

УДК 519.676

## Численное решение стохастических дифференциальных уравнений со случайной структурой на суперкомпьютерах\*

С.С. Артемьев<sup>1,2</sup>, В.Д. Корнеев<sup>1</sup>, М.А. Якунин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: ssa@osmf.sccc.ru (Артемьев С.С.), korneev@ssd.sccc.ru (Корнеев В.Д.), yma@osmf.sccc.ru (Якунин М.А.)

**Артемьев С.С., Корнеев В.Д., Якунин М.А.** Численное решение стохастических дифференциальных уравнений со случайной структурой на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 303–311.

Исследуется точность оценки математического ожидания решений стохастических дифференциальных уравнений со случайной структурой. Показана зависимость точности оценки от размера шага интегрирования обобщенного метода Эйлера и от объема моделируемых траекторий. На простейшем СДУ показана сильная потеря точности оценки в детерминированные или случайные моменты времени изменения структуры СДУ, что требует использования для статистического моделирования высокопроизводительных суперкомпьютеров. Приводятся результаты численных экспериментов, проведенных в Сибирском суперкомпьютерном центре.

**Ключевые слова:** *стохастические дифференциальные уравнения, распараллеливание, суперкомпьютер, методы статистического моделирования, обобщенный метод Эйлера.*

**Artemiev S.S., Korneev V.D., Yakunin M.A.** Numerical solution to stochastic differential equations with a random structure on supercomputers // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 4. — P. 303–311.

In this paper we investigate the precision of estimate of the expectation of solutions to stochastic differential equations with a random structure. The dependence of the precision of estimate on the size of the integration step of the generalized Euler method and on the volume of the simulated trajectories is shown. A strong loss of the precision of estimate at deterministic or random times of changing the SDE structure is shown on an example of a simple equation. This requires the use of supercomputers for the statistical modeling. The results of the numerical experiments carried out in the Siberian SuperComputer Center are presented.

**Key words:** *stochastic differential equations, parallelization, supercomputer, the methods of statistical modeling, the generalized Euler method.*

---

Исследование точности оценок математического ожидания решений линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) методом статистического моделирования (МСМ) ранее проводилось в работах [1] и [2], где показано, что удовлетворительные результаты численных расчетов получаются на количествах моделируемых траекторий  $10^9$  и больше. Точность оценок, полученных с помощью обобщенного метода Эйлера, уменьшается с увеличением дисперсии решений СДУ и с уменьшением числа шагов интегрирования на периоде колебаний для осциллирующих СДУ. Существует широкий

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00252).

класс СДУ со случайной структурой [3]. Простейшим СДУ со случайной структурой можно назвать уравнение, в котором в некоторые моменты времени изменяются вещественные параметры. Эти моменты времени могут быть как детерминированными, так и случайными с заданными законами распределения, например экспоненциальным или логнормальным. Зачастую изменение структуры СДУ происходит при достижении траекторией решения границы заданной области, например, в задачах о срыве слежения [4]. Так как универсальным способом анализа свойств решений СДУ является численное моделирование траекторий, то возникает вопрос о точности оценок в моменты изменения структуры СДУ. Проведенные численные эксперименты показали серьезную потерю точности оценок МСМ в такие моменты. Это приводит к необходимости моделирования огромного количества траекторий решений СДУ, для чего современным ПК потребуются многосуточные расчеты. Единственным способом решения проблемы является использование суперкомпьютеров с большим количеством процессоров.

В настоящей работе рассматриваются случаи, когда время переключения является детерминированным либо случайным с экспоненциальным или логнормальным законом распределения. Параметры логнормального распределения подбираются таким образом, чтобы аппроксимировать плотность вероятности времени первого достижения траекториями решения СДУ границ интервала  $[a, b]$ . Это возможно лишь при определенных соотношениях между параметрами СДУ и границами интервала. В этом случае исследуется упрощенный вариант структуры СДУ, когда время переключения моделируется по логнормальному закону независимо от решения СДУ и не фиксируются моменты первого достижения границ траекториями. Отметим, что при других параметрах СДУ и  $[a, b]$  плотность вероятности времени первого достижения может быть, например, и бимодальной. Для указанных выше трех случаев времени переключения получены точные выражения для математического ожидания решения СДУ, что и позволяет выводить заключения о необходимых размерах шагов интегрирования и количествах моделируемых траекторий.

