Numerical simulation of drop impact and jet buckling problems using the eXtended Pom-Pom model // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2012. V. 169. P. 91–103.

*Поступила в редакцию 14/V 2015 г.,  
в окончательном варианте — 1/IX 2015 г.*

---