## 1. Системы со случайной структурой

К системам со случайной структурой относят динамические системы с нестационарной параметрической и структурной неопределенностями [3]. Математическая модель системы со случайной структурой может быть задана в виде задачи Коши для системы СДУ в смысле Ито:

$$dy = f^{(s)}(y, t) dt + \sigma^{(s)}(y, t) dw(t), \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где  $y(\cdot)$  —  $L$ -мерный случайный процесс,  $w(\cdot)$  —  $K$ -мерный стандартный винеровский процесс,  $f^{(s)}(y, t)$ ,  $s = 1, \dots, S$ , — заданные  $L$ -мерные функции,  $\sigma^{(s)}(y, t)$ ,  $s = 1, \dots, S$ , — заданные  $L \times K$ -мерные функции,  $s$  — номер структуры. Переход из одной структуры  $s$  в другую  $s + 1$  может происходить в случайные или неслучайные моменты времени  $t^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, S$ ,  $t^{(1)} = 0$ ,  $t^{(S)} < T$ . Далее для простоты будем считать  $y_0$  неслучайным.

Для численного решения системы СДУ (1) удобнее всего использовать наименее трудоемкий обобщенный метод Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + f^{(s)}(y_n, t_n)h + \sigma^{(s)}(y_n, t_n)\sqrt{h}\xi_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где  $h$  — шаг сетки по времени  $\{t_n\}$ ,  $\xi_{n+1}$  — независимые между собой и с  $y_n$  стандартные нормальные случайные векторы с независимыми компонентами.

Простейший пример системы со случайной структурой зададим в виде двухструктурного скалярного линейного СДУ с мультипликативным шумом

$$dy = \alpha_s y dt + \sigma_s y dw(t), \quad s = 1, 2; L = 1, K = 1, \quad (3)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1, \sigma_2$  — вещественные параметры. В момент времени  $t^{(2)}$  происходит замена в (3) параметров  $\alpha_1$  на  $\alpha_2$ ,  $\sigma_1$  на  $\sigma_2$ . Решение уравнения (3) находим в виде

$$y(t) = \begin{cases} y_0 \exp(a_1 t + \sigma_1 w(t)), & t \leq t^{(2)}, \\ C \exp(a_2 t + \sigma_2 w(t)), & t > t^{(2)}, \end{cases}$$

где, согласно формуле Ито,  $a_i = \alpha_i - \sigma_i^2/2$ ,  $i = 1, 2$ . Константу  $C$  определяем, исходя из условия отсутствия скачка случайного процесса  $y(t)$  в момент времени  $t^{(2)}$ , т. е. из равенства

$$C \exp(a_2 t^{(2)} + \sigma_2 w(t^{(2)})) = y_0 \exp(a_1 t^{(2)} + \sigma_1 w(t^{(2)})).$$

Отсюда получаем

$$y(t) = \begin{cases} y_0 \exp(a_1 t + \sigma_1 w(t)), & t \leq t^{(2)}, \\ y(t^{(2)}) \exp(a_2(t - t^{(2)}) + \sigma_2(w(t) - w(t^{(2)}))), & t > t^{(2)}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $y(t^{(2)}) = y_0 \exp(a_1 t^{(2)} + \sigma_1 w(t^{(2)}))$ . Из свойств винеровского процесса следует, что случайные величины  $w(t^{(2)})$  и  $w(t) - w(t^{(2)})$  являются независимыми как в случайный, так и в неслучайный момент времени  $t^{(2)}$  при  $t > t^{(2)}$ .

## 2. Распределение решения двухструктурного линейного СДУ

**Неслучайное время переключения структуры  $t^{(2)}$ .** Согласно (4), одномерное распределение решения СДУ на каждом интервале времени  $(t^{(1)}, t^{(2)})$  и  $(t^{(2)}, T]$  является логнормальным

$$f_y(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{x \sigma_1 \sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\ln(x/y_0) - a_1 t)^2}{2\sigma_1^2 t}\right), & t \leq t^{(2)}, \\ \frac{1}{x \sqrt{2\pi(\sigma_1^2 t^{(2)} + \sigma_2^2(t - t^{(2)}))}} \exp\left(-\frac{(\ln(x/y_0) - a_1 t^{(2)} - a_2(t - t^{(2)}))^2}{2(\sigma_1^2 t^{(2)} + \sigma_2^2(t - t^{(2)}))}\right), & t > t^{(2)}. \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая, что логнормальная случайная величина  $e^\zeta$ , где  $\zeta \in \mathbf{N}(m_\zeta, \sigma_\zeta^2)$ , имеет первый момент  $e^{m_\zeta + \sigma_\zeta^2/2}$ , для математического ожидания решения (4) получаем

$$m_y(t) = \begin{cases} y_0 \exp(\alpha_1 t), & t \leq t^{(2)}, \\ y_0 \exp(\alpha_1 t^{(2)} + \alpha_2(t - t^{(2)})), & t > t^{(2)}. \end{cases} \quad (6)$$

**Случайное время переключения структуры  $t^{(2)} = \xi$ .** Случайная величина  $\xi$  имеет функцию распределения  $F_\xi(t)$ , заданную на положительной полуоси, причем время переключения не зависит от случайного процесса  $y(\cdot)$ . Одномерная функция распределения решения (4) имеет вид

$$F_y(x, t) = \mathbf{P}(y(t) < x \mid \xi \geq t) \mathbf{P}(\xi \geq t) + \mathbf{P}(y_\xi(t) < x, \xi < t),$$

а плотность вероятности

$$f_y(x, t) = f_{1y}(x, t)(1 - F_\xi(t)) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}(y_\xi(t) < x, \xi < t). \quad (7)$$

Здесь в соответствии с (4)  $y_\xi(t) = y(\xi) \exp(a_2(t - \xi) + \sigma_2(w(t) - w(\xi)))$ , а плотность вероятности  $f_{1y}(x, t)$  согласно (5) имеет вид

$$f_{1y}(x, t) = \frac{1}{x\sigma_1\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\ln(x/y_0) - a_1 t)^2}{2\sigma_1^2 t}\right). \quad (8)$$

Для нахождения вероятности  $\mathbf{P}(y_\xi(t) < x, \xi < t)$  разобьем интервал  $[0, t)$  на подинтервалы  $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, I$ , одинаковой длины  $\Delta\tau$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_I = t$ . Тогда, согласно формуле полной вероятности,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(y_\xi(t) < x, \xi < t) &= \sum_i \mathbf{P}(y_\xi(t) < x, \tau_{i-1} \leq \xi < \tau_i) \\ &= \sum_i \mathbf{P}(y_\xi(t) < x \mid \tau_{i-1} \leq \xi < \tau_i) (F_\xi(\tau_i) - F_\xi(\tau_{i-1})). \end{aligned} \quad (9)$$

Переходя в (9) к пределу при  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , получаем

$$\mathbf{P}(y_\xi(t) < x, \xi < t) = \int_0^t \mathbf{P}(y_\tau(t) < x) f_\xi(\tau) d\tau, \quad (10)$$

где плотность вероятности  $f_\xi(\tau) = dF_\xi(\tau)/d\tau$ . Подставляя (10) в (7), окончательно получаем

$$f_y(x, t) = f_{1y}(x, t)(1 - F_\xi(t)) + \int_0^t f_{2y}(x, t, \tau) f_\xi(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Здесь в соответствии с (5):

$$f_{2y}(x, t, \tau) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi(\sigma_1^2\tau + \sigma_2^2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{(\ln(x/y_0) - a_1\tau - a_2(t-\tau))^2}{2(\sigma_1^2\tau + \sigma_2^2(t-\tau))}\right),$$

а функция  $f_{1y}(x, t)$  определяется согласно (8). Заметим, что для рассмотренного выше неслучайного времени переключения структур плотность вероятности случайной величины  $\xi$  является  $\delta$ -функцией  $f_\xi(t) = \delta(t - t^{(2)})$ , и формула (11) переходит в (5).

Математическое ожидание случайного процесса  $y(\cdot)$  в соответствии с (11) имеет вид

$$m_y(t) = \int_0^\infty x f_y(x, t) dx = y_0 e^{\alpha_1 t} (1 - F_\xi(t)) + y_0 \int_0^t e^{\alpha_1 \tau + \alpha_2(t-\tau)} f_\xi(\tau) d\tau. \quad (12)$$

### 3. Два варианта случайного времени переключения

1. Рассмотрим случай распределения времени переключения структур  $\xi$  по экспоненциальному закону  $f_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ , с параметром  $\lambda > 0$ . Математическое ожидание (12) при таком законе распределения принимает вид

$$m_y(t) = \frac{y_0}{\alpha_1 - \alpha_2 - \lambda} \left( (\alpha_1 - \alpha_2) e^{(\alpha_1 - \lambda)t} - \lambda e^{\alpha_2 t} \right). \quad (13)$$

**Замечание 1.** Решая уравнение  $dm_y(t)/dt = 0$ , можно найти момент времени  $t_{\text{ext}}$ , при котором математическое ожидание достигает экстремального значения (максимума или минимума):

$$t_{\text{ext}} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1 + \lambda} \ln \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \lambda)}{\alpha_2 \lambda}. \quad (14)$$

При подходящих соотношениях между параметрами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda$  значение  $t_{\text{ext}}$  положительно. Если  $\alpha_1 = 0$ , то согласно (14)  $t_{\text{ext}} = 0$ . Если же, например,  $\lambda = \alpha_1 - \alpha_2$ , то из (12) получаем  $m_y(t) = y_0 e^{\alpha_2 t} (1 + \lambda t)$ , и экстремум достигается при  $t_{\text{ext}} = -(\alpha_2 + \lambda)/(\alpha_2 \lambda)$ ; значение  $t_{\text{ext}} \geq 0$  при  $-\lambda \leq \alpha_2 < 0$ . Значение  $t_{\text{ext}}$  помогает выбрать необходимую длину интервала интегрирования  $T$ . Заметим, что при  $\alpha_1 > \lambda$  и любом  $\alpha_2$  математическое ожидание  $m_y(t)$  неограниченно монотонно возрастает при  $t \rightarrow \infty$ .

**2.** Переключение структур происходит при первом достижении траекториями случайного процесса  $y(\cdot)$  границ заданного интервала  $[a, b]$ ,  $a < y_0 < b$ . В этом случае время переключения структур  $\xi$  становится зависимым от  $y(\cdot)$  и задача определения распределения решения СДУ (3) аналитическим методом становится более сложной, чем рассмотренная в настоящей работе. Здесь же рассмотрим только простой вариант переключения структур независимо от  $y(\cdot)$  с логнормальной плотностью вероятности времени переключения  $f_\xi(t)$ , аппроксимирующей плотность вероятности времени первого достижения границ случайным процессом  $y(\cdot)$ . При этом  $f_y(x, t)$  и  $m_y(t)$  будут определяться, как и ранее, по формулам (11) и (12) соответственно.

Как известно, распределение времени первого достижения границ марковским процессом удовлетворяет уравнению Понтрягина, являющемуся уравнением в частных производных (по  $t$  и  $y_0$ ) параболического типа, коэффициенты которого определяются видом марковского процесса [4]. В данном случае этот процесс согласно (4) (при  $\sigma_1 = \sigma$ ) имеет вид

$$y(t) = y_0 e^{a_1 t + \sigma w(t)}, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Очевидно, что достижение границ интервала  $[a, b]$ , где  $b > y_0 > a > 0$ , случайным процессом (15) происходит в те же моменты времени, что и границ  $c = \ln a$ ,  $d = \ln b$  случайным процессом  $z(t) = \ln y(t)$  с начальным значением  $z_0 = \ln y_0$ . Поэтому вместо (15) рассматриваем более простой гауссовский случайный процесс

$$z(t) = z_0 + a_1 t + \sigma w(t), \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Для него удастся найти распределение времени первого достижения границ в виде достаточно простого ряда. Применяя при решении уравнения Понтрягина метод разделения переменных [4], для вероятности невыхода  $Q_{c,d}(t, z_0)$  случайного процесса (16) за границы  $c$ ,  $d$  получаем

$$Q_{c,d}(t, z_0) = \frac{\pi \sigma^2}{(d-c)^2} e^{-a_1 z_0 / \sigma^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k e^{-\gamma_k^2 t}}{\gamma_k^2} \left( e^{a_1 c / \sigma^2} - (-1)^k e^{a_1 d / \sigma^2} \right) \sin \left( k \pi \frac{z_0 - c}{d - c} \right), \quad (17)$$

где  $\gamma_k^2 = \frac{k^2 \pi^2 \sigma^2}{2(d-c)^2} + \frac{a_1^2}{2\sigma^2}$  с начальными и граничными условиями:

$$Q_{c,d}(0, z_0) = 1, \quad c < z_0 < d, \quad Q_{c,d}(t, c) = Q_{c,d}(t, d) = 0.$$

Находя из (17) производную  $-\partial Q_{c,d}(t, z_0)/\partial t$ , получаем плотность вероятности времени первого достижения границ

$$f_{c,d}(t, z_0) = \frac{\pi\sigma^2}{(d-c)^2} e^{-a_1 z_0/\sigma^2} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\gamma_k^2 t} \left( e^{a_1 c/\sigma^2} - (-1)^k e^{a_1 d/\sigma^2} \right) \sin\left(k\pi \frac{z_0 - c}{d - c}\right), \quad t > 0. \quad (18)$$

**Замечание 2.** В частном случае при  $a_1 = 0$  случайный процесс  $z(t)$  является винеровским, и формула для вероятности (17) совпадает с приведенной в [4].

Вычисления по формуле (18) показывают, что при значительном, по сравнению с величиной  $\sigma$ , удалении  $z_0$  от одной из границ интервала  $[c, d]$ , причем большем, чем от другой:  $(z_0 - c) > (d - z_0)$  при  $a_1 > 0$  или  $(d - z_0) > (z_0 - c)$  при  $a_1 < 0$ , плотность вероятности (18) фактически описывает распределение времени первого достижения границы односторонней области  $(-\infty, d]$  либо  $[c, \infty)$  соответственно. Для таких областей формулы математического ожидания времени первого достижения границы весьма просты: для верхней границы

$$m_t(d, z_0) = (d - z_0)/a_1, \quad a_1 > 0,$$

или для нижней границы

$$m_t(c, z_0) = (c - z_0)/a_1, \quad a_1 < 0.$$

Плотность вероятности (18) в таких случаях является унимодальной и хорошо аппроксимируется логнормальной плотностью

$$f_{\xi}(t) = \frac{1}{\sigma_{\zeta} t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - m_{\zeta})^2}{2\sigma_{\zeta}^2}\right), \quad (19)$$

где параметры  $m_{\zeta}$  и  $\sigma_{\zeta}$  оцениваются с использованием вычисленных значений плотности (18). Например, приравнявая теоретические координаты моды логнормальной плотности вероятности (19) к координатам  $(t_{\max}, f_{\max})$ , вычисленным по формуле (18), получаем несложную систему уравнений на неизвестные  $m_{\zeta}$ ,  $\sigma_{\zeta}$ :

$$\begin{cases} \exp(m_{\zeta} - \sigma_{\zeta}^2) = t_{\max}, \\ \frac{1}{\sigma_{\zeta} \sqrt{2\pi}} \exp(-m_{\zeta} + \sigma_{\zeta}^2/2) = f_{\max}. \end{cases}$$

Заметим, что при  $\sigma_{\zeta} \rightarrow 0$  плотность вероятности (19) переходит в  $\delta$ -функцию  $\delta(t - e^{m_{\zeta}})$  и  $m_y(t)$  будет определяться по формуле (6), в которой  $t^{(2)} = e^{m_{\zeta}}$ . В соответствии с (6) математическое ожидание (12) при достаточно малом  $\sigma_{\zeta}$  может иметь максимум при  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 < 0$  или минимум при  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ .

#### 4. Численные эксперименты

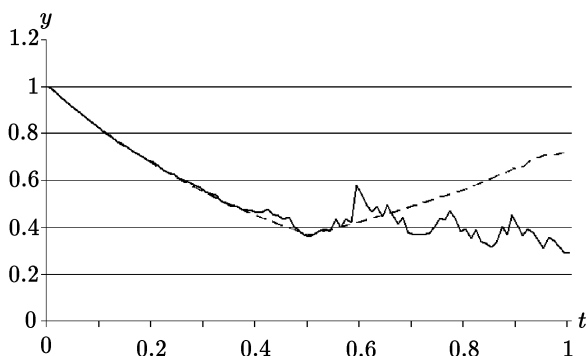
Целью проводимых на суперкомпьютере численных экспериментов является демонстрация примеров с потерей точности оценок математического ожидания  $\mathbf{E}y(t)$  с помощью МСМ после момента времени переключения структур.

Численные эксперименты проводились на кластере NKS-30Т Сибирского суперкомпьютерного центра при Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Вычислительный кластер NKS-30Т состоит из управляющего модуля HP ProLiant DL 380 G5 (2 процессора Intel Quad-Core Xeon E5440, 2.83 ГГц,

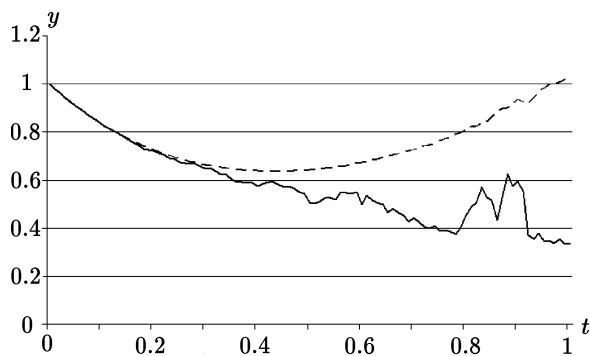
RAM 16 ГБайт) и 128 вычислительных блейд-серверов HP ProLiant BL2x220c с четырёхядерными процессорами Intel Xeon E5450, 3 ГГц.

**Тест 1.** Статистическое моделирование решений СДУ (3) при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  с неслучайным временем переключения  $t^{(2)}$ . Оценивается  $\mathbf{E}y(t)$  в узлах сетки на интервале  $[0, T]$ . Задавались значения параметров:  $t^{(2)} = 0.5$ ,  $\alpha_1 = -2$ ,  $\alpha_2 = 1.5$ ,  $\sigma = 5$ ,  $T = 1$ ,  $y_0 = 1$ .

В варианте с низкой точностью оценки математического ожидания размер шага интегрирования задавался равным  $h = 10^{-2}$  и моделировалось  $N_{\text{тр}} = 10^6$  траекторий. Время счета на 32 процессорах составило менее секунды. В варианте с высокой точностью оценки задавались  $h = 10^{-3}$ ,  $N_{\text{тр}} = 10^{11}$ . Время счета на 128 процессорах составило 52160 с.



**Рис. 1.** Оценка математического ожидания с  $N_{\text{тр}} = 10^6$  (сплошная линия) и  $N_{\text{тр}} = 10^{11}$  (пунктирная линия)



**Рис. 2.** Оценка математического ожидания с  $N_{\text{тр}} = 10^7$  (сплошная линия) и  $N_{\text{тр}} = 10^{11}$  (пунктирная линия)

Как видно из рис. 1, удовлетворительная точность оценки математического ожидания решения после переключения достигается только при  $N_{\text{тр}} = 10^{11}$ . График оценки математического ожидания, полученной при  $N_{\text{тр}} = 10^{11}$  (пунктирная линия), почти совпадает с графиком  $\mathbf{E}y(t)$ , полученным по формуле (6) (для точного решения имеем  $\mathbf{E}y(1) = 0.68$ , для оценки  $\hat{y}(1) = 0.67$ ).

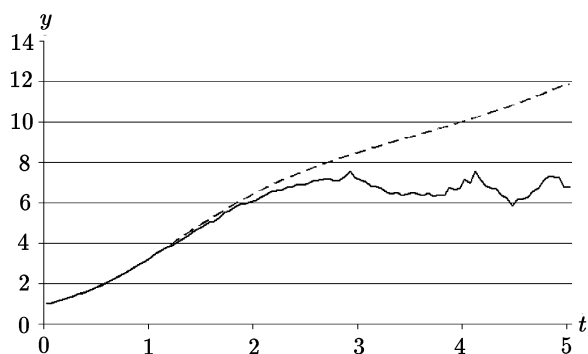
**Тест 2.** Случайное время переключения структур распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda$ . Заданы следующие значения параметров:  $\lambda = 1$ ,  $\alpha_1 = -2$ ,  $\alpha_2 = 1.5$ ,  $\sigma = 5$ ,  $T = 1$ ,  $y_0 = 1$ . В варианте с низкой точностью оценки математического ожидания  $h = 10^{-2}$ ,  $N_{\text{тр}} = 10^6$  время счета на 4 процессорах составило менее секунды. В варианте с высокой точностью оценки  $h = 10^{-3}$ ,  $N_{\text{тр}} = 10^{12}$  время счета на 256 процессорах составило 268000 с (около 75 часов).

Как и в тесте 1, точная оценка  $\mathbf{E}y(t)$  после  $t > t^{(2)}$  получается только при малом размере шага интегрирования и огромном количестве моделируемых траекторий. На рис. 2 пунктирная линия почти совпадает с рассчитанной по формуле (13).

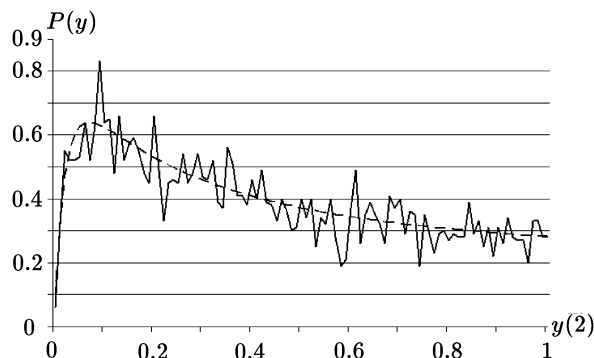
**Тест 3.** Распределение времени переключения структур является логнормальным:  $\xi = e^\zeta$ , где  $\zeta \in \mathbf{N}(m_\zeta, \sigma_\zeta^2)$ . Заданы следующие значения параметров:  $m_\zeta = 0.5622$ ,  $\sigma_\zeta = 0.4856$ ,  $\alpha_1 = 1.25$ ,  $\alpha_2 = -2$ ,  $\sigma = 0.7071$ ,  $T = 5$ .

Отметим, что при таких значениях параметров логнормальное распределение хорошо аппроксимирует плотность распределения времени выхода траекторий решения СДУ (3) на границу интервала  $[e^{-5}, e^2]$ . В варианте с низкой точностью оценки математического ожидания с  $h = 10^{-2}$ ,  $N_{\text{тр}} = 10^4$  время счета на 64 процессорах составило менее секунды.

ды. В варианте с высокой точностью оценки  $h = 10^{-3}$ ,  $N_{\text{тр}} = 10^{10}$  время счета на 64 процессорах составило 8881 с (148 минут).



**Рис. 3.** Оценка математического ожидания с  $N_{\text{тр}} = 10^3$  (сплошная линия) и  $N_{\text{тр}} = 10^{10}$  (пунктирная линия)



**Рис. 4.** Плотность вероятности (11) в точке  $T = 2$  с  $N_{\text{тр}} = 10^5$  (сплошная линия) и с  $N_{\text{тр}} = 10^{10}$  (пунктирная линия)

На рис. 3 приведены графики оценок математического ожидания с  $N_{\text{тр}} = 10^3$  (сплошная линия) и с  $N_{\text{тр}} = 10^{10}$  (пунктирная линия). Пунктирная линия почти совпадает с рассчитанной по формуле (12).

На рис. 4 приведены графики оценок плотности вероятности (11) при  $t = 2$  для заданных в тесте значений вещественных параметров. Здесь же приведены графики полигонов частот для случайной величины  $y(2)$ , полученные при  $h = 10^{-2}$ ,  $N_{\text{тр}} = 10^5$  (сплошная линия) и  $h = 10^{-3}$ ,  $N_{\text{тр}} = 10^{10}$  (пунктирная линия). Пунктирная линия везде совпадает с рассчитанной по формуле (11). Заметим, что при расчетах точной плотности вероятности интеграл в (11) вычислялся по формуле прямоугольников. Как видно из рисунка, точность оценки плотности решения  $y(2)$  при  $N_{\text{тр}} = 10^5$  низкая и вполне удовлетворительная при  $N_{\text{тр}} = 10^{10}$ .

## Заключение

Как показали проведенные вычисления, статистическое моделирование решений СДУ со случайной структурой даже в простейших случаях требует моделирования огромного количества траекторий. Это тем более справедливо в случае многократных изменений структуры  $S \gg 2$  и для больших размерностей СДУ  $L > 2$ . Проблема может решаться только на параллельных кластерах с большим количеством процессоров.

## Литература

1. **Артемьев С.С., Корнеев В.Д.** Численное решение стохастических дифференциальных уравнений на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2011. — Т. 14, № 1. — С. 5–17.
2. **Артемьев С.С., Иванов А.А., Корнеев В.Д.** Численный анализ стохастических осцилляторов на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 1. — С. 31–43.



3. **Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.** Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.
4. **Тихонов В.И., Миронов М.А.** Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.

*Поступила в редакцию 12 апреля 2012 г.,  
в окончательном варианте 10 мая 2012 г.*